ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- **Τεχνικές Απαρίθμησης**
- **Σχεδιασμοί**
- **Γραφήματα**

Μωυσιάδης Χρόνης
Ζ΄ Εξάμηνο Μαθηματικών 2009-10

Τρίτη και 13

1. **Πόσες μέρες «Τρίτη και 13» υπάρχουν κατά μέγιστον σ' ένα ημερολογιακό έτος;**

Θέσατε **Κυριακή=1, Δευτέρα=2, ..., Σάββατο=7**

Για έτος με 365 μέρες:

Έστω 13 Ιανουαρίου είναι Κυριακή, δηλ. τύπου 1

τότε 13 Φεβρουαρίου είναι τύπου 4 (διότι απέχει 31=28+3), κλπ

Τελικά

1, 4, 4, 7, 2, 5, 7, 3, 6, 1, 4, 6

και mod7

2, 5, 5, 1, 3, 6, 1, 4, 7, 2, 5, 7

κλπ

Αναζητούμε πλήθος των 3

Παρατηρούμε ότι κάθε σειρά έχει τρεις τύπους ίδιους

Άρα η απάντηση είναι **«3»**

Τρίτη και 13 (συνέχεια)

Ποια η πιθανότητα η 13η κάποιου μήνα που διαλέγεται τυχαία να είναι Τρίτη;

Εξετάστηκαν 365243 ημέρες των 1000 ετών από το 1501 μέχρι το 2500

Κυριακή	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο
0.1431	0.1427	0.1427	0.1431	0.1425	0.1432	0.1427

Όπως αναμένονταν η πιθανότητα μια μέρα με ημερομηνία 13 να είναι Τρίτη, είναι κατά προσέγγιση ίση με το να είναι οποιαδήποτε άλλη μέρα, δηλαδή περίπου 1/7

Μια παραλλαγή του προβλήματος αυτού είχε τεθεί στο περιοδικό American Mathematical Monthly το Νοέμβριο του 1962

Χρωματισμοί

2. Ένα σύνολο ξύλινων κύβων βάφονται με δύο χρώματα (μπλε και κόκκινο). Πόσα διαφορετικά είδη υπάρχουν;

(Δύο κύβοι είναι διαφορετικοί αν δεν υπάρχει τρόπος να τοποθετηθούν ώστε οι αντίστοιχες έδρες να έχουν ίδια χρώματα).

Βρίσκουμε ότι υπάρχει 1 είδος με έξι μπλε έδρες, ..., 2 είδη με 4 μπλε έδρες (διότι οι 2 κόκκινες είναι ή γειτονικές ή σε απέναντι πλευρές), κλπ.

0 ή 6 μπλε	1 κύβος
1 ή 5 μπλε	1 κύβος
2 ή 4 μπλε	2 κύβοι
3 μπλε	2 κύβοι

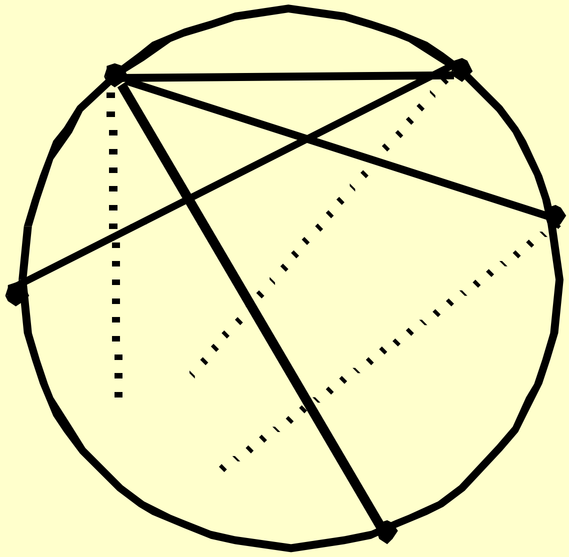
(ή θα έχουν οι τρεις μπλε κοινή κορυφή , ή οι δύο είναι απέναντι και μία τις συνδέει)

Απάντηση

10

Διαμέριση χωρίων

3. Δίνονται n σημεία σε έναν κύκλο και υποτίθεται ότι όλες οι ανά δύο συνδέσεις ορίζουν ευθείες που τέμνονται σε διαφορετικά σημεία. Ποιο είναι το πλήθος των χωρίων στα οποία κατά μέγιστον υποδιαιρείται ο κύκλος;

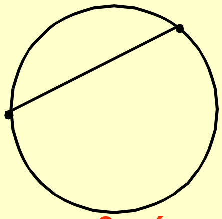


Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

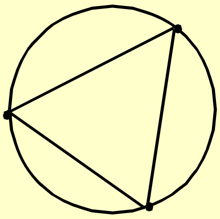
Απάντηση

Παρατηρείστε ότι

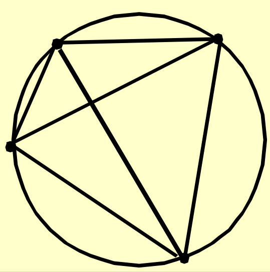
για n=2 είναι 2



για n=3 είναι 4



για n=4 είναι 8.



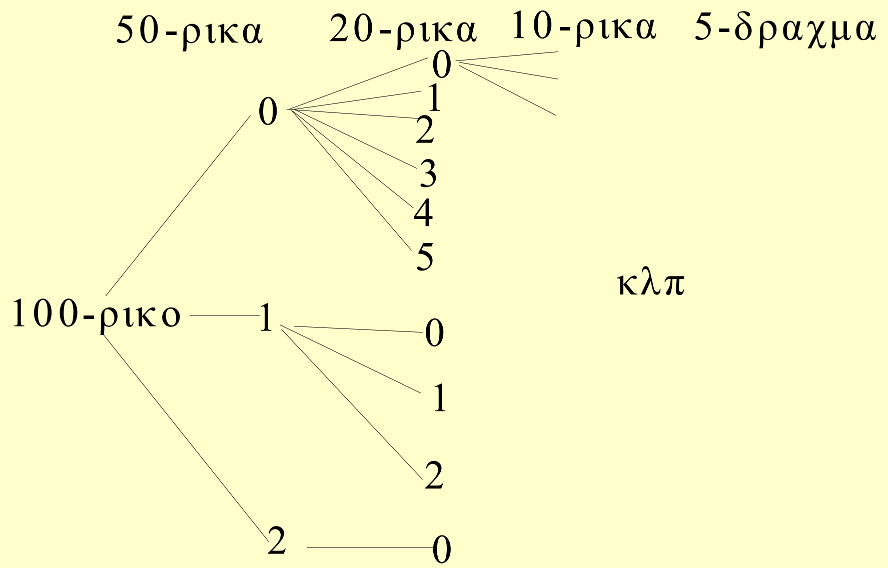
Σκεφτείτε ότι οι γραμμές είναι όσοι και οι συνδυασμοί $\binom{n}{2}$, ενώ τα σημεία που ορίζονται από δύο γραμμές αν υποτεθεί ότι όλες τέμνονται μεταξύ τους ανά δύο είναι $\binom{n}{4}$.

Απάντηση $\mathbf{1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}}$

Αλλαγή σε ψιλά (λύση με απαρίθμηση)

4. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να "χαλάσουμε" ένα 100-ρικο σε ψιλά των 5, 10, 20 ή και 50 δραχμών;

Λύση με καταγραφή: (π.χ. με δενδροδιάγραμμα)



Απάντηση

49

Αλλαγή σε ψιλά (λύση με πολυώνυμα)

Αρκεί να λυθεί η διοφαντική εξίσωση

$$5x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 50x_4 = 100$$

Λύση με πολυώνυμα: Το γινόμενο των πολυωνύμων

$P_1(x)=1+x^5+x^{10}+...+x^{100}$, $P_2(x)=1+x^{10}+x^{20}+...+x^{100}$, $P_3(x)=1+x^{20}+x^{40}+...+x^{100}$ και $P_4(x)=1+x^{50}+x^{100}$, ισούται με:

$$
\begin{aligned}
P_1(x)P_2(x)P_3(x)P_4(x) = {} & x^{400}+x^{395}+2\cdot x^{390}+2\cdot x^{385}+4\cdot x^{380}+4\cdot x^{375}+6\cdot x^{370}+6\cdot x^{365}+9\cdot x^{360}+9\cdot x^{35} \\
& +13\cdot x^{350}+13\cdot x^{345}+18\cdot x^{340}+18\cdot x^{335}+24\cdot x^{330}+24\cdot x^{325}+31\cdot x^{320}+31\cdot x^{315}+39\cdot x^{310}+39\cdot x^{305} \\
& +49\cdot x^{300}+48\cdot x^{295}+58\cdot x^{290}+57\cdot x^{285}+68\cdot x^{280}+66\cdot x^{275}+77\cdot x^{270}+75\cdot x^{265}+87\cdot x^{260}+84\cdot x^{255} \\
& +96\cdot x^{250}+92\cdot x^{245}+104\cdot x^{240}+99\cdot x^{235}+110\cdot x^{230}+104\cdot x^{225}+115\cdot x^{220}+108\cdot x^{215}+118\cdot x^{210}+ \\
& +110\cdot x^{205}+120\cdot x^{200}+110\cdot x^{195}+118\cdot x^{190}+108\cdot x^{185}+115\cdot x^{180}+104\cdot x^{175}+110\cdot x^{170}+99\cdot x^{16} \\
& +104\cdot x^{160}+92\cdot x^{155}+96\cdot x^{150}+84\cdot x^{145}+87\cdot x^{140}+75\cdot x^{135}+77\cdot x^{130}+66\cdot x^{125}+68\cdot x^{120}+57\cdot x^{11} \\
& +58\cdot x^{110}+48\cdot x^{105}+49\cdot x^{100}+39\cdot x^{95}+39\cdot x^{90}+31\cdot x^{85}+31\cdot x^{80}+24\cdot x^{75}+24\cdot x^{70}+18\cdot x^{65}+18\cdot x \\
& +13\cdot x^{55}+13\cdot x^{50}+9\cdot x^{45}+9\cdot x^{40}+6\cdot x^{35}+6\cdot x^{30}+4\cdot x^{25}+4\cdot x^{20}+2\cdot x^{15}+2\cdot x^{10}+x^5+1
\end{aligned}
$$

Απάντηση Συντ/στής του x^{100} είναι το 49

Αλλαγή σε ψιλά (λύση με πρόγραμμα)

πρόγραμμα σε Pascal

```
program progr01 (input, output);
var  a,b,c,d,e, diaf   :integer;
     a1,b1,c1,d1, count :integer;
     i, j, k, l :integer;
begin
  a:=5; b:=10; c:=20; d:=50; e:=100;
  a1:=e div a; b1:=e div b; c1:=e div c; d1:=e div d;
  count:=0;
  for i:=0 to a1 do
    for j:=0 to b1 do
      for k:=0 to c1 do
        for l:=0 to d1 do  begin
          diaf:=e-a*i-b*j-c*k-d*l;
          if diaf=0 then begin
          writeln('x1=',i,' x2=',j,' x3=',k,' x4=',l);
          count:=count+1;
          end;
        end;
        writeln('count=',count);
end.
```

εκτέλεση δίνει 49

για `e:=1000` δίνει 19006

Ένα εκτελέσιμο πρόγραμμα σε Fortran με την ονομασία diofant.exe δίνει το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k=n$, για δοσμένα n, k<10 και $a_1, a_2,\ldots a_k$, καθώς και τις ίδιες τις λύσεις.
Το πρόγραμμα είναι διαθέσιμο στη διεύθυνση users.auth.gr/cmoi.

Αρχή περιστερώνα

5. **Αν είναι γνωστό ότι κανείς άνθρωπος δεν έχει περισσότερες από 300000 τρίχες στο κεφάλι του και ότι η Θεσσαλονίκη έχει περισσότερους από 700000 κατοίκους, παρατηρείστε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα με ακριβώς ίδιο πλήθος τριχών στο κεφάλι τους.**

   Μήπως υπάρχουν τουλάχιστον 3;

Απάντηση

ΝΑΙ λόγω της γενικευμένης αρχής του περιστερώνα

Διαταράξεις

6. Δίνονται n γράμματα που θα αποσταλούν σε διαφορετικούς παραλήπτες και n φάκελλοι με τις διευθύνσεις των παραληπτών. Αν γίνει τυχαία τοποθέτηση, σε πόσες από τις n! δυνατές τοποθετήσεις κανένα γράμμα δεν τοποθετείται στο σωστό φάκελλο;

Αριθμούμε τα φάκελλα 1,2,...,n και ομοίως τα γράμματα.
Μια τοποθέτηση αντιστοιχεί σε μια μετάθεση,
ενώ οι ζητούμενες αντιστοιχούν σε εκείνες
που κανένα στοιχείο δεν μένει στη θέση του.

Απάντηση:

n=3	n=4	n=n	**Μεγάλο n**
2	**;**	**;**	**(n!)/e=0.36788 n!**

Οι αξιωματικοί του Euler

7. 36 αξιωματικοί που ανήκουν σε έξι χώρες και σε έξι βαθμούς (ώστε σε κάθε συνδυασμό να έχουμε ακριβώς από έναν αξιωματικό) πρόκειται να τοποθετηθούν σε τιμητική παράταξη σε 6-δες.
Είναι δυνατό να τοποθετηθούν με τρόπο ώστε σε κάθε γραμμή, και σε κάθε στήλη να μην υπάρχουν αξιωματικοί από την ίδια χώρα ή από τον ίδιο βαθμό;

Ετέθη το 1782 από τον Euler. Πίστευε ότι η απάντηση είναι “ΟΧΙ”. Αποδείχθηκε το 1900 από τον Tarry. Ο Euler είχε διατυπώσει την εικασία ότι στο γενικότερο πρόβλημα για n^2 αξιωματικούς η απάντηση είναι ΟΧΙ για $n \equiv 2 \bmod 4$. Όμως το 1960 οι Bose, Shrikhande και Parker έδειξαν ότι η απάντηση είναι ΝΑΙ για όλα τα n εκτός n=2 και n=6.

BIB σχεδιασμοί

8. **Πέντε τύποι ελαστικών (1, 2, 3, 4, 5) πρόκειται να ελεγχθούν ως προς την αντοχή τους. Τοποθετούνται σε 5 αυτοκίνητα (Α, Β, Γ, Δ, Ε) στις 4 θέσεις ΕΑ (εμπρός αριστερά), ΕΔ (εμπρός δεξιά), ΠΑ (πίσω αριστερά), ΠΔ (πίσω δεξιά) με διαφορετικούς τρόπους και κάποιοι οδηγοί αναλαμβάνουν να τα οδηγήσουν και να παρατηρήσουν τα αποτελέσματα. Ανάλογα με την τοποθέτηση τα αποτελέσματα είναι περισσότερο ή λιγότερο ικανοποιητικά. Πως μπορούμε να τοποθετήσουμε τα ελαστικά στα αυτοκίνητα, ώστε να είμαστε βέβαιοι ότι τα αποτελέσματα θα είναι όσο περισσότερο γίνεται ικανοποιητικά;**

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
ΕΑ	1	2	3	4	5
ΕΔ	2	3	4	5	1
ΠΑ	3	4	5	1	2
ΠΔ	4	5	1	2	3

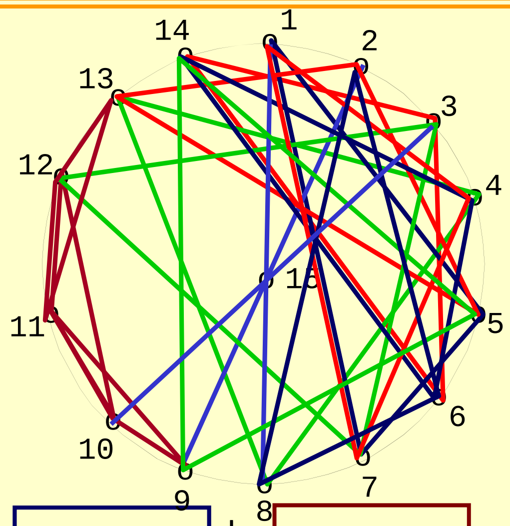
Το πρόβλημα του Kirkman

9. **15 μαθήτριες κάνουν περίπατο κάθε μέρα σε τριάδες. Είναι δυνατό να οργανωθεί ο περίπατος με τρόπο ώστε κάθε μέρα να έχει κάθε μαθήτρια διαφορετική παρέα;**

Κάθε μαθήτρια κάνει παρέα με 2 άλλες κάθε μέρα, άρα χρειάζονται 7 μέρες για να κάνει παρέα με τις 14 συμμαθήτριές της. Στις 7 μέρες σχηματίζονται $7 \cdot 5=35$ τριάδες.
Το πρόβλημα τέθηκε και λύθηκε το 1847 από τον επίσκοπο Kirkman.
Το 1967 οι Ray-Chaudhuri και Wilson έδειξαν ότι υπάρχουν λύσεις για αριθμό κοριτσιών $n \equiv 3 \bmod 6$.

Μία γραφική λύση

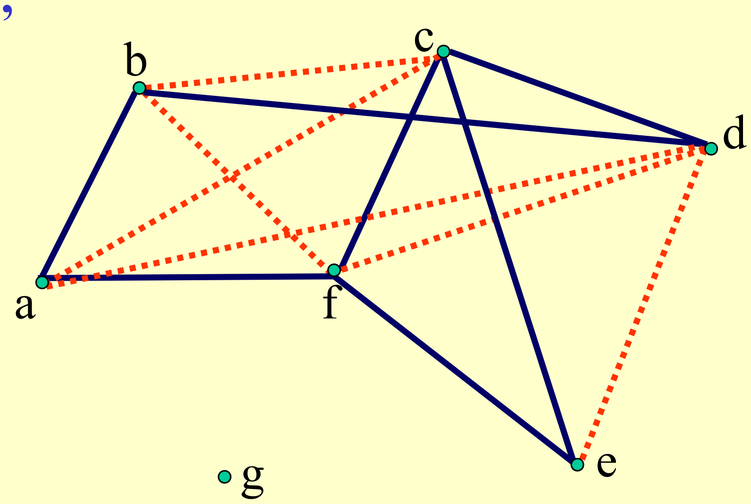
Για το πρόβλημα με n=15 βοηθά το διπλανό σχήμα. Αριθμοί που βρίσκονται στο ίδιο τρίγωνο σχηματίζουν την α΄ γραμμή του παρακάτω σχηματισμού. Οι άλλες παίρνονται με μετατόπιση κατά δύο mod14 (Το 15 παραμένει αμετάβλητο).



1 8 15	2 5 13	3 7 12	4 6 14	9 10 11
3 10 15	1 4 7	5 9 14	2 6 8	11 12 13
5 12 15	3 6 9	2 7 11	4 8 10	1 13 14
7 14 15	5 8 11	4 9 13	6 10 12	1 2 3
2 9 15	7 10 13	1 6 11	8 12 14	3 4 5
4 11 15	1 9 12	3 8 13	2 10 14	5 6 7
6 13 15	3 11 14	1 5 10	2 4 12	7 8 9

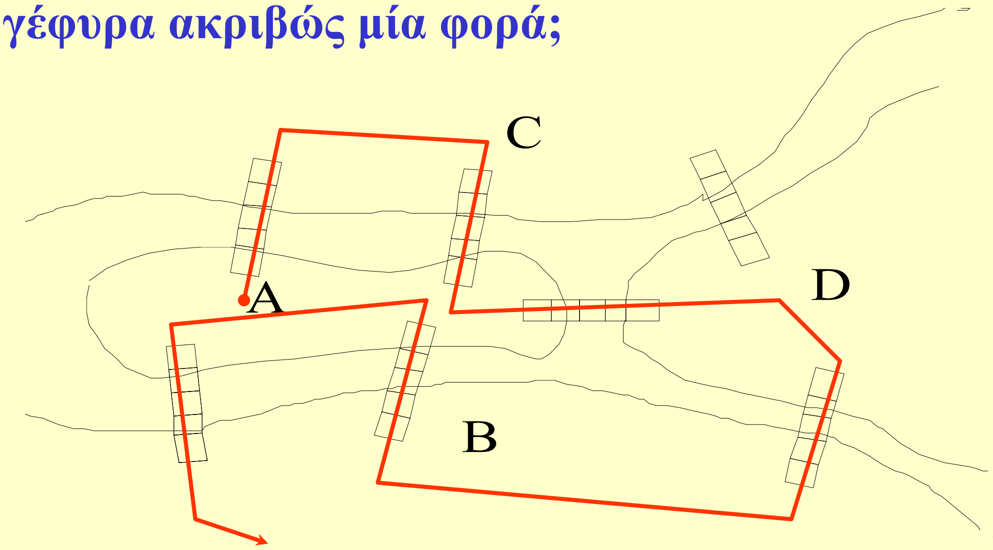
Το παιχνίδι του Ramsey

10. Δύο παίκτες έχουν διαφορετικού χρώματος μολύβια (έστω κόκκινο και μπλε) και ένα φύλλο χαρτί με σημειωμένα n σημεία. Οι παίκτες ενώνουν διαδοχικά δύο σημεία με μία γραμμή του χρώματος που διάλεξαν. Ο πρώτος που συμπληρώνει τρίγωνο κερδίζει. Κερδίζει πάντοτε κάποιος παίκτης; Ποιο είναι το ελάχιστο n ώστε να συμβαίνει αυτό;



Οι γέφυρες του Königsberg

11. Το 1735 επτά γέφυρες συνέδεαν τις δ̲ύο νησίδες που σχηματίζει το ποτάμι της πόλης K nigsberg (Kalliningrand) στη σημερινή Λιθουανία. Υπάρχει τρόπος να κάνει κάποιος βόλτα ξεκινώντας από ένα σημείο και επιστρέφοντας σ' αυτό περνώντας από κάθε γέφυρα ακριβώς μία φορά;

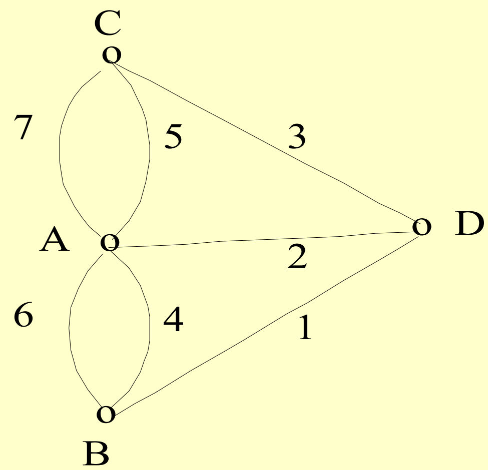


Απόδειξη Euler

Κάθε τέτοια διαδρομή αποτελείται από διαδοχή γραμμάτων που σημαίνουν τις στεριές π.χ. ACADBAB..... κλπ.
Δείξτε ότι το ζητούμενο θα έπρεπε να έχει 8 μόνο γράμματα, τα οποία όμως πρέπει να συμπεριλαμβάνουν τουλάχιστον 3 A και από 2 τουλάχιστον B, C και D,
πράγμα άτοπο.

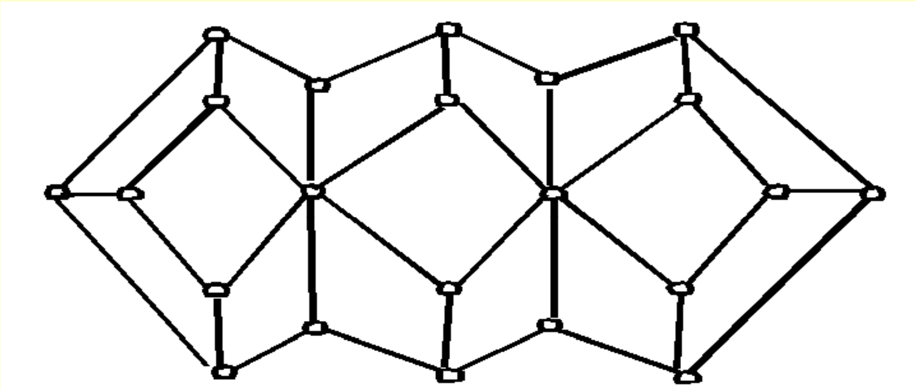
Το ίδιο πρόβλημα ισοδυναμεί με τη δυνατότητα κατασκευής του διπλανού σχήματος με μονοκονδυλιά.

Θεωρείται ως το γενέθλιο πρόβλημα της θεωρίας Γραφημάτων (Graph Theory)



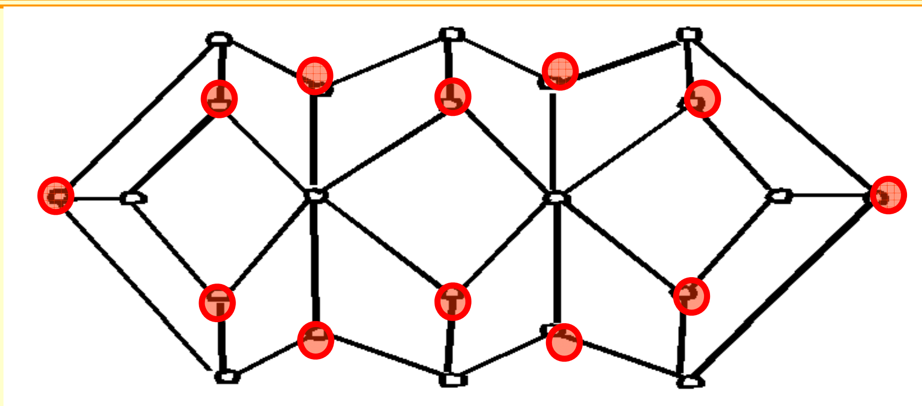
Γραφήματα

12. **Το γράφημα δίπλα παριστάνει τις μεταξύ 22 πόλεων άμεσες δυνατές συνδέσεις μέσω αεροπορικών γραμμών. Εξετάστε αν είναι δυνατόν να περάσει κανείς από όλες τις πόλεις χωρίς όμως να χρειαστεί να περάσει δεύτερη φορά από την ίδια πόλη.**



Είναι ειδική περίπτωση του γνωστού προβλήματος του περιοδεύοντος πωλητή. Στη γενική περίπτωση είναι άλυτο πρόβλημα, ακόμη και με υπολογιστή (NP-complete problem)

Λύση με χρωματισμό



Κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό, παρά μόνο αν ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος είναι 2.

Χρωματίσαμε με δύο διαφορετικά χρώματα π.χ. άσπρο (Α) κάποιες από τις πόλεις και με κόκκινο (Κ) τις υπόλοιπες.

Τα 10 (Α) και 12 (Κ) εναλλάσσονται. Επιπλέον, πρέπει μια διαδρομή να αρχίζει από το ένα γράμμα και να τελειώνει στο άλλο (ώστε να είναι δυνατή η επιστροφή). Άρα υπάρχουν δύο δυνατότητες, που οδηγούν και οι δύο σε ΑΤΟΠΟ.

Κ – Κ – Κ – Κ – Κ – Κ – Κ – Κ – Κ – Κ – Κ – Κ –

ή **Α – Α – Α – Α – Α – Α – Α – Α – Α – Α –**

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΑΡΧΗ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ - ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ - - ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Μωυσιάδης Χρόνης
Ζ΄ Εξάμηνο Μαθηματικών 2009-10

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Παραδείγματα

1. • Ρίχνουμε διαδοχικά δύο ζάρια και καταγράφουμε τις ενδείξεις τους με τη σειρά που εμφανίστηκαν. Πόσα διαφορετικά ζεύγη ενδείξεων είναι δυνατό να εμφανιστούν;

• (α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66
6	6	6	6	6	6

1ο ζάρι	2ο ζάρι	
6	6	$6 \cdot 6 = 36$

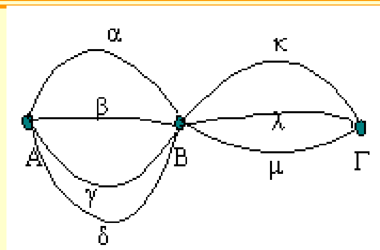
• (β) είναι γνωστό ότι τα
• δύο ζάρια έχουν
• διαφορετική ένδειξη;

12	21	31	41	51	61
13	23	32	42	52	62
14	24	34	43	53	63
15	25	35	45	54	64
16	26	36	46	56	65
5	5	5	5	5	5

1ο ζάρι	2ο ζάρι	
6	5	$6 \cdot 5 = 30$

Παραδείγματα (συνέχεια)

2. Τέσσερις δρόμοι (α, β, γ, δ) οδηγούν από την πόλη Α στην πόλη Β και τρεις (κ, λ, μ) από την πόλη Β σε μια τρίτη πόλη την Γ. Με πόσες διαφορετικές διαδρομές μπορεί κάποιος να πάει από την πόλη Α στην πόλη Γ μέσω της πόλης Β;



Από Α→Β 4	Από Β→Γ 3	$4 \cdot 3 = 12$

3. Με πόσους τρόπους από ένα σύνολο 7 ατόμων, μπορούμε να σχηματίσουμε 3-μελή επιτροπή της οποίας ένα μέλος να είναι πρόεδρος;

$\alpha\beta\gamma$	$\alpha\gamma\zeta$	$\alpha\zeta\eta$	$\beta\delta\eta$	$\gamma\varepsilon\zeta$
$\alpha\beta\delta$	$\alpha\gamma\eta$	$\beta\gamma\delta$	$\beta\varepsilon\zeta$	$\gamma\varepsilon\eta$
$\alpha\beta\varepsilon$	$\alpha\delta\varepsilon$	$\beta\gamma\varepsilon$	$\beta\varepsilon\eta$	$\gamma\zeta\eta$
$\alpha\beta\zeta$	$\alpha\delta\zeta$	$\beta\gamma\zeta$	$\beta\zeta\eta$	$\delta\varepsilon\zeta$
$\alpha\beta\eta$	$\alpha\delta\eta$	$\beta\gamma\eta$	$\gamma\delta\varepsilon$	$\delta\varepsilon\eta$
$\alpha\gamma\delta$	$\alpha\varepsilon\zeta$	$\beta\delta\varepsilon$	$\gamma\delta\zeta$	$\delta\zeta\eta$
$\alpha\gamma\varepsilon$	$\alpha\varepsilon\eta$	$\beta\delta\zeta$	$\gamma\delta\eta$	$\varepsilon\zeta\eta$

□ π.χ. α δ ζ
πρόεδρος ή α ή δ ή ζ

επιτροπή 35	*πρόεδρος* 3	$35 \cdot 3 = 105$

Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης (ΘΑΑ)

Το πλήθος n των στοιχείων ενός συνόλου που ο καθορισμός τους ή ο σχηματισμός τους μπορεί να θεωρηθεί ότι γίνεται σε m διαδοχικές φάσεις, τέτοιες ώστε, σε οποιαδήποτε φάση το πλήθος των δυνατοτήτων που απαριθμούνται να είναι σταθερό, ανεξάρτητα από το τι συνέβη στις προηγούμενες φάσεις, ισούται με:

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdots\cdot n_m$$

όπου n_k , $(k = 1, 2, \ldots, m)$**,**
η απαρίθμηση των δυνατοτήτων στην k φάση.

Μουσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Παράδειγμα

4. Οι πινακίδες των ιδιωτικών αυτοκινήτων στην Ελλάδα σχηματίζονται από τρία γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου που έχουν αντίστοιχά τους στο Λατινικό και από 4 αριθμητικά ψηφία που σχηματίζουν τετραψήφιο αριθμό. Πόσα το πολύ ιδιωτικά αυτοκίνητα μπορούν να κυκλοφορούν στην Ελλάδα; Πόσα το πολύ από αυτά θα έχουν διαφορετικά ψηφία; Πόσα το πολύ θα έχουν όλα τα σύμβολα διαφορετικά; Πόσα το πολύ αρχίζουν από Μ ή Ν;

1ο γράμμα	2ο γράμμα	3ο γράμμα	1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	4ο ψηφίο	ΘΑΑ
14	14	14	9	10	10	10	24 696 000
14	14	14	9	9	8	7	12 446 784
14	13	12	9	9	8	7	9 906 624
2	14	14	9	10	10	10	3 528 000

- Άν οι πινακίδες είχαν 2 μόνο γράμματα, τότε θα υπήρχαν το πολύ 1764000 πινακίδες.

Μουσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Παράδειγμα

5. Πόσοι περιττοί τριψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία 1, 3, 6, 7 και 8, όταν :
(α) μπορούν να έχουν και όμοια ψηφία,
(β) έχουν όλα τα ψηφία διαφορετικά.

(α)

1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	ΘΑΑ
5	5	3	$5 \cdot 5 \cdot 3=75$
Διότι και τα 5 ψηφία που δόθηκαν μπορούν να είναι στην 1η θέση	Διότι και τα 5 ψηφία που δόθηκαν μπορούν να είναι στη 2η θέση	Διότι μόνο τα 3 από τα ψηφία που δόθηκαν μπορούν να είναι στην 3η θέση	

(β)

3ο ψηφίο	1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	ΘΑΑ
3	4	3	$3 \cdot 4 \cdot 3=36$
Διότι 3 από τα ψηφία είναι περιττοί	Διότι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ψηφίο που επιλέξαμε στην προηγούμενη φάση	Διότι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθούν τα ψηφία που επιλέξαμε στις προηγούμενες φάσεις	

Β΄ τρόπος

	1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	ΘΑΑ
άρτ.–άρτ.–περιτ.	2	1	3	6
άρτ.–περιτ.–περιτ.	2	3	2	12
περιτ.–άρτ.–περιτ.	3	2	2	12
περιτ.–περιτ.–περιτ.	3	2	1	6
			Σύνολο	36

Προσθετική Αρχή Απαρίθμησης

Το πλήθος n των στοιχείων ενός συνόλου που έχει διαμεριστεί σε m ξένες μεταξύ τους κατηγορίες, ισούται με :

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$$

όπου n_k , $(k = 1, 2, \ldots, m)$, το πλήθος στοιχείων στην k κατηγορία.

Ασκήσεις

- Πόσα χρήματα στοιχίζει ένα σύστημα στο ΠΡΟΠΟ με μία τριπλή και τρεις διπλές παραλλαγές (και οι υπόλοιποι αγώνες στάνταρ); **24α**
- Πόσα μονοπάτια μήκους 3 υπάρχουν σε ένα μοναδιαίο κύβο, που να συνδέουν μια κορυφή του με αυτήν που βρίσκεται διαγωνίως απέναντι; **6**
- Η αίθουσα ενός κινηματογράφου έχει 6 πόρτες. Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να μπει από μια πόρτα και να βγει από άλλη; **30**
- Πόσοι ακέραιοι μεγαλύτεροι από 53000 έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά και κανένα από τα ψηφία του δεν είναι 8 ή 9; **2160**
- Αν υπολογιστεί το 52! πόσα διαδοχικά μηδενικά θα εμφανιστούν στο τέλος του αποτελέσματος; **12**
- Μία βιβλιοθήκη έχει 50 000 βιβλία που πρόκειται να μηχανογραφηθούν. Ο βιβλιοθηκάριος σκέφθηκε να δώσει σε κάθε βιβλίο έναν κωδικό που να αποτελείται από 2 γράμματα και τρία ψηφία. Υπάρχουν αρκετοί κωδικοί ώστε να κωδικοποιηθούν όλα τα βιβλία με διαφορετικούς κωδικούς; **ΝΑΙ**
- Παίρνουμε τυχαία τρία από τα γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου. Πόσες είναι οι διαφορετικές τριάδες στις οποίες δεν εμφανίζονται διαδοχικά γράμματα; **1540**
- Πόσοι ακέραιοι μικρότεροι από 1 000 000, περιέχουν το ψηφίο 2; **468559**

Μεταθέσεις

Μεταθέσεις n διαφορετικών αντικειμένων ονομάζονται οι διάφο-ροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τα τοποθετήσουμε το ένα μετά το άλλο σε μία σειρά επάνω σε μία ευθεία γραμμή. Το πλήθος τους συμβολίζεται με M_n .

Αν τοποθετηθούν σε κύκλο αντί σε ευθεία λέγονται κυκλικές μεταθέσεις και το πλήθος τους συμβολίζεται με K_n .

Αν k_1 από τα n αντικείμενα είναι όμοια, k_2 είναι όμοια και διαφο-ρετικά από τα προηγούμενα, …., k_λ όμοια και διαφορετικά απ' όλα τα προηγούμενα, όπου $k_1+k_2+\ldots+k_\lambda=n$, τότε έχουμε επαναληπτι-κές μεταθέσεις και το πλήθος τους συμβολίζεται με $M_n^{k_1,k_2,\ldots,k_\lambda}$

Ισχύει:

$$M_n = n!\,,\quad K_n = (n-1)!\,,\quad M_n^{k_1,k_2,\ldots,k_\lambda} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_\lambda!}$$

Απόδειξη

n=1 α
$M_1=1$

n=2 α β , β α
$M_2=2$

n=3 γ α β, α γ β, α β γ
$M_3=6$ γ β α, β γ α, β α γ

Επαγωγικά.
Διότι, από μετάθεση των n αντικειμένων, προκύπτουν (n+1) μεταθέσεις των n+1 αντικειμένων

Με ΘΑΑ

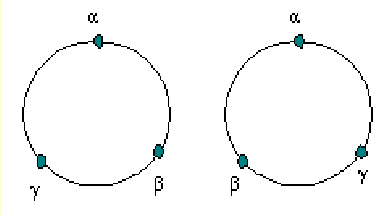
1η θέση	2η θέση	3η θέση	…	(n-1)-στή θέση	n-στή θέση	ΘΑΑ
n	n-1	n-2	…	2	1	$1\cdot2\cdot3\cdots\cdot n$

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Μουσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Κυκλικές Μεταθέσεις

Διαιρούμε με n τις απλές



α β γ, β γ α, γ α β ίδια κυκλική

α γ β, γ β α, β α γ ίδια κυκλική

Επαναληπτικές Μεταθέσεις

$$\underbrace{\alpha_1,\alpha_1,\ldots,\alpha_1}_{k_1\ \alpha\nu\tau\iota\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\alpha},\underbrace{\alpha_2,\alpha_2,\ldots,\alpha_2}_{k_2\ \alpha\nu\tau\iota\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\alpha},\ldots,\underbrace{\alpha_\lambda,\alpha_\lambda,\ldots,\alpha_\lambda}_{k_\lambda\ \alpha\nu\tau\iota\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\alpha}$$

$k_1!$ $k_2!$ $k_\lambda!$

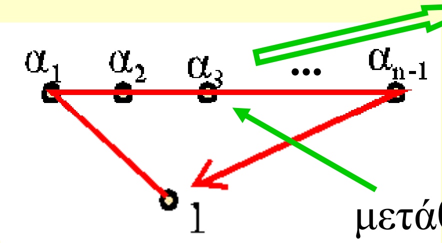
όλες n!

Μουσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Το πρόβλημα του περιοδεύοντα πωλητή

6. Ένας περιοδεύων πωλητής πρόκειται να επισκεφθεί n πόλεις για δειγματισμό. Υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε σειρά επίσκεψης των πόλεων είναι εφικτή με διαφορετικό βέβαια κόστος. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να γίνει η επίσκεψη των n πόλεων όταν ο πωλητής μένει σε μία από αυτές; Ποιο το ελάχιστο κόστος της επίσκεψης, όταν είναι γνωστό το κόστος c_{ij} μεταξύ των πόλεων i και j;

(n-1)! $\Longrightarrow$ NP-complete πρόβλημα



μετάθεση των 2, 3, 4, …, n

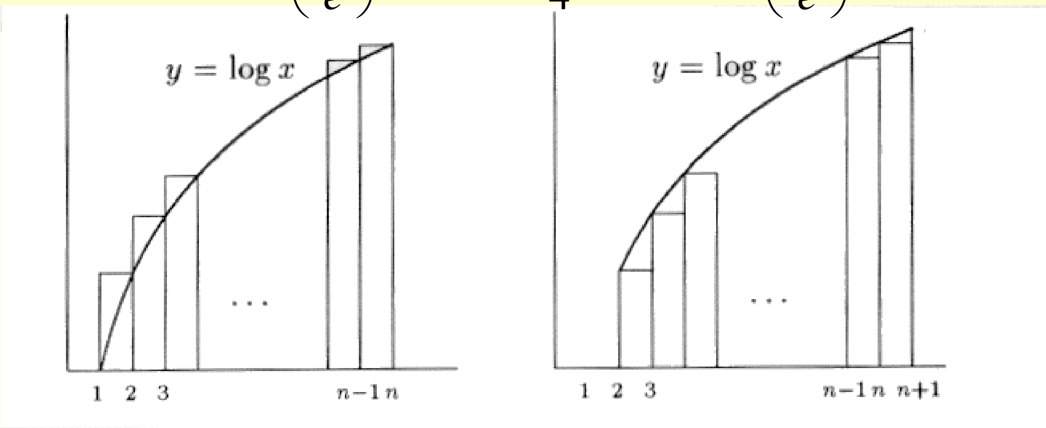
Για n=26, $(n-1)!=1.55\cdot 10^{25}$

Η/Υ με ένα δισεκατομμύριο πράξεις το δευτερόλεπτο, χρειάζεται σχεδόν μισό δισεκατομμύριο χρόνια για να κάνει κάνει 25! πράξεις.

Τύπος Stirling

Προσεγγιστικός υπολογισμός $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Θεώρημα $$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le \frac{1}{4}(n+1)e^2\left(\frac{n}{e}\right)^n$$



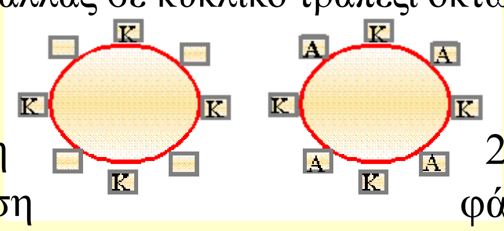
$$\int_1^n \ln x\,dx \le \sum_{i=2}^{n} \ln i \le \int_2^{n+1} \ln x\,dx$$

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Παραδείγματα

7. Με πόσους τρόπους 4 αγόρια και 4 κορίτσια μπορούν να καθίσουν (1) εναλλάξ σε κυκλικό τραπέζι οκτώ θέσεων; (2) εναλλάξ σε «ουρά»;

(1)



1η φάση 2η φάση

Με ΘΑΑ
3!·4!=144 τρόποι

(2) Α Κ Α Κ Α Κ Α Κ 4!·4!
Κ Α Κ Α Κ Α Κ Α 4!·4!

Με ΘΑΑ
2·4!·4!=1152 τρόποι

8. Πόσες λέξεις, έστω και χωρίς νόημα, σχηματίζονται με τις διάφορες αναδιατάξεις των γραμμάτων της λέξης ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ;

Τ Τ Τ Τ Α Α Υ Ο Η $$M_9^{4,2,1,1,1} = \frac{9!}{4!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 7560$$

Μουσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Ασκήσεις

- Να υπολογισθεί το πλήθος των τρόπων που n ανδρόγυνα μπορούν να καθίσουν σε (α) ευθύγραμμο ή (β) σε κυκλικό τραπέζι, έτσι ώστε σε k συγκεκριμένα ανδρόγυνα οι σύζυγοι να κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο.

k ζευγάρια που είναι μαζί				n-k άνδρες				n-k γυναίκες			
(α, γ)	**(α, γ)**	**…**	**(α, γ)**	**α**	**α**	**…**	**α**	**γ**	**γ**	**…**	**γ**

$2^k\,(2n-k)!$
$2^k\,(2n-k-1)!$.

- Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε σε σειρά έξι άτομα Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ, έτσι ώστε
  - α) ο Β να μην προηγείται του Ζ, 360
  - β) ο Β να είναι ακριβώς μπροστά από τον Ζ, 120
  - γ) ο Ζ να είναι ακριβώς μπροστά από τον Β, 120
  - δ) ο Β και ο Ζ να είναι μαζί; 240
- Κατά πόσους τρόπους μπορούν να μπουν σε ένα ράφι 3 βιβλία Γαλλικά, 5 Ελληνικά και 6 Γερμανικά αν α) είναι διαφορετικών συγγραφέων β) τα βιβλία κάθε γλώσσας είναι του ίδιου συγγραφέα; 14!=87.178.291.200, 14!/(3!5!6!)=168.168
- Πόσες είναι οι 9-ψήφιες δυαδικές ψηφιολέξεις (με ψηφία 0 και 1), που έχουν 4 μηδενικά και 5 μονάδες; 9!/(4!5!)=126

  Πόσες από αυτές αρχίζουν από 1 και τελειώνουν σε 0; 7!/(3!4!)=35

Μουσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Διατάξεις - Συνδυασμοί

Διατάξεις n αντικειμένων ανά k, (k≤n), ονομάζονται οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε τα k από τα n αντικείμενα και να τα τοποθετήσουμε το ένα μετά το άλλο σε μία γραμμή, διατηρώντας τη σειρά επιλογής τους.
Το πλήθος των διατάξεων των n ανά k συμβολίζεται με Δ_n^k.
Αν επιτρέπεται επανάληψη των ψηφίων τότε έχουμε επαναληπτικές διατάξεις και το πλήθος τους συμβολίζεται με A_n^k.
Αν δεν ενδιαφέρει η σειρά των k αντικειμένων που επιλέξαμε από τα n, τότε έχουμε αντίστοιχα συνδυασμούς των n ανά k, που πλήθος τους συμβολίζεται $\binom{n}{k}$ ή C_n^k και επαναληπτικούς συνδυασμούς των n ανά k που πλήθος τους συμβολίζεται $\mathcal{E}_n^k$.

Ισχύει:

$\Delta_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$,	$A_n^k = n^k$,	$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$,	$\mathcal{E}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$

Απόδειξη

Για τις διατάξεις

	1η θέση	2η θέση	3η θέση	…	(k-1)-στή θέση	k-στή θέση	ΘΑΑ
απλές	n	n-1	n-2	…	n-(k-2)	n-(k-1)	$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$
επαναληπτ.	n	n	n		n	n	n^k

Για τους συνδυασμούς

Από κάθε συνδυασμό n ανά k προκύπτουν k! διατάξεις n ανά k. Άρα: $\binom{n}{k}\cdot k! = \Delta_n^k$

Β΄ Τρόπος: Με τη μέθοδο της *διπλής απαρίθμησης*

Αν ένα σύνολο απαριθμηθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους, τα δύο αποτελέσματα οφείλουν να είναι ίσα.

Μουσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Πρόβλημα: Προεδρευομένη επιτροπή.

Έστω ότι έχουμε n άτομα και ότι θέλουμε να σχηματίσουμε επιτροπή με k από τα άτομα αυτά, ένα από τα οποία θα είναι πρόεδρος. Υπάρχουν δύο μέθοδοι:

Α΄ Μέθοδος: Να διαλέξουμε πρώτα την επιτροπή και στη συνέχεια να διαλέξουμε τον πρόεδρό της.

Β΄ Μέθοδος: Να διαλέξουμε πρώτα τον πρόεδρο της επιτροπής και στη συνέχεια να τον πλαισιώσουμε με την υπόλοιπη επιτροπή.

μέθοδος	1η φάση	2η φάση	ΘΑΑ
A	$\binom{n}{k}$	k	$\binom{n}{k}\cdot k$
B	n	$\binom{n-1}{k-1}$	$n\cdot\binom{n-1}{k-1}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}, \Rightarrow \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{k-1}\cdot\binom{n-2}{k-2}, \Rightarrow \binom{n-2}{k-2} = \frac{n-2}{k-2}\cdot\binom{n-3}{k-3}, \ldots$$

$$\boxed{\ldots \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{1}}$$

Για τους επαναληπτικούς συνδυασμούς

Γράφουμε πρώτον τους συνδυασμούς με αύξουσα φυσική σειρά, π.χ. αν **n=4, k=5**, α β β γ γ, β β β γ δ, α β γ δ δ

Χωρίζουμε με (n-1) κάθετες γραμμές τα n διαφορετικά γράμματα, π.χ.

α | β β | γ γ | , | β β β | γ | δ, α | β | γ | δ δ

Αντικαθιστούμε τα k γράμματα με αστεράκια (*), π.χ.

* | * * | * * | , | * * * | * | * , * | * | * | * *

n-1 κάθετες

k αστεράκια

Η αντιστοίχηση είναι 1-1, άρα υπάρχουν ενγένει $\dfrac{(n-1+k)!}{k!\cdot(n-1)!}$ διαφορετικοί επαναληπτικοί συνδυασμοί.

Β΄ τρόπος

α β γ δ ….

1 2 3 4 ….

$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ επαν.συνδ.

$1 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le ... \le \alpha_k \le n$ $\quad$ $\mathbf{1 \le \beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_k \le n+k-1}$

Ορίζουμε

$\beta_1 = \alpha_1 + 0,\ \beta_2 = \alpha_2 + 1, ..., \beta_k = \alpha_k + k-1$

$$\mathcal{E}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Λύσεις διοφαντικών εξισώσεων

Συμβολίζοντας x_1 το πλήθος των α, x_2 το πλήθος των β, …, x_n το πλήθος των εμφανίσεων του τελευταίου γράμματος, τότε θα είναι $x_1+x_2+...+x_n=k$. Οι διάφοροι επαναληπτικοί συνδυασμοί αντιστοιχούν σε διαφορετικές λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης. Ώστε:

Πόρισμα. Οι μη-αρνητικές λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k \qquad \text{είναι} \qquad \mathcal{E}_n^k = \binom{n+k-1}{n-1}$$

(1) Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί με διαφορετικά ψηφία σχηματίζονται με τα ψηφία {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; (2) Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι; (3) Ποιες οι απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα αν επιτρέπεται επανάληψη;

(1) $\Delta_7^4 - \Delta_6^3 = \dfrac{7!}{(7-4)!} - \dfrac{6!}{(6-3)!} = 720$ $\qquad$ (3) $A_7^4 - A_6^3 = 7^4 - 7^3 = 2058$

(2) $3(\Delta_6^3 - \Delta_5^2) + \Delta_6^3 = 420$ $\qquad$ $4(A_7^3 - A_7^2) = 1176$

Παραδείγματα

Να βρεθεί το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία.

Έστω S={α, β, γ}. Το **{β}** ή το **{β, γ}** είναι υποσύνολα.
Συμβολίζω εναλλακτικά **{□, □, □}** και **{□, □, □}**

Η αντιστοίχηση είναι 1-1, άρα τα πλήθη ταυτίζονται.
Όμως ο δεύτερος συμβολισμός είναι διάταξη με επανάληψη των δύο αντικειμένων (□,□), ανά n. Άρα, υπάρχουν 2^n υποσύνολα.

Εφαρμογή.
Πιτσαρία διαφημίζει ότι προσφέρει > 500 είδη πίτσας. Η πίτσα μπορεί να περιέχει ή όχι οσαδήποτε από τα είδη:ζαμπόν, μπέϊκον, σαλάμι, αντσούγιες, παστουρμά, μανιτάρια, πιπεριές, σάλτσα, ελιές. Είναι σωστή η διαφήμηση;

ΝΑΙ διότι $2^9=512>500$

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Παραδείγματα

Πενταμελής επιτροπή εκλέγεται από σύνολο τεσσάρων καθηγητών και 80 φοιτητών. Με πόσους τρόπους μπορεί να εκλεγεί η επιτροπή αν πρέπει να περιέχει: α) 2 καθηγητές και 3 φοιτητές; β)τουλάχιστον 2 καθηγητές;

(α) Με ΘΑΑ: $$\binom{4}{2}\cdot\binom{30}{3} = 6\cdot\frac{30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3} = 24360$$

(β) Με ΠΑΑ και ΘΑΑ: $$\binom{4}{2}\cdot\binom{30}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{30}{2}+\binom{4}{4}\cdot\binom{30}{1} = 24360+1740+30 = 26130$$

Έχουμε 10 καραμέλες τις οποίες θέλουμε να μοιράσουμε σε τρία παιδιά. Χρησιμοποιούμε 3 διαφορετικά κουτιά που χωρούν μέχρι και όλες τις καραμέλες, και τις μοιράζω τυχαία σ' αυτά. (1) Πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν; (2) Σε πόσους κάθε παιδί παίρνει μία τουλάχιστον καραμέλα;

(1) Υπάρχουν $\mathcal{E}_{10}^{3} = \binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3} = 220$ τρόποι.

διότι: $\boxed{x_1}$ $\boxed{x_2}$ $\boxed{x_3}$ και $x_1+x_2+x_3=10$, x_i□0

(2) Αρκεί να μοιράσουμε τις 7 καραμέλες, άρα: $\mathcal{E}_{7}^{3} = \binom{7+3-1}{3} = \binom{9}{3} = 84$ τρόποι.

Ασκήσεις

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε πέντε χαρτιά από μία τράπουλα σε έναν παίκτη (α) όταν τα μοιράζουμε ένα-ένα ή (β) όταν η σειρά τους δεν μας ενδιαφέρει; $(\Delta_{52}^{5} = \frac{52!}{47!} = 311875200, \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\cdot 47!} = 2598960)$
- Πόσες διαφορετικές απεικονίσεις από ένα σύνολο X={x_1, x_2,…, x_k} εντός ενός συνόλου Y={y_1, y_2,…, y_n} , με n>k, υπάρχουν όταν δεν επιτρέπεται διαφορετικά πρότυπα να έχουν ίσες εικόνες; Πόσες αν δεν υπάρχει περιορισμός; (Δ_n^k , n^k)
- Ένα υποσύνολο k στοιχείων κάποιου συνόλου S, λέγεται k-υποσύνολο. Πόσα k-υποσύνολα του S υπάρχουν, αν το S έχει n στοιχεία. Χρησιμοποιώντας το συμπέρασμα αυτό και τη διπλή απαρίθμηση δείξτε τη σχέση:
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$
- Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα 10, αντιστοιχίστε αριθμούς στα υποσύνολα του S={α,β,γ} ώστε να τα αριθμήσετε, με τρόπο όμως που να γενικεύεται έτσι ώστε γνωρίζοντας τον αριθμό να καθορίζουμε το υποσύνολο. Γενικεύστε.
(□□000, {α} □100, {β} □010, {γ} □001, {α,β} □110, {α,γ} □101, {β,γ} □011, S□111, όπου οι αριθμοί είναι στο δυαδικό σύστημα)

Ασκήσεις (συνέχεια)

- Κατά πόσους τρόπους 7 άντρες μπορούν να επιλεγούν από 12, έτσι ώστε δύο συγκεκριμένοι απ' αυτούς να μην είναι ποτέ μαζί; Να γίνει γενίκευση (n αντί του 12 και k αντί του 7). $(540, \binom{n}{k}-\binom{n-2}{k-2})$
- Δίνονται n ευθείες που τέμνονται ανά δύο σε διαφορετικά σημεία. Πόσα τρίγωνα σχηματίζονται με κορυφές τα σημεία τομής; $(\binom{\binom{n}{2}}{3}-n\binom{n-1}{3})$
- Αυτοκίνητο σταθμεύει σε ένα δρόμο, στον οποίο υπάρχουν (εκείνη τη στιγμή) άλλες 10 θέσεις ελεύθερες, έτσι ώστε οι δύο θέσεις μπροστά και πίσω από το αυτοκίνητο να είναι ελεύθερες. Αν υποθέσουμε ότι οι θέσεις καλύπτονται τυχαία, ποια η πιθανότητα όταν επιστρέψει να είναι πάλι οι δύο θέσεις μπροστά και πίσω από το αυτοκίνητο, αν τη στιγμή της επιστροφής υπάρχουν 4 άδειες θέσεις; $(p=\binom{8}{6}/\binom{10}{6}=0.1333...)$

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

ΔΙΩΝΥΜΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ
και
ΑΛΛΕΣ ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Μωυσιάδης Χρόνης
Η΄ Εξάμηνο Μαθηματικών

Διωνυμικοί συντελεστές

Ισχύουν: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Με όσους τρόπους επιλέγουμε k από n, με ακριβώς τόσους δεν-επιλέγουμε τα n-k από τα n.

$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}\}$
Επιλέγοντας k+1 έχουμε ακριβώς δύο δυνατότητες:
α) ω_{n+1} επιλέγεται
(Τα k θα είναι από τα n) $\binom{n}{k}$
β) ω_{n+1} δεν επιλέγεται
(Τα k+1 θα είναι από τα n) $\binom{n}{k+1}$

Διώνυμο Νεύτωνα

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$$

$$(\alpha+\beta)^n = \underbrace{(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)\cdot\ldots\cdot(\alpha+\beta)}_{n\ \text{όροι}}$$

από k επιλέγουμε α, από τα υπόλοιπα β

το k είναι από 0 έως n

Ιδιότητες διωνυμικών συντελεστών

Το διώνυμο του Νεύτωνα για α=x, β=1 γράφεται:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n \qquad (\ast)$$

Η ($\ast$) για x=1 και x=-1, δίνει:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots = 2^{n-1}$$

Παραγωγίζοντας την ($\ast$) μία (ή r φορές), για x=1 έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = \binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

$$\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}\binom{n}{k} = \binom{n}{r}+\binom{r+1}{r}\binom{n}{r+1}+\ldots+\binom{n}{r}\binom{n}{n} = \binom{n}{r}2^{n-r}$$

Γενικευμένοι διωνυμικοί συντελεστές

Θέτοντας: $\binom{t}{k} = \dfrac{t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-k+1)}{k!}$ έχουμε:

$$(1+x)^t = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{t}{k}x^k$$

Ανάπτυγμα Mac-Laurin

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

αρνητικό διώνυμο

$$\binom{-n}{k}(-1)^k = (-1)^k\frac{-n\cdot(-n-1)\cdot\ldots\cdot(-n-k+1)}{k!} = \ldots = \binom{n+k-1}{k}$$

Ισχύει: $\boxed{\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}}$

«υπεργεωμετρική κατανομή»

n=m=r

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

Απόδειξη $(1+x)^n\cdot(1+x)^m \equiv (1+x)^{n+m}$

ίσοι συντελεστές ομοβάθμιων όρων

Ιδιότητες επαναληπτικών συνδυασμών

Αν $\mathcal{E}_n^{\,k} = \binom{n+k-1}{k}$ ισχύει

$$\mathcal{E}_{n+1}^{\,k+1} = \mathcal{E}_n^{\,k+1} + \mathcal{E}_{n+1}^{\,k}$$ τριγωνική αναγωγική ιδιότητα

ή $$\binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k}{k+1} + \binom{n+k}{k}$$

Απόδειξη

1) αλγεβρικά
2) με τριγωνική Pascal
3) με διπλή απαρίθμηση

$\{\omega_1, \omega_2, \ \dots, \omega_n, \omega_{n+1}\}$
Επιλέγοντας k+1 έχουμε ακριβώς δύο δυνατότητες:

α) ω_{n+1} επιλέγεται
(Τα k θα είναι από τα n+1 διότι επιτρέπεται επανάλ.) $\quad \mathcal{E}_{n+1}^{\,k}$

β) ω_{n+1} δεν επιλέγεται
(Τα k+1 θα είναι από τα n) $\quad \mathcal{E}_n^{\,k+1}$

Ιδιότητες επαναληπτικών συνδυασμών

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

$$\sum_{k=0}^{r} \mathcal{E}_n^{\,k} \cdot \mathcal{E}_m^{\,r-k} = \mathcal{E}_{n+m}^{\,r}$$

ή $$\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k-1}{k} \cdot \binom{m+r-k-1}{r-k} = \binom{n+m+r-1}{r}$$

Απόδειξη

Η διοφαντική εξίσωση

$$\boxed{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_{n+m} = r}$$

Έχει πλήθος λύσεων $\mathcal{E}_{n+m}^{\,r}$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \qquad \mathcal{E}_n^{\,k}$$

$$x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots x_{n+m} = r-k \qquad \mathcal{E}_m^{\,r-k}$$

k=0, 1, …, r

για m=1 $$\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+r}{r}$$

Αρχή Συμπερίληψης - Εξαίρεσης (ΑΣΕ)

Έστω N άτομα και

n ιδιότητες $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ που χαρακτηρίζουν τα N άτομα

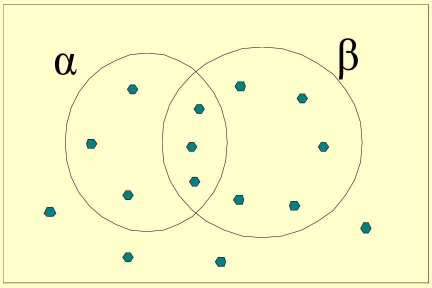
Συμβολίζουμε

$N(\alpha_k)$ πλήθος ατόμων που έχουν την ιδιότητα α_k

$N(\alpha'_k)$ πλήθος ατόμων που δεν έχουν την ιδιότητα α_k

Γενικά

$N(\alpha_1\alpha_2 \ldots \beta'_1\beta'_2 \ldots)$ πλήθος ατόμων που έχουν τις ιδιότητες α_1, α_2, … και δεν έχουν τις ιδιότητες β_1, β_2, …



Για n=2 βρίσκουμε

$$\boxed{\begin{aligned} N(\alpha'_1\,\alpha'_2) &= N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_2) = \\ &= 15 - 8 - 6 + 3 = 4 \end{aligned}}$$

Θεώρημα (ΑΣΕ)

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

$$\begin{aligned} N(\alpha_1 \text{ ή } \alpha_2 \text{ ή } \ldots \text{ ή } \alpha_n) &= \sum N(\alpha_i) - \sum N(\alpha_i\alpha_j) + \ldots + \\ &+ (-1)^{s+1} \sum N(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_s}) \pm \ldots + (-1)^{n+1} N(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{N(\alpha_1 \text{ ή } \alpha_2 \text{ ή} \ldots \text{ή } \alpha_n) + N(\alpha'_1\,\alpha'_2\,\ldots\,\alpha'_n) = N}$$

Αν A_k το σύνολο των ατόμων που έχουν την ιδιότητα α_k και $|A_k|$ συμβολίζει τον πληθικό αριθμό του συνόλου A_k , τότε η ΑΣΕ γράφεται επίσης :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n+1} S_n$$

όπου:

$$S_k = \sum_{1 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_k \le n} |A_{t_1} \cap A_{t_2} \cap \ldots \cap A_{t_n}|, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

που δείχνεται επαγωγικά

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Απόδειξη (συνδυαστική)

$$\boxed{N(\alpha_1 \text{ ή } \alpha_2 \text{ ή} \ldots \text{ή } \alpha_n) = \sum N(\alpha_i) - \sum N(\alpha_i\alpha_j) + \sum N(\alpha_i\alpha_j\alpha_k) - \ldots}$$

Θα δείξουμε ότι κάθε άτομο που έχει τουλάχιστον μία ιδιότητα προσφέρει ακριβώς μία 1-δα στο άθροισμα του β΄μέλους, ενώ είναι προφανές ότι προσφέρει μία 1-δα στο α΄μέλος.

Έστω ότι το x έχει ακριβώς k, (k=1 έως n), από τις ιδιότητες. Τότε:

Το x προσφέρει $\binom{k}{1}$ μονάδες στο $\sum N(\alpha_i)$

Το x προσφέρει $\binom{k}{2}$ μονάδες στο $\sum N(\alpha_i\alpha_j)$

....

Το x προσφέρει $\binom{k}{k}$ μονάδες στο $\sum N(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_s})$

Τελικά το x προσφέρει μονάδες στο (∗)

$$\boxed{\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} + 0 + 0 + \ldots + 0}$$

που είναι πάντα 1. (Διώνυμο Νεύτωνα για a = -b = 1).

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

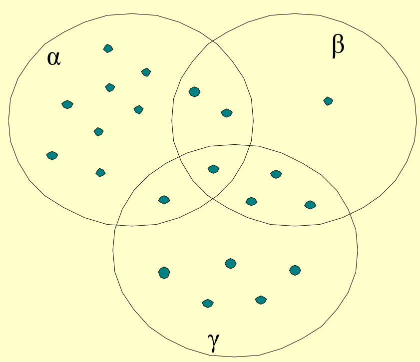
Εφαρμογή

Από τους μουσικούς μιας ορχήστρας οι 12 παίζουν έγχορδο όργανο, 7 παίζουν πνευστό και 10 παίζουν κρουστό. Γνωρίζουμε επίσης ότι τρεις παίζουν και έγχορδο και πνευστό, τέσσερις παίζουν και πνευστό και κρουστό όργανο, 2 παίζουν έγχορδο και κρουστό ενώ υπάρχει ένας που παίζει και τα τρία είδη οργάνων. Πόσοι είναι οι μουσικοί;

α	έγχορδο
β	πνευστό
γ	κρουστό

N; N(α)=12, N(β)=7, N(γ)=10, N(αβ)=3,
N(αγ)=2, N(βγ)=4, N(αβγ)=1.

$$\boxed{\begin{aligned} N = N(\alpha \text{ ή } \beta \text{ ή } \gamma) &= N(\alpha) + N(\beta) + N(\gamma) - \\ &- N(\alpha\beta) - N(\alpha\gamma) - N(\beta\gamma) + N(\alpha\beta\gamma) \end{aligned}}$$



$\Rightarrow$ **N=21**

Κόσκινο του Ερατοσθένη

Πόσοι από τους n=70 αριθμούς, δεν διαιρούνται ούτε με 2 ούτε με 3 ούτε με 11

1	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
~~11~~	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~

1		5	7	
	13		17	19
	23	25		29
31		35	37	
41	43		47	49
	53			59
61		65	67	

α πολ.(2)
β πολ.(3)
γ πολ.(11)

$$N(\alpha'\beta'\gamma') = N - N(\alpha) - N(\beta) - N(\gamma) + N(\alpha\beta) + N(\alpha\gamma) + N(\beta\gamma) - N(\alpha\beta\gamma) = 70 - 35 - 23 - 6 + 11 + 3 + 2 - 1 = \mathbf{21}$$

Γενίκευση
Συνάρτηση Euler

$$n = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \cdots p_r^{\pi_r}$$

φ(n): μικρότεροι του n πρώτοι προς τον n

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

Νόμος Ολικών Πιθανοτήτων

Αν $A_1, A_2, A_3, \ldots$ είναι γεγονότα, τότε

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \ldots$$

Ισοδύναμη με ΑΣΕ αν ο πιθανοχώρος είναι πεπερασμένος και εφαρμόσουμε τον κλασικό ορισμό $P(A)=N_A/N$

Τα γράμματα Δ, Γ, Υ, Ε, Σ, Ω, τοποθετούνται τυχαία σε σειρά. Ποια η πιθανότητα να μην εμφανιστούν οι λέξεις ΕΓΩ και ΣΥ;

Α εμφανίζ. ΕΓΩ
Β εμφανίζ. ΣΥ

$$P(A'B') = \frac{N_{A'B'}}{N} = \frac{N - N_A - N_B + N_{AB}}{N} = \frac{6! - 4! - 5! + 3!}{6!} = \frac{582}{720} = 0.808$$

Διαταράξεις

Έτσι λέγονται οι αναδιατάξεις ενός διατεταγμένου συνόλου που δεν αφήνουν κανένα στοιχείο στην αρχική του θέση. Συμβολίζουμε D_n το πλήθος των διαταράξεων συνόλου n στοιχείων, τότε ισχύει:

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Απόδειξη

Έστω, $(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$ μία από τις N=n! μεταθέσεις της n-άδας (1,2,...,n).
Συμβολίζουμε α_i την ιδιότητα ότι στη μετάθεση αυτή το μ_i είναι i, i=1,2,...n.
Εφαρμόζουμε ΑΣΕ.

$$D_n = N(\alpha_1' \, \alpha_2' \ldots \alpha_n') = N - \sum N(\alpha_i) + \sum N(\alpha_i \alpha_j) - \ldots =$$
$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots$$

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Β΄ τρόπος (με διπλή απαρίθμηση)

1	2	...	k	...	n
k			;		

Το k επιτρέπεται να πάρει μία από τις (n-1) τιμές 2, …,n

Για k δοθέν. Στο κελί με το ; τοποθετείται

(1) το 1, ή (2) Διάφορο του 1

D_{n-2} + D_{n-1}

Άρα ισχύει ο αναδρομικός τύπος $\boxed{D_n = (n-1)\left(D_{n-1} + D_{n-2}\right)}$

Θέτουμε

$$d_n = D_n - nD_{n-1}$$
$$\Rightarrow d_n = -d_{n-1}$$
$$\Rightarrow d_n = (-1)^n$$

$$\boxed{D_n = n\,D_{n-1} + (-1)^n}$$

που δίνει και πάλι τον προηγούμενο τύπο όπως θα δείξουμε παρακάτω

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Ασκήσεις

- Καθηγητής δίνει την πρώτη μέρα 5 ασκήσεις (από μία) σε 5 μαθητές του. Με πόσους τρόπους θα δώσει τη δεύτερη μέρα τις ίδιες ασκήσεις στους ίδιους μαθητές ώστε κανείς να μην έχει την ίδια που είχε πριν;

$D_5=44$

- Τα χαρτιά 1, 2, 3, 4, 5 είναι μπαστούνια και τα 6, 7, 8, 9 10 είναι κούπες. Ανακατεύουμε καλά και "ξεφυλίζουμε" (δηλαδή τα ανοίγουμε ένα-ένα στο τραπέζι) αριθμώντας τα χαρτιά. Με πόσους τρόπους δεν συμβαίνει καμία συνάντηση (δηλαδή το k-στό χαρτί να είναι το k) όταν επιπλέον θέλουμε κατά το ξεφύλισμα να περάσουν πρώτα όλα:
α. όλα τα μπαστούνια, β. όλες οι κούπες;

$(D_5)^2=1936$, $(5!)^2=14400$

- Πόσες από τις μεταθέσεις των αριθμών 1,2, ..., 11:
  α. αφήνουν κάθε άρτιο στη φυσική του θέση και κανένα περιττό στη θέση του
  β. αφήνουν όλους τους άρτιους σε άρτιες θέσεις, τους περιττούς σε περιττές θέσεις, αλλά κανέναν στη φυσική του θέση
  γ. ακριβώς τέσσερις αριθμούς στη θέση τους;

$D_6=265$, $D_6D_5=11660$

Αρχή Περιστερώνα (Pigeonhole principle)

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

n φωλιές περιστεριών και τουλάχιστον n+1 περιστέρια τότε υπάρχει τουλάχιστον μία φωλιά με 2 ή περισσότερα περιστέρια.
Γενίκευση.
n φωλιές περιστεριών και τουλάχιστον k·n+1 περιστέρια τότε υπάρχει τουλάχιστον μία φωλιά με k+1 ή περισσότερα περιστέρια.

Δείξτε ότι μεταξύ n+1 αριθμών τυχαία επιλεγμένων από τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, ..., 2n, υπάρχουν πάντοτε τουλάχιστον δύο, τέτοιοι ώστε ο ένας από αυτούς:

α) να είναι μεγαλύτερος του άλλου κατά n,
β) να είναι διαδοχικός του άλλου,
γ) να έχει με τον άλλο άθροισμα 2n+1,
δ) να διαιρεί τον άλλο.

πηλίκα διά της μεγαλ. δύναμης του 2 (περιστ.)

$\{1, n+1\}, \{2, n+2\}, ..., \{n, 2n\}$
n φωλιές

$1 \bmod 2n, 3 \bmod 2n, ..., (2n-1) \bmod 2n$
n φωλιές

Ασκήσεις

• Η Μαίρη πρόκειται να πάει διακοπές όπου θα παραμείνει και τις 90 μέρες του φετινού καλοκαιριού. Επειδή είναι εξαιρετικά οργανωτική, έχει αποφασίσει να ακολουθήσει αυστηρά το παρακάτω πρόγραμμα. Κάθε δύο μέρες θα πηγαίνει για μπάνιο, κάθε τρεις θα πλένει και θα καθαρίζει και κάθε πέντε θα διαβάζει. Την πρώτη μέρα των διακοπών έκανε και τα τρία και κουράστηκε πολύ. Πόσες από τις 90 μέρες θα είναι ευχάριστες (δηλ. θα έχει μόνο να πάει για μπάνιο); Πόσες θα είναι βαρετές (δηλ. δεν θα έχει να κάνει τίποτα);

24, 24

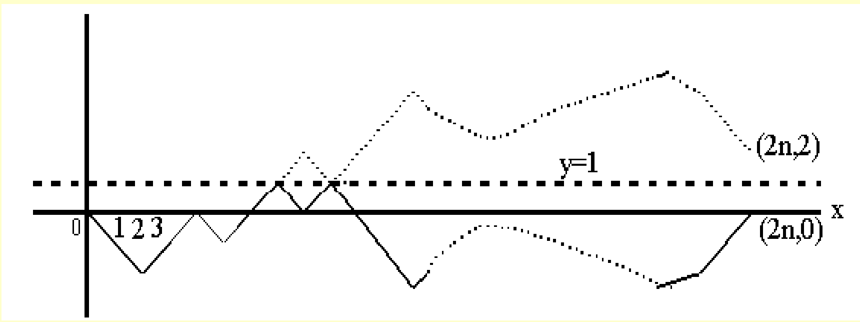
• Ο πληθυσμός μιας κωμόπολης είναι 15000 κάτοικοι. Αν κάθε κάτοικος έχει τρία αρχικά, δηλ. τα αρχικά γράμματα του ονόματός του, του επωνύμου του και του πατρωνύμου (ή του ονόματος του συζύγου για τις έγγαμες γυναίκες), να εξεταστεί αν είναι αλήθεια ότι υπάρχουν οπωσδήποτε δύο κάτοικοι με τα ίδια αρχικά.

• Να δείξετε ότι υπάρχει ακέραιος αριθμός που γράφεται μόνο με τα ψηφία 0 και 1, ο οποίος να διαιρείται με το 7.

(Πάρτε τους αριθμούς 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111. Από αυτούς είτε κάποιος διαιρείται με το 7, οπότε ισχύει το ζητούμενο, είτε αφήνουν μη-μηδενικό υπόλοιπο. Αν τα 6 μη-μηδενικά υπόλοιπα είναι οι «φωλιές» τότε από την αρχή του περιστερώνα, δύο τουλάχιστον αριθμοί είναι ισουπόλοιποι και επομένως η διαφορά τους έχει την απαιτούμενη δομή και διαιρείται με 7).

Αρχή Αντανάκλασης

Στο ταμείο ενός θεάτρου υπάρχει μια ουρά 2n ατόμων. Τα μισά άτομα έχουν μόνο χιλιάρικα ενώ τα άλλα μισά έχουν και από ένα 500-ρικο. Τα εισιτήρια κάνουν 2500 και 3500 δρχ. και στην αρχή ο ταμίας δεν έχει καθόλου ρέστα. Είναι φανερό ότι υπάρχουν $\binom{2n}{n}$ διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των ατόμων αυτών στην ουρά. Σε πόσους από τους τρόπους αυτούς υπάρχουν πάντα 500-ρικα στο ταμείο του θεάτρου ώστε να μην υπάρξει πρόβλημα;

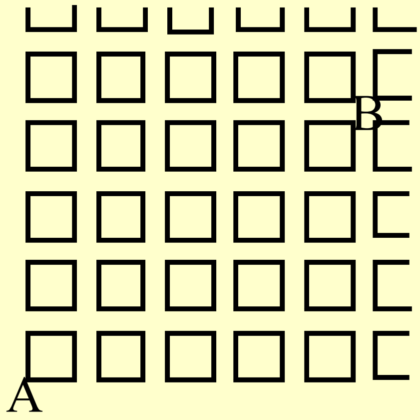


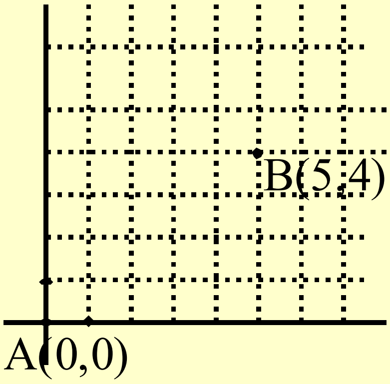
$$N_A = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Πιθανότητα να μην υπάρξει πρόβλημα 1/(n+1)

Κίνηση σε δικτύωμα

Ένας διαβάτης κινείται σε ένα δίκτυο οικοδομικών τετραγώνων (σχήμα), από το σημείο Α στο σημείο Β. Αν του επιτρέπεται να κινείται μόνο προς τα Ανατολικά ή προς τα Βόρεια, να βρεθεί πόσους διαφορετικούς δρόμους μπορεί να ακολουθήσει;





Συμβολίζοντας το δίκτυο των οικοδομικών τετραγώνων με το δικτύωμα του διπλανού σχήματος. Ονομάζουμε **βήμα** τη μετακίνηση σε μια πλευρά τετραγώνου λέγετα. Τότε $M(x_0+x,\ y_0+y)$ συμβολίζει σημείο που βρίσκεται x βήματα ανατολικά και y βήματα βόρεια, από το αρχικό σημείο Α $(x_0,\ y_0)$. Στο σχήμα το Β είναι 5 βήματα ανατολικά και 4 βήματα βόρεια από το Α.

Λύση

Έστω f(x,y) το πλήθος των διαφορετικών δρόμων από το $A(x_0,\ y_0)$ στο $M(x_0+x,\ y_0+y)$. Η f(x,y) ικανοποιεί την αναδρομική σχέση:

$$f(x+1,y+1) = f(x+1,y) + f(x,y+1),$$

διότι το τελευταίο βήμα στο $M(x_0+x,\ y_0+y)$ είναι

ή από $M(x_0+x-1,\ y_0+y)$, είτε από $M(x_0+x,\ y_0+y-1)$.

Συνδυαστική λύση (με χρήση διπλής απαρίθμησης):

Για να βρεθεί κάποιος από το σημείο Α $(x_0,\ y_0)$ στο σημείο $M(x_0+x,\ y_0+y)$ χρειάζεται να κάνει x+y διαδοχικά βήματα, κάποια προς τα ανατολικά (Α) και κάποια προς τα βόρεια (Β). Άρα, κάθε διαδρομή είναι μία διαδοχή από

x το πλήθος Α   και   y το πλήθος Β.

Επομένως το πλήθος των διαφορετικών δρόμων θα ισούται με το πλήθος των τοποθετήσεων x+y γραμμάτων, από τα οποία τα x είναι Α και τα y είναι Β, δηλ.:

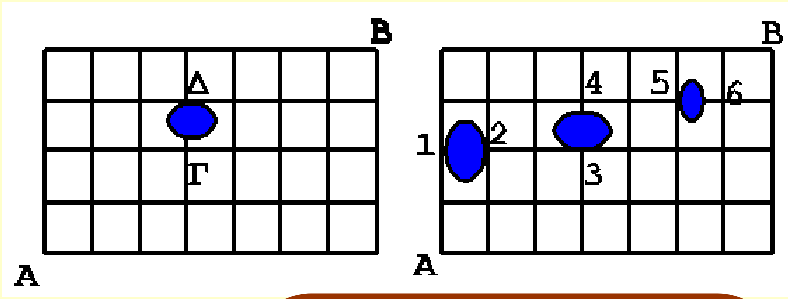
$$\boxed{f(x,y) = M_{x+y}^{x,y} = \frac{(x+y)!}{x!\,y!} = \binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y}}$$

Για το παράδειγμα

$$f(5,4) = \binom{9}{4} = 126$$

Πιο πολύπλοκο δικτύωμα

Στα σχήματα δίπλα υπάρχουν βήματα μη εφικτά, όπως μεταξύ των σημείων Γ, Δ στο πρώτο σχήμα, ή μεταξύ των σημείων 1,2 ή 3,4 ή 5,6 στο δεύτερο. Με πόσους τρόπους πάμε από το Α στο Β; Να δοθεί γενική λύση για το πρώτο σχήμα.



(1) Πρέπει από όλες τις διαδρομές που συνδέουν τα Α, Β, να αφαιρέσουμε όλες τις διαδρομές που περιέχουν το βήμα "ΓΔ". Αυτές οι τελευταίες αποτελούνται από τους συνδυασμούς των διαδρομών από το Α στο Γ, και αυτών από το Δ στο Β (πολλαπλασιαστική αρχή).

Λύση για Α(0, 0), Β(x, y), Γ(κ, λ), Δ(κ, λ+1),

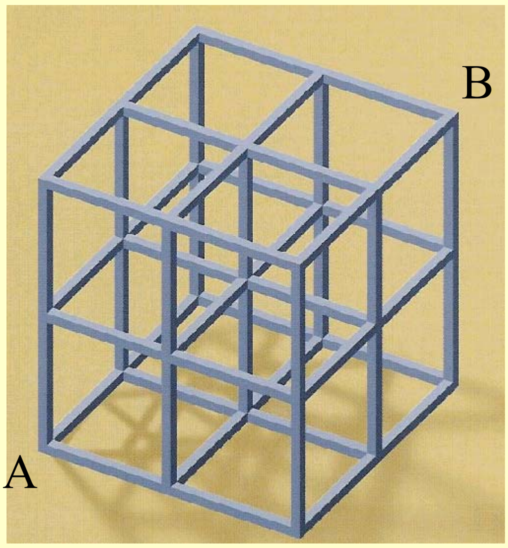
$$\binom{x+y}{x}-\binom{\kappa+\lambda}{\kappa}\cdot\binom{x+y-\kappa-\lambda-1}{x-\kappa}$$

Εδώ: $\binom{11}{7}-\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{4}=280$

(2) Στο δεύτερο σχήμα θέτουμε α την ιδιότητα «η διαδρομή δεν περιέχει το βήμα 12», και αντίστοιχα β και γ, για τις διαδρομές που δεν περιέχουν τα 34 ή 56. Το ζητούμενο ισοδυναμεί με το πλήθος N(α΄β΄γ΄) των διαδρομών που δεν ικανοποιούν καμία από τις τρεις ιδιότητες. Με ΑΣΕ βρίσκουμε 173 διαδρομές.

Ένα τριδιάστατο δικτύωμα

Στο διπλανό δικτύωμα ένα κινητό μπορεί να κινηθεί μόνο δεξιά ή πίσω ή άνω. Σε κάθε κόμβο μπορεί να αποφασίσει μία από τις εφικτές διαδρομές. Πόσες διαφορετικές διαδρομές υπάρχουν;



Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οποιαδήποτε διαδρομή από το Α στο Β θα περιέχει οπωσδήποτε δύο «βήματα» Δ(εξιά), δύο Π(ίσω) και δύο Ά(νω). Άρα θα είναι μια αναδιάταξη των 6 γραμμάτων

Δ Δ Π Π Α Α

και υπάρχουν

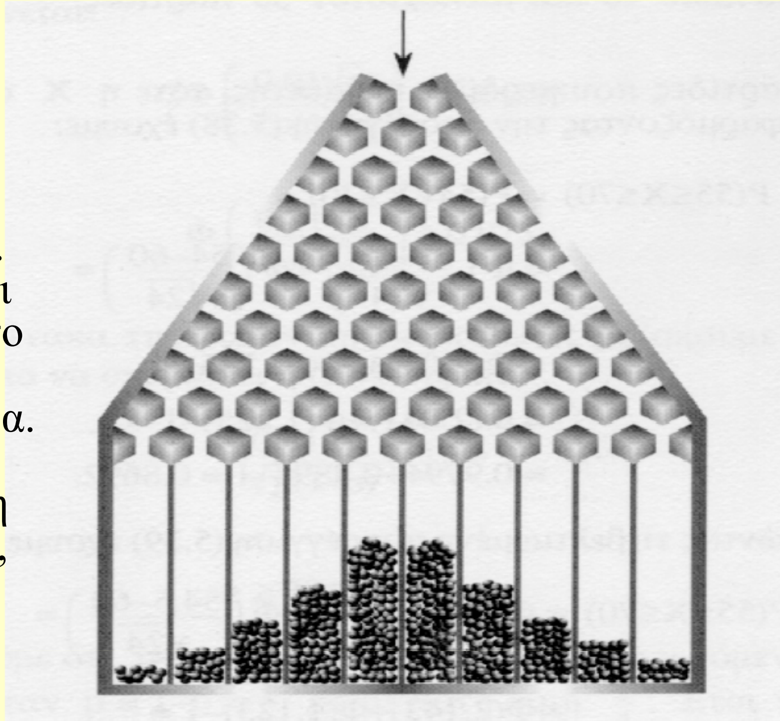
$$M_6^{2,2,2}=\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=90$$

διαφορετικές διαδρομές

Συσκευή Galton

Σχετική είναι η συσκευή του Galton που επαληθεύει το θεώρημα των De Moivre-Laplace (ειδική περίπτωση του Κ.Ο.Θ.)

Το διπλανό σχήμα παριστάνει τραπέζι με n οριζόντιες σειρές καρφιών έτσι ώστε: η k-στή σειρά να περιέχει k+1 καρφιά. Το τραπέζι είναι κεκλιμένο και μικρές μπίλιες με διάμετρο όσο το άνοιγμα των καρφιών αφήνονται να πέσουν ελεύθερα. Διαπιστώνεται ότι στην τελευταία σειρά εμφανίζεται η διωνυμική κατανομή B(n,1/2), που για μεγάλο n προσομοιάζεται με την κανονική κατανομή.



Ένας αλγόριθμος καταγραφής μεταθέσεων

Α Β Γ, Α Γ Β, Β Α Γ, Β Γ Α, Γ Α Β, Γ Β Α, ή
1 2 3, 1 3 2, 2 1 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1

Βήμα 1. Θέσατε π=1 2 3 ... n και καταγράψτε την π.

Βήμα 2. Αν $\pi=\pi_1\pi_2\pi_3...\pi_n$ και ισχύει $\pi_i > \pi_{i+1}$ για όλα τα i, σταματήστε (διότι η λίστα έχει ολοκληρωθεί).

Βήμα 3. Βρέστε το μεγαλύτερο i για το οποίο $\pi_i < \pi_{i+1}$.

Βήμα 4. Βρέστε το μικρότερο π_j για το οποίο $i < j$ και $\pi_i < \pi_j$.

Βήμα 5. Εναλλάξτε αμοιβαία τα π_i και π_j.

Βήμα 6. Διατάξτε σε αύξουσα φυσική σειρά τα σύμβολα που ακολουθούν το π_j, συμβολίστε με π την μετάθεση που προκύπτει, καταγράψτε την π και πηγαίνετε στο Βήμα 2.

metath.exe στην ιστοσελίδα http://users.auth.gr/cmoi

Διάταξη σε αύξουσα φυσική σειρά

Αλγόριθμος bubble sort

Βήμα 1. Θέσατε m=n-1

Βήμα 2. Για i=1, 2, …, m: αν ισχύει $x_i > x_{i+1}$, εναλλάξτε τα $x_i > x_{i+1}$.

Βήμα 3. Ελαττώσατε το m κατά 1. Αν το m είναι τώρα 0, σταματήστε, αλλιώς πηγαίνετε στο Βήμα 2.

Διάταξη σε αύξουσα σειρά των 3, 4, 1, 5, 2

1η φάση	**3**	**4**	1	5	2
	3	**1**	**4**	5	2
	3	1	**4**	**5**	2
	3	1	4	**2**	**5**
2η φάση	**1**	**3**	4	2	5
	1	**3**	**4**	2	5
	1	3	**2**	**4**	5
3η φάση	**1**	**3**	2	4	5
	1	**2**	**3**	4	5
4η φάση	**1**	**2**	3	4	5

Ασκήσεις

Ένας υπολογιστής έχει να επεξεργαστεί n προγράμματα. Κάθε πρόγραμμα ενεργοποιεί κατά την εκτέλεσή του διαφορετικά τμήματα του Η/Υ, όπως επεξεργαστές δίσκους, θέσεις μνήμης, κλπ. Έτσι, η εκτέλεση του προγράμματος j μετά το πρόγραμμα i χαρακτηρίζεται από το κόστος c_{ij} της αλλαγής των ενεργοποιημένων τμημάτων. Με αυτή την έννοια έχει νόημα η αναζήτηση της σειράς εκτέλεσης των προγραμμάτων που έχει ελάχιστο κόστος. Δείξτε ότι το πλήθος ελέγχων για την εύρεση του ελάχιστου κόστους είναι n! (όχι (n-1)!). Πόσα χρόνια απαιτούνται ώστε ένας υπολογιστής που έχει δυνατότητα 1 δισεκατομμυρίου πράξεων το δευτερόλεπτο, να λύσει αυτό το πρόβλημα για n=25;

α) Ο διπλανός πίνακας δείχνει το κόστος μετάβασης από την πόλη i στην πόλη j για το πρόβλημα του περιοδεύοντα πωλητή. Ποια η βέλτιστη διαδρομή για ένα πωλητή που μένει στην πόλη 1;
β) Ο ίδιος πίνακας δείχνει το κόστος μετάβασης από το πρόγραμμα i στο πρόγραμμα j για το προηγούμενο πρόβλημα. Ποια η βέλτιστη σειρά εκτέλεσης των προγραμμάτων;

$$(c_{ij}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & 1 & 8 & 11 \\ 16 & - & 3 & 6 \\ 4 & 9 & - & 11 \\ 8 & 3 & 2 & - \end{pmatrix} \end{array}$$

•Έστω A ένα σύνολο με 8 στοιχεία. Πόσα είναι τα γνήσια υποσύνολα του A που περιέχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία;

•Πόσες λέξεις των 8 γραμμάτων μπορούμε να σχηματίσουμε με τα 24 γράμματα του αλφαβήτου αν θέλουμε να έχουν από 3 μέχρι 5 φωνήεντα; $(1.267 \cdot 10^{10})$

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Τρίγωνο Pascal - Αριθμοί Fibonacci

Διοφαντικές εξισώσεις - Διαμερίσεις

Προβλήματα ταξινόμησης

Γεννήτριες συναρτήσεις

Τρίγωνο Pascal

Διαίρεση στοιχήματος

Πως να μοιραστεί στοίχημα σε παιχνίδι που διακόπηκε όταν ο παίκτης Α θέλει m παρτίδες να κερδίσει και ο Β θέλει n παρτίδες

Για παράδειγμα σε παιχνίδι τάβλι που τελειώνει σε 7 παρτίδες, και έχουν στοιχηματίσει α δρχ., αναγκάζονται να σταματήσουν όταν το σκορ είναι 4-5 (ο Α θέλει m=3 παρτίδες και ο Β θέλει n=2 παρτίδες).

A	*A*	*A*	*A*	*B*	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*A*	*B*	*B*	*B*	*B*
A	*A*	*A*	*B*	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*B*	*B*	*B*
A	*A*	*B*	*A*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*B*	*A*	*B*	*B*
A	*B*	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*A*	*B*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*A*	*B*

1 4 6 4 1

Ανάλογα 5:11, δηλ.
ο Α τα 5α/16, ο Β τα 11α/16

Γενικά P(A) : P(B)

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+m-1}{k} : \sum_{k=n}^{n+m-1}\binom{n+m-1}{k}$$

Ιδιότητες

Οριζόντια:
Συντελεστές Διωνύμου Νεύτωνα,
π.χ. $(\alpha+\beta)^4$: 1, 4, 6, 4, 1

1η Διαγώνιος: Φυσικοί αριθμοί:
1, 2, 3, 4, 5, ….

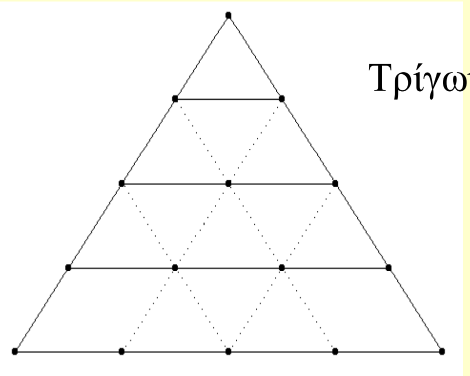
2η Διαγώνιος: Τρίγωνοι αριθμοί:
1, 3, 6, 10, ….

3η Διαγώνιος: Τετραεδρικοί αριθμοί:
1, 4, 10, 20, 35, ….

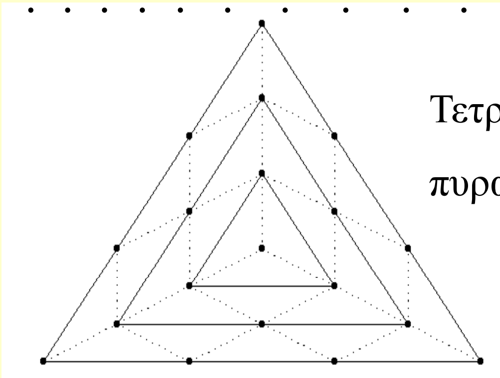
Ημιδιαγώνιος: Αριθμοί Fibonacci:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

Τριγωνική ιδιότητα Pascal $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

1 — 1
1 1 — 1
1 2 1 — 2
1 3 3 1 — 3
1 4 6 4 1 — 5
1 5 10 10 5 1 — ⋮
1 6 15 20 15 6 1
. . . .



Τρίγωνοι



Τετράεδροι

πυραμιδοειδείς

Αριθμοί Fibonacci

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα πληθυσμό κουνελιών κάθε ενήλικο ζευγάρι γεννά κάθε μήνα από ένα ζευγάρι κουνέλια. Τα νεογέννητα ενηλικιώνονται το δεύτερο μήνα οπότε και γεννούν το πρώτο ζευγάρι τους. Υποθέτουμε ακόμη ότι τα κουνέλια δεν πεθαίνουν ποτέ. Πόσα ζευγάρια κουνέλια θα υπάρχουν στην αρχή του n-στού μήνα, όταν αρχικά είχαμε ένα ενήλικο ζευγάρι;.

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1 + 1	2 + 1	3 + 2	5 + 3	8 + 5	13 + 8
	1	2	3	5	8	13	21

Τον n+2 μήνα υπάρχουν όσοι ήταν τον προηγού-μενο μήνα και όσοι γεννιούνται τότε. Αυτοί είναι ίσοι με όσους υπήρχαν τον n-στό μήνα που ενηλικιώθηκαν τώρα ή ήταν ενήλικα από πριν

$$\boxed{F_0=1,\ F_1=1,\quad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n}$$

Παρατηρήστε ότι το 4 μπορεί να γραφεί με 5 τρόπους ως άθροισμα με προσθετέους 1 ή 2, δηλ. 4=1+1+1+1=2+1+1=1+2+1=1+1+2=2+2. Δείξτε ότι ο φυσικός αριθμός n γράφεται με F_n τρόπους ως άθροισμα με προσθετέους 1 ή 2, όπου F_n οι αριθμοί Fibonacci.

Τοποθετήσεις δύο συμβόλων υπό περιορισμούς

+	+	+	+	+	−	−	←
+	+	+	+	−	+	−	
+	+	+	+	−	−	+	←
+	+	+	−	+	+	−	
+	+	+	−	+	−	+	
+	+	+	−	−	+	+	←
+	+	−	+	+	+	−	
+	+	−	+	+	−	+	
+	+	−	+	−	+	+	
+	+	−	−	+	+	+	←
+	−	+	+	+	+	−	
+	−	+	+	+	−	+	
+	−	+	+	−	+	+	
+	−	+	−	+	+	+	
+	−	−	+	+	+	+	←
−	+	+	+	+	+	−	
−	+	+	+	+	−	+	
−	+	+	+	−	+	+	
−	+	+	−	+	+	+	
−	+	−	+	+	+	+	
−	−	+	+	+	+	+	←

(1) Με πόσους τρόπους τοποθετούνται 5 (+) και 2 (−) σε ευθεία;
(2) Σε πόσους από αυτούς δεν υπάρχουν γειτονικά (−);

(1) $$M_7^{5,2} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21$$

(2) $\uparrow \; + \; \uparrow \; + \; \uparrow \; + \; \uparrow \; + \; \uparrow \; + \; \uparrow$

Άρα $$\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15$$

$$\binom{8}{0}+\binom{7}{1}+\binom{6}{2}+\binom{5}{3}+\binom{4}{4} = 1+7+15+10+1 = 34 = F_8$$

0 (-), 1 (-) έως 4 (-)

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Θεώρημα

α) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε ευθεία, n συμβόλων από τα {+, −}, εκ των οποίων τα k, (k=0, 1, 2, …, ≤ [(n+1)/2]), είναι – και τα υπόλοιπα n-k είναι +, έτσι ώστε ούτε δύο από τα – να είναι διαδοχικά, ισούται με:

$$Q_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$$

β) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε ευθεία, n συμβόλων από τα {+, −}, έτσι ώστε ούτε δύο από τα – να είναι διαδοχικά, ισούται με F_{n+1}, δηλαδή με τον αριθμό Fibonacci τάξης n+1.

α)

		1η		2η		3η		…		n-kστή	
Θέσεις των "+"		+		+		+		…		+	
Επιτρεπτές θέσεις	1		2		3		4	…	n-k		n-k+1

β) Αθροίζοντας για όλα τα k $$Q_n = \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} Q_{n,k} = Q_{n-1} + Q_{n-2} \ldots = F_{n+1}$$

Β΄ τρόπος (για το β). Οι Q_n τοποθετήσεις των n συμβόλων +, – χωρίς ούτε δύο – διαδοχικά διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:
(1) αυτές που τελειώνουν σε + , (2) αυτές που τελειώνουν σε –.
(τότε τελειώνουν σε +–)

Q_{n-1} + Q_{n-2}

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Πόρισμα 2.1

α) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε ευθεία, k αριθμών από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, (k=0, 1, …, [(n+1)/2]), έτσι ώστε ούτε δύο από αυτούς να είναι διαδοχικοί αριθμοί, ισούται με

$$Q_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$$

β) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε ευθεία οσονδήποτε από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, έτσι ώστε ούτε δύο από αυτούς να είναι διαδοχικοί αριθμοί, ισούται με F_{n+1}.

Απόδειξη με αναγωγή στο Θ.2.1

1	2	3	4	5	6
+	–	+	+	–	+

Άλλη διατύπωση:
«Το πλήθος των συνδυασμών k αριθμών από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί στον ίδιο συνδυασμό, είναι ...»

Πόρισμα 2.2

α) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε κύκλο, k αριθμών από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, (k=0, 1, 2, …, [n/2]), έτσι ώστε ούτε δύο από αυτούς να είναι διαδοχικοί αριθμοί, (1 και n θεωρούνται διαδοχικά), ισούται με

$$\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$$

β) Το πλήθος των τοποθετήσεων σε κύκλο οσονδήποτε από τους n≥2 πρώτους φυσικούς αριθμούς, έτσι ώστε ούτε δύο από αυτούς να είναι διαδοχικοί αριθμοί, όπου το 1 και n θεωρούνται διαδοχικά, ισούται με F_n+F_{n-2}.

Χωρίς απόδειξη

Άλλη διατύπωση είναι: «Το πλήθος των συνδυασμών k αριθμών από τους n πρώτους φυσικούς αριθμούς, ώστε να μην υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί στον ίδιο συνδυασμό, όταν 1 και n θεωρούνται διαδοχικοί, είναι ...»

Αριθμοί Loucas

$g_n = F_n + F_{n-2},\ n \geq 2$

$g_n = g_{n-1} + g_{n-2},\ n \geq 2$

με $g_2 = F_2 + F_0 = 3$ και $g_3 = F_3 + F_1 = 4$

Αν $g_2 = g_1 + g_0$ και $g_3 = g_2 + g_1$ *τότε:*

$$\boxed{g_n = g_{n-1} + g_{n-2},\ n \geq 2,\ \ g_0 = 2\ ,\ \ g_1 = 1}$$

g_n, $n \geq 0$, λέγονται αρ. Loucas

Ασκήσεις

•Με πόσους τρόπους 10 άντρες και 6 γυναίκες μπαίνουν σε ουρά αναμονής ώστε να μην έχουμε γυναίκες σε γειτονικές θέσεις;

$$\binom{16-6+1}{6} = 462$$

•Υπάρχουν n καθίσματα τοποθετημένα σε μία σειρά. Βρέστε το πλήθος των τρόπων να διαλέξουμε οσαδήποτε από τα καθίσματα (έστω και κανένα) με τρόπο ώστε να μην έχουμε διαλέξει διαδοχικά καθίσματα.

•Υπάρχουν $n \geq 2$ καθίσματα τοποθετημένα σε κυκλικό τραπέζι. Βρέστε το πλήθος των τρόπων να διαλέξουμε οσαδήποτε από τα καθίσματα (έστω και κανένα) με τρόπο ώστε να μην έχουμε διαλέξει διαδοχικά καθίσματα (εδώ το 1 και το n είναι διαδοχικά).

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Ρυθμός αύξησης της F_n

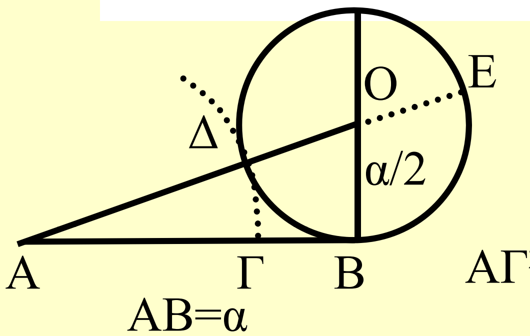
$$G_k = \frac{F_k}{F_{k-1}}$$ οπότε βρίσκουμε:

$$G_1 = 1,\ \ G_2 = \frac{2}{1} = 2,\ \ G_3 = \frac{3}{2} = 1.5,$$

$$G_4 = \frac{5}{3} = 1.67,\ \ G_5 = \frac{8}{5} = 1.60,$$

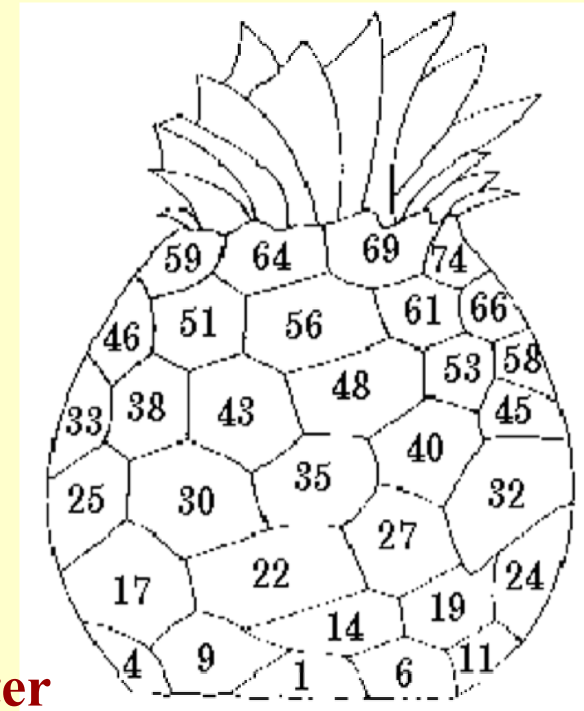
$$G_6 = \frac{13}{8} = 1.625,\ \ G_7 = \frac{21}{13} = 1.615,$$

$$G_8 = \frac{34}{21} = 1.619, \ldots \text{χρυσός λόγος}$$



Coxeter (1961)

$A\Gamma^2 = AB \cdot \Gamma B$

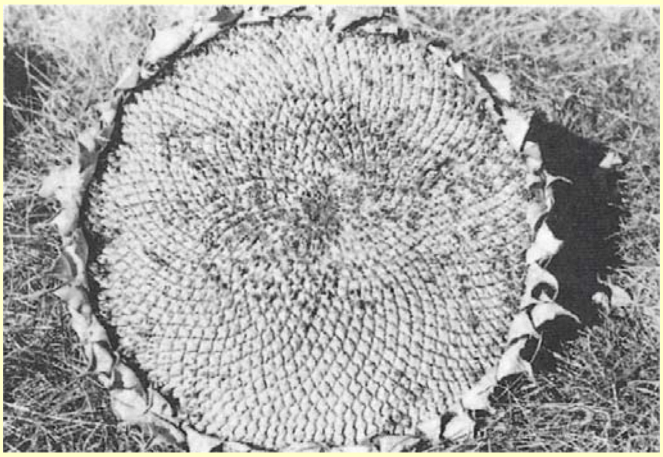


$$A\Gamma = \frac{\Gamma B}{2}\left(\sqrt{5}+1\right) = 1.619\,\Gamma B$$

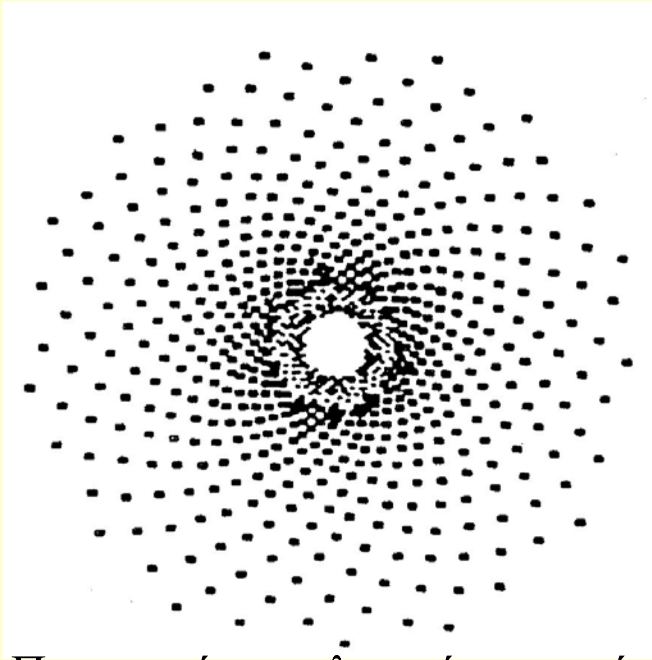
και $AB = 1.619\, A\Gamma$

Ηλιοτρόπιον

Φωτογραφία ηλιοτρόπιου που οι σπείρες του είναι 55 προς τη μία πλευρά και 89 προς την άλλη

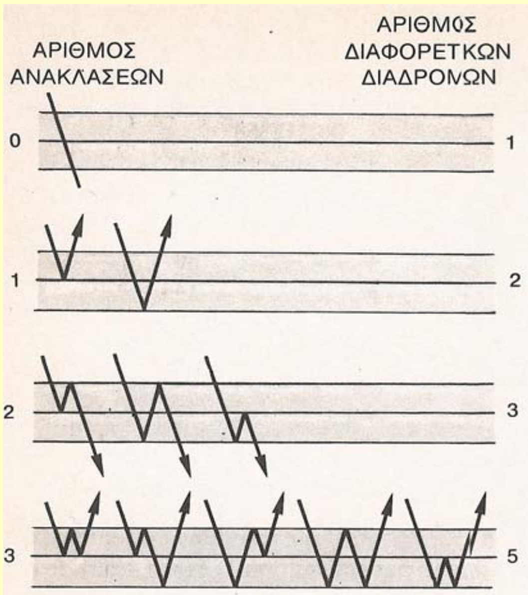


παρατηρούμε ότι
$F_9=55$, $F_{10}=89$

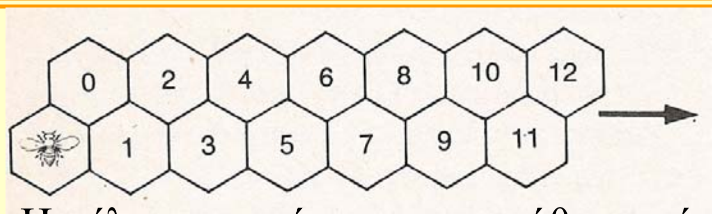


Προσομοίωση ηλιοτρόπιου από υπολογιστή. Μετρήστε τις σπείρες του προς τις δύο κατευθύνσεις. Τι παρατηρείτε;

Άλλες εφαρμογές των αριθμών F_n



Να αποδειχθεί ότι το πλήθος διαφορετικών τροχιών με n ανακλάσεις ακτίνων σε δύο πλήρως εφαπτόμενα τζάμια είναι F_{n+1}



Η μέλισσα μπαίνει στην κερήθρα από αριστερά και μπορεί να κινηθεί μόνο δεξιά. Δείξτε ότι μπορεί να φθάσει στο κελί n με F_{n+1} διαφορετικούς τρόπους.

Παιχνίδι Fibonacci-Nim. Υπάρχουν n μάρκες και δύο παίκτες Α και Β που παίζουν εναλλάξ. Ο Α στην πρώτη κίνηση παίρνει όσες μάρκες θέλει από 1 έως και n-1. Στις επόμενες κινήσεις οι παίκτες πρέπει να παίρνουν τουλάχιστον 1 μάρκα αλλά όχι περισσότερες από διπλάσιες απ' όσες πήρε ο αντίπαλος την τελευταία φορά.Αυτός που παίρνει την τελευταία μάρκα κερδίζει. Αποδεικνύεται, ότι αν το n είναι αριθμός Fibonacci, ο Β κερδίζει στα σίγουρα με κατάλληλη στρατηγική. Αν δεν είναι, τότε κερδίζει ο Α με ανάλογη στρατηγική

Διοφαντικές εξισώσεις και Διαμερίσεις

Θεώρημα 2.2. Το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης:

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = r,\ \ \mu\varepsilon\ x_1 > \alpha_1,\ x_2 > \alpha_2, \ldots, x_n > \alpha_n}$$

δίνονται από τον τύπο: $\boxed{\binom{r-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n-1}{n-1}}$

Για την απόδειξη παρατηρείστε ότι η αντικατάσταση των x_i με y_i-α_i μετασχηματίζει ως προς y_i τη δοθείσα εξίσωση και οι ζητούμενες λύσεις είναι οι μη-αρνητικές λύσεις της νέας

Να βρεθούν οι θετικές λύσεις της εξίσωσης:

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = r,}$$

Αρκεί να πάρουμε όλα τα α_k=0

άρα πλήθος θετικών λύσεων $\boxed{\binom{r-1}{n-1}}$

Παράδειγμα 2.1

Βρέστε το πλήθος των ακεραίων θετικών λύσεων της **x+y+z+w=20,** όταν: (α) x>6, (β) x>6 και y>6, (γ) x>6, y>6 και z>6, (δ) 1≤x≤6, 1≤y≤7, 3≤z≤9, 4≤w≤11.

Στο (α) είναι r=20
n=4, α_1=6, α_2= α_3= α_4=0

$$\binom{20-6-0-0-0-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 286$$

(β) $\binom{20-6-6-0-0-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$ (γ) $\binom{20-6-6-6-0-1}{4-1} = \binom{1}{3} = 0$

(δ) Βρίσκουμε πρώτα λύσεις με x>0, y>0, z>2, w>3

$$\binom{20-0-0-2-3-1}{4-1} = \binom{14}{3} = 364$$

Θέτουμε:
α_1 την ιδιότητα μία από αυτές τις λύσεις να έχει x > 6,
α_2 την ιδιότητα μία από αυτές τις λύσεις να έχει y > 7,
α_3 την ιδιότητα μία από αυτές τις λύσεις να έχει z > 9, και
α_4 την ιδιότητα μία από αυτές τις λύσεις να έχει w > 11.

Με ΑΣΕ, βρίσκουμε:
364-(56+35+35+20) +0-0+0=218 λύσεις

Γενίκευση

Θ. 2.3. Το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r \quad \text{με} \quad 1 \le x_i \le \alpha,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

ισούται με: $\binom{r-1}{n-1} - \binom{n}{1}\binom{r-\alpha-1}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{r-2\alpha-1}{n-1} - \binom{n}{3}\binom{r-3\alpha-1}{n-1} + \ldots$

Ποια η πιθανότητα ρίχνοντας 4 ζάρια να φέρουμε άθροισμα 18;

Σύμφωνα με το κλασικό ορισμό, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι p=N(A)/N, όπου $N=6^4$ οι δυνατές περιπτώσεις, ενώ N(A) το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18}$, με $\mathbf{1 \le x_k \le 6}$ **.**

Άρα

$$N(A) = \binom{17}{3} - \binom{4}{1}\binom{17-6}{3} + \binom{4}{2}\binom{17-12}{3} - \binom{4}{3}\binom{17-18}{3} =$$

$$= \binom{17}{3} - \binom{4}{1}\binom{11}{3} + \binom{4}{2}\binom{5}{3} - 0 = 680 - 4 \cdot 165 + 6 \cdot 10 = 80$$

Άρα p=80/1296=0.062

Διαμερίσεις ακεραίου

Έστω ο ακέραιος αριθμός 6. Οι διάφορες διαμερίσεις του 6 είναι:

1+1+1+1+1+1	4+1+1	5+1
2+1+1+1+1	3+2+1	4+2
3+1+1+1	2+2+2	3+3
2+2+1+1	6	

Συμβολίζουμε p(6)=11. (Σημειώστε ότι δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των προσθετέων). Ποιο είναι το p(n) για τυχαίο n;

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν:	Παρατηρούμε ότι υπάρχουν:
1 διαμέριση με 6 προσθετέους	1 διαμ. με το 6 ως μεγαλ. προσθετέο
1 διαμέριση με 5 προσθετέους	1 διαμ. με το 5 ως μεγαλ. προσθετέο
2 διαμερίσεις με 4 προσθετέους	2 διαμ. με το 4 ως μεγαλ. προσθετέο
3 διαμερίσεις με 3 προσθετέους	3 διαμ. με το 3 ως μεγαλ. προσθετέο
3 διαμερίσεις με 2 προσθετέους	3 διαμ. με το 2 ως μεγαλ. προσθετέο
1 διαμέριση με 1 προσθετέους	1 διαμ. με το 1 ως μεγαλ. προσθετέο

Διαγράμματα Ferer

6=3+2+1

• • •
• •
•

9=4+2+2+1

• • • •
• •
• •
•

⇒ ⇐

9=4+3+1+1

• • • •
• • •
•
•

4 προσθετέοι

Το 4 είναι ο μεγαλύτερος από τους προσθετέους

Θέτουμε

$q_k(n)$ = #(διαμερ. του n με k ή λιγότερους προσθετέους)

$p_k(n)$ = #(διαμερ. του n με προσθετέους όχι μεγαλύτερους του k)

Είναι

$q_1(6)=1,\ q_2(6)=4,\ q_3(6)=7,\ q_4(6)=9,\ q_5(6)=10,\ q_6(6)=11=p(6)$

$p_1(6)=1,\ p_2(6)=4,\ p_3(6)=7,\ p_4(6)=9,\ p_5(6)=10,\ p_6(6)=11=p(6)$

Είναι φανερό: $p_1(n)=q_1(n)=1$, για όλα τα n.
$p_n(n)=q_n(n)=p(n)$, για όλα τα n.

Θεώρημα 2.4

Ισχύει: $\boxed{q_k(n)=p_k(n)}$ για όλα τα k, και n

Για n=6, k=3

6=3+2+1	6=4+1+1	6=2+2+2
• • • • • •	• • • • • •	• • • • • •

$q_3(n)-q_2(n)$
ακριβώς 3 προσθ.

6=3+2+1	6=3+1+1+1	6=3+3
• • • • • •	• • • • • •	• • • • • •

$p_3(n)-p_2(n)$
Το 3 μέγιστος προσθ.

Γενικά:
$q_k(n)-q_{k-1}(n)=p_k(n)-p_{k-1}(n)$
για όλα τα k, και n

Θεώρημα 2.5

Ισχύει: $\boxed{p_k(n)= p_{k-1}(n)+ p_k(n-k)}$ για όλα τα k, και n

Έστω $1 < k < n$ ($p_1(n)=1$, $p_n(n)=p(n)$ για όλα τα n)

Με διπλή απαρίθμηση

Όλες οι $p_k(n)$ διαμερίσεις διαιρούνται σε δύο είδη,

(1) χωρίς το k (άρα k-1 ο μεγαλ.), (2) με το k ως προσθετέο (αφαιρούμε ένα k από το n)

$p_{k-1}(n)$ $p_k(n-k)$

Να βρεθεί το πλήθος διαμερίσεων του n με ακριβώς δύο προσθετέους.

Ζητείται $r_2(n)=q_2(n)-q_1(n)$. Είναι: $q_2(n)= p_2(n)= p_1(n)+ p_2(n-2)=1+p_2(n-2)$

Με επαγωγή $p_2(n)=\begin{cases}(n+2)/2, & n\ άρτιος\\ (n+1)/2, & n\ περιτ.\end{cases}$ $\boxed{r_2(n)=\begin{cases}n/2, & n\ άρτιος\\ (n-1)/2, & n\ περιτ.\end{cases}}$

Επαλήθευση: «μισά από τα:» $n=1+(n-1)=2+(n-2)=\ldots=(n-1)+1$

Διαμερίσεις ακεραίων και πολυώνυμα

Πρότ. 2.1. Το πλήθος λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης:

$k_1+2k_2+3k_3+\ldots+nk_n=n$, με $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n =0$ ή 1

ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του *n* με διακεκριμένους προσθετέους, και υπολογίζεται ως ο συντελεστής της δύναμης x^n στο πολυώνυμο: $(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^3)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)$

Πρότ. 2.2. Το πλήθος λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης:

$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\ldots+n\lambda_n=n$, με $0\le \lambda_i \le [n/i]$

ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων του *n* με οποιουσδήποτε προσθετέους, και υπολογίζεται ως ο συντελεστής της δύναμης x^n στο πολυώνυμο:

$(1+x+x^2+..+x^n)\cdot(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2[n/2]})\cdot(1+x^3+\ldots+x^{3[n/3]})\cdot\ldots\cdot(1+x^n)$

Πρότ. 2.3. Γενίκευση για $1\leftrightarrow α$, $2\leftrightarrow β$, $3\leftrightarrow γ$, …

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Ασκήσεις

Γράψτε το πολυώνυμο του οποίου το ανάπτυγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του πλήθους:

(α) των διαμερίσεων του 38 με προσθεταίους 6, 7, 12, 20

(β) των διαμερίσεων του 15 με προσθεταίους μεγαλύτερους του 2.

α) $(1+x^6+x^{12}+x^{18}+x^{24}+x^{30}+x^{36})(1+x^7+x^{14}+x^{21}+x^{28}+x^{35})(1+x^{12}+x^{24}+x^{36})(1+x^{20})$

β) $(1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15})(1+x^4+x^8+x^{12})(1+x^5+x^{10}+x^{15})(1+x^6+x^{12})(1+x^7+x^{14})\cdot$

$\cdot(1+x^8)(1+x^9)(1+x^{10})(1+x^{11})(1+x^{12})(1+x^{13})(1+x^{14})(1+x^{15})$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να πληρώσουμε έναν λογαριασμό 73 cent του Ευρώ όταν έχουμε διαθέσιμα οσαδήποτε ψιλά χρειαζόμαστε από 1, 2, 5, 10, 20 και 50 cent;

Θα πρέπει να ισχύει $x+2y+5z+10w+20s+50t=73$.

Αρκεί να υπολογίσουμε το συντελεστή του x^{73} στο πολυώνυμο

$(1+x+x^2+x^3+...+x^{73})(1+x^2+x^4+\ldots+x^{72})(1+x^5+x^{10}+\ldots+x^{70})(1+x^{10}+x^{20}+\ldots+x^{70})\cdot$

$\cdot(1+x^{20}+x^{40}+x^{60})(1+x^{50})$

που είναι 1494. Υπολογίστε το και με πρόγραμμα Pascal

Διαμερίσεις του επιπέδου

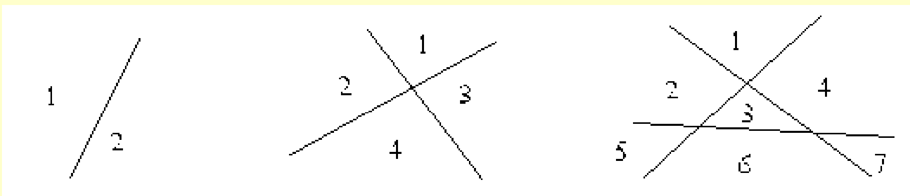
Δίνονται n ευθείες στο επίπεδο οι οποίες δεν είναι παράλληλες ανά δύο, ούτε υπάρχουν οποιεσδήποτε τρεις απ' αυτές που να περνούν από το ίδιο σημείο. Αν f(n) συμβολίζει το πλήθος των περιοχών στις οποίες χωρίζεται το επίπεδο, να βρεθεί το f(n).

Είναι:

f(1)=2,

f(2)=4,

f(3)=7.



Η προσθήκη της n-στής γραμμής που τέμνει τις n-1 γραμμές αυξάνει τα χωρία κατά n. Άρα ισχύει: **f(n)=f(n-1)+n**

Με τηλεσκοπική άθροιση βρίσκουμε

$$f(n)=\frac{n^2+n+2}{2}=1+\binom{n+1}{2}$$

Γενίκευση για το χώρο, που χωρίζεται από n επίπεδα τεμνόμενα ανά 3 άλλά όχι ανά 4 σε F(n) χωρία.

F(n)=F(n-1)+f(n-1)

$$F(n)=\frac{n^2+5n+6}{6}$$

Προβλήματα ταξινόμησης

n όμοια σφαιρίδια σε k διακεκριμένα κελιά

$\boxed{x_1}$ $\boxed{x_2}$ ….. $\boxed{x_k}$

$x_1+x_2+\ldots+x_k=n$

k διακεκριμένα κελιά

Αν επιτρέπονται άδεια κελιά $\boxed{\binom{n+k-1}{k-1}}$

Αν δεν επιτρέπονται άδεια κελιά $\boxed{\binom{n-1}{k-1}}$

10 εκλέκτορες ψηφίζουν 7 υποψήφιους για μια θέση προέδρου. Ποια η πιθανότητα ο 1ος υποψήφιος να πάρει 2 ψήφους;

Είναι $p=N_A/N=$ $1287/8008=0.16$ διότι:

$$\boxed{N=\binom{10+7-1}{7-1}=\binom{16}{6}} \quad \boxed{N_A=\binom{8+6-1}{6-1}=\binom{13}{5}}$$

7 υποψ.=κελιά, 10 ψήφοι (όμοιες) =σφαιρίδ.

n διακεκριμένα σφαιρίδια - k διακεκριμένα κελιά

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ ….. $\boxed{k}$

Δυνατές περιπτώσεις: $N=k^n$

k διακεκριμένα κελιά

διότι κάθε σφαιρίδιο έχει k δυνατότητες

Έστω *f(n,k)* = "πλήθος τοποθετήσεων των n διακεκριμένων σφαιριδίων στα k διακεκριμένα κελιά, με τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο σε κάθε κελί"

Με εφαρμογή Α.Σ.Ε. και με ιδιότητες

α_i : το i κελί είναι άδειο, βρίσκουμε εύκολα:

$$\boxed{f(n,k)=k^n-\binom{k}{1}(k-1)^n+\binom{k}{2}(k-2)^n-\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}1^n}$$

$N(\alpha_k)$ $N(\alpha_k\alpha_\lambda)$

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους 4 σφαιρίδια μπορούν να τοποθετηθούν σε 3 κελιά ώστε
(α) κανένα κελί άδειο, (β) ένα ακριβώς άδειο, (γ) δύο άδεια;

(α) $f(4,3) = 3^4 - \binom{3}{1} 2^4 + \binom{3}{2} 1^4 = 36$

$\alpha\beta,\gamma,\delta$	$\alpha\beta,\delta,\gamma$	$\gamma,\alpha\beta,\delta$	$\delta,\alpha\beta,\gamma$	$\gamma,\delta,\alpha\beta$	$\delta,\gamma,\alpha\beta$
$\alpha\gamma,\beta,\delta$	$\alpha\gamma,\delta,\beta$	$\beta,\alpha\gamma,\delta$	$\delta,\alpha\gamma,\beta$	$\beta,\delta,\alpha\gamma$	$\delta,\beta,\alpha\gamma$
$\alpha\delta,\beta,\gamma$	$\alpha\delta,\gamma,\beta$	$\beta,\alpha\delta,\gamma$	$\gamma,\alpha\delta,\beta$	$\beta,\gamma,\alpha\delta$	$\gamma,\beta,\alpha\delta$
$\beta\gamma,\alpha,\delta$	$\beta\gamma,\delta,\alpha$	$\alpha,\beta\gamma,\delta$	$\delta,\beta\gamma,\alpha$	$\alpha,\delta,\beta\gamma$	$\delta,\alpha,\beta\gamma$
$\beta\delta,\alpha,\gamma$	$\beta\delta,\gamma,\alpha$	$\alpha,\beta\delta,\gamma$	$\gamma,\beta\delta,\alpha$	$\alpha,\gamma,\beta\delta$	$\gamma,\alpha,\beta\delta$
$\gamma\delta,\alpha,\beta$	$\gamma\delta,\beta,\alpha$	$\alpha,\gamma\delta,\beta$	$\beta,\gamma\delta,\alpha$	$\alpha,\beta,\gamma\delta$	$\beta,\alpha,\gamma\delta$

(β) $\binom{3}{2} f(4,2) = 3\left(2^4 - \binom{2}{1} 1^4\right) = 42$ (γ) $\binom{3}{1} f(4,1) = 3\left(1^4\right) = 3$

n διακεκριμένα σφαιρίδια - k όμοια κελιά

Έστω $G(n,k)$ = "πλήθος τοποθετήσεων των n διακεκριμένων σφαιριδίων στα k όμοια κελιά" και
$g(n,k)$ = "πλήθος τοποθετήσεων των n διακεκριμένων σφαιριδίων στα k όμοια κελιά, με τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο σε κάθε κελί"

Τα άδεια κελιά θα είναι ή 0, ή 1, ή κλπ ή k-1. Άρα:
G(n,k)=g(n,k)+g(n,k-1)+…+g(n,2)+g(n,1)

όπου:

$$g(n,r) = \frac{f(n,r)}{r!} = \frac{1}{r!}\left[r^n - \binom{r}{1}(r-1)^n + \binom{r}{2}(r-2)^n - \ldots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1} 1^n \right]$$

διότι αν τα κελιά ήταν διακεκριμένα, θα μπορούσαν να τοποθετηθούν με r! διαφορετικούς τρόπους.

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους 4 σφαιρίδια μπορούν να τοποθετηθούν σε 3 όμοια κελιά; Να καταγραφούν οι περιπτώσεις συμβολίζοντας τα σφαιρίδια με α,β,γ,δ.

$$G(4,3) = g(4,3) + g(4,2) + g(4,1) = \frac{f(4,3)}{3!} + \frac{f(4,2)}{2!} + \frac{f(4,1)}{1!} = \frac{36}{6} + \frac{14}{2} + \frac{1}{1} = 14$$

$\alpha\beta\gamma\delta,-,-$	$\alpha\beta\gamma,\delta,-$	$\alpha\beta\delta,\gamma,-$	$\alpha\gamma\delta,\beta,-$	$\beta\gamma\delta,\alpha,-$
$\alpha\beta,\gamma,\delta$	$\alpha\gamma,\beta,\delta$	$\alpha\delta,\beta,\gamma$	$\beta\gamma,\alpha,\delta$	$\beta\delta,\alpha,\gamma$
$\gamma\delta,\alpha,\beta$	$\alpha\beta,\gamma\delta,-$	$\alpha\gamma,\beta\delta,-$	$\alpha\delta,\beta\gamma,-$	

Με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμό 30030 χρησιμοποιώντας τρεις ακέραιους παράγοντες, όταν:

α. το 1 επιτρέπεται ως παράγοντας. β. το 1 δεν επιτρέπεται ως παράγοντας.

(Η σειρά των παραγόντων δεν μετράει, δηλ. 30·77·13/13·77·30)

Παρατηρείστε ότι ο 30030 έχει 6 διαφορετικούς πρώτους παράγοντες, τους οποίους πρέπει να τους τοποθετήσουμε σε τρία όμοια κελιά (παράγοντες). Στο (α) επιτρέπονται και άδεια κελιά, ενώ στο (β) όχι.

(α) 122, (β) 90

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Διαμερίσεις συνόλων - Αριθμοί Bell

Οι αριθμοί B_n που δίνουν το πλήθος των διαμερίσεων ενός συνόλου n στοιχείων, λέγονται αριθμοί Bell.

n=1 : $B_1=1$.

n=2 : $B_2=2$, ({{1,2}}, {{1}, {2}})

n=3 : $B_3= 5$,

{{1,2,3}}, {{1,2},{3}}, {{1,3},{2}}, {{2,3},{1}}, {{1},{2},{3}}

Έστω *B(n,k)* = "πλήθος διαμερίσεων συνόλου n στοιχείων σε k υποσύνολα"

τότε: B(n,k)=g(n,k) (υποσύνολα = κελιά με τουλάχιστον 1 στ.)

άρα B_n=B(n,1)+B(n,2)+…+B(n,n)= g(n,1)+g(n,2)+…+g(n,n)

Παράδειγμα:

$$B_4 = g(4,1)+g(4,2)+g(4,3)+g(4,4) = \frac{24}{24} + \frac{36}{6} + \frac{14}{2} + \frac{1}{1} = 15$$

Αριθμοί Stirling

$$k^{(n)} = k(k-1)\ldots(k-n+1) = S_1^{(n)}k + S_2^{(n)}k^2 + \ldots + S_n^{(n)}k^n \qquad (*)$$

Ισχύει: $S_i^{(n+1)} = S_{i-1}^{(n)} - nS_i^{(n)}$, $S_0^{(0)} = S_1^{(1)} = 1$ α΄ είδους

n \ i	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	-1	1						
3	2	-3	1					
4	-6	11	-6	1				
5	24	-50	35	-10	1			
6	-120	274	-225	85	-15	1		
7	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	
8	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1

24-5 ·(-50)

(*) $$k^n = s_1^{(n)}k^{(1)} + s_2^{(n)}k^{(2)} + \ldots + s_n^{(n)}k^{(n)}$$

Ισχύει: $s_i^{(n+1)} = s_{i-1}^{(n)} + is_i^{(n)}$, $s_0^{(0)} = s_1^{(1)} = 1$ β΄ είδους

Αριθμοί Stirling β΄ είδους και Bell

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	7	6	1				
5	1	15	25	10	1			
6	1	31	90	65	15	1		
7	1	63	301	350	140	21	1	
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

90=15+3 ·25

Π.χ. $r^6 = r^{(1)} + 31\, r^{(2)} + 90\, r^{(3)} + 65\, r^{(4)} + 15\, r^{(5)} + r^{(6)}$

B(6,2)

Αριθμοί Bell: $B_5 = 1+15+25+10+1 = 52$

$B_6 = 1+31+90+65+15+1 = 203$

Γεννήτριες και Αναδρομικές σχέσεις

Ορισμός: Έστω α_k, k=0, 1, 2,… πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί.

Η ως προς t συνάρτηση (που ορίζεται σε διάστημα όπου συγκλίνει η σειρά)	$A(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k t^k$	λέγεται γεννήτρια συνάρτηση
ενώ, η	$E(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k \frac{t^k}{k!}$	λέγεται εκθετική γεννήτρια

Παράδειγμα.
Αν τα α_k είναι οι πιθανότητες $P(X=x_k)$ μιας διακριτής κατανομής, τότε η A(t) λέγεται πιθανογεννήτρια,
ενώ, αν τα α_k είναι οι ροπές της κατανομής X, τότε η E(t) λέγεται ροπογεννήτρια.

Αριθμοί Fibonacci (γεννήτρια)

Για τους αριθμούς Fibonacci F_n ισχύει:

$$\boxed{\begin{array}{l} F_n = F_{n-1}+F_{n-2},\ n\ge 2 \\ F_0=1,\ \ F_1=1 \end{array}}$$

Θέτουμε $F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n t^n$ τη γεννήτρια των F_n

Πολλαπλασιάζοντας την αναγωγική σχέση με t^n και αθροίζοντας για όλα τα n≥2, έχουμε:

$$\sum_{n=2}^{\infty}F_n t^n = t\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}t^{n-1}+t^2\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}t^{n-2}$$

$$\Rightarrow F(t)-1-t=t\left(F(t)-1\right)+t^2F(t)$$

$$\Rightarrow F(t)=\frac{1}{1-t-t^2}=\frac{1}{(1-\kappa t)(1-\lambda t)}=\frac{1}{\kappa-\lambda}\left(\frac{\kappa}{1-\kappa t}-\frac{\lambda}{1-\lambda t}\right)$$

τελικά:

όπου: $\boxed{\kappa=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \ \lambda=\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\kappa\sum_{j=0}^{\infty}(\kappa t)^j-\lambda\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda t)^j\right)$$

$$\boxed{F_n=\frac{\kappa^{n+1}-\lambda^{n+1}}{\kappa-\lambda},\ n\in\mathbb{N}}$$

Αριθμοί Bell (γεννήτρια)

Για τους αριθμούς Bell B_n ισχύει:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} \, , \; B_0 = 1$$

Απόδειξη:

Αν Χ={1,2,...,n} και έστω μια διαμέριση του Χ. Υπάρχει μοναδικό τμήμα της διαμέρισης που περιέχει το n (n∪Y) μαζί με το σύνολο Y που περιέχει k−1 έστω στοιχεία από τα {1,2,...,n−1}. Το υπόλοιπο τμήμα της διαμέρισης αποτελεί διαμέριση του συνόλου των υπολοίπων n−k στοιχείων του συνόλου {1,2,..., n−1}−Y και επιλέγεται με B_{n-k} τρόπους. Το Y επιλέγεται με $\binom{n-1}{k-1}$ τρόπους.

Θέτουμε $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$ την εκθετική γεννήτρια των B_n

Πολλαπλασιάζοντας την αναγωγική σχέση με $t^{n-1}/(n-1)!$ και αθροίζοντας για όλα τα n≥1, βρίσκουμε:

$$\frac{dB(t)}{dt} = e^t B(t)$$

απ' όπου $\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = e^{e^t - 1}$ ή

$$B_n = \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{e^t-1}\right)\Big|_{t=0}$$

Αριθμοί Catalan

Έστω $y = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ ένα γινόμενο. Το πλήθος των τρόπων υπολογισμού του γινομένου με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς δύο όρων κάθε φορά χωρίς αλλαγή της σειράς των αριθμών, συμβολίζεται C_n. Βρίσκουμε εύκολα:

$C_2=1$ διότι το $\mathbf{y= x_1 \cdot x_2}$ υπολογίζεται με μονδικό τρόπο

$C_3=2$ διότι $\mathbf{y= (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3}$ ή $\mathbf{y= x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)}$

$C_4=5$ διότι $\mathbf{y= ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4}$ ή $\mathbf{y= (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) \cdot x_4}$
$\mathbf{y= x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4))}$ ή $\mathbf{y= x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4)}$
ή $\mathbf{y= ((x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4))}$

Οι αριθμοί C_n, n=1, 2, 3, λέγονται αριθμοί Catalan

Αριθμοί Catalan (γεννήτρια)

$$\underbrace{y=x_1x_2\ldots x_n}_{C_n} \Rightarrow y=\underbrace{(x_1)}_{C_1}\underbrace{(x_2\ldots x_n)}_{C_{n-1}} \text{ ή } y=\underbrace{(x_1x_2)}_{C_2}\underbrace{(x_3\ldots x_n)}_{C_{n-2}} \text{ ή} \ldots \text{ ή } y=\underbrace{(x_1\ldots x_{n-1})}_{C_{n-1}}\underbrace{(x_n)}_{C_1}$$

Με διπλή απαρίθμηση, έχουμε:

$$\boxed{C_n = C_1\cdot C_{n-1} + C_2\cdot C_{n-2} + \ldots + C_{n-1}\cdot C_1 \,,\, n\geq 2 \quad \mu\varepsilon \quad C_1 = 1}$$

Θέτουμε $C(t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$ τη γεννήτρια των C_n

Πολλαπλασιάζοντας την αναγωγική σχέση με t^n κι αθροίζοντας για όλα τα $n\geq 1$, βρίσκουμε:

$$\left(C(t)\right)^2 - C(t) + t = 0$$

$$C(t)=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4t}\right)$$

απ' όπου

Η άλλη ρίζα απορρίπτεται αφού πρέπει C(0)=0

$$\boxed{C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}}$$

ή

$$C(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}2^{2k-1}\binom{1/2}{k}t^k$$

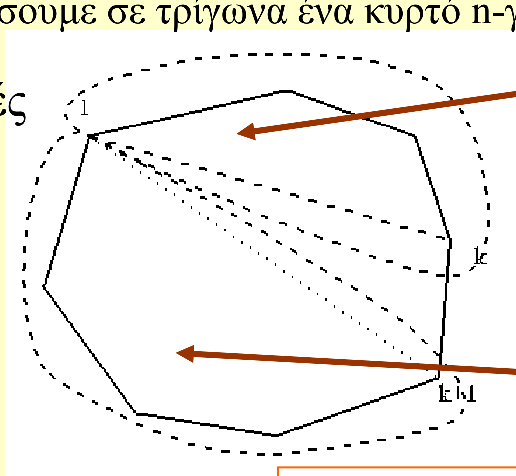
π.χ. $C_{10}=4862$

Άσκηση

Πόσο είναι το πλήθος v_n ($n\geq 3$) των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να χωρίσουμε σε τρίγωνα ένα κυρτό n-γωνο με μη-τεμνόμενες διαγωνίους

n+1 κορυφές

v_{n+1}



k κορυφές

v_k

n+2-k κορυφές

v_{n+2-k}

$$\boxed{v_{n+1} = v_2\cdot v_n + v_3\cdot v_{n-1} + \ldots + v_n\cdot v_2 \,,\, n\geq 2}$$

Θέτοντας: $v_{n+1}=\mu_n$

$$\boxed{\mu_n = \mu_1\cdot\mu_{n-1} + \mu_2\cdot\mu_{n-2} + \ldots + \mu_{n-1}\cdot\mu_1 \,,\, n\geq 2 \quad \mu\varepsilon \quad \mu_1 = v_2 = 1}$$

Άρα $\mu_n=C_n$ επομένως

$$\boxed{v_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}}$$

Άσκηση

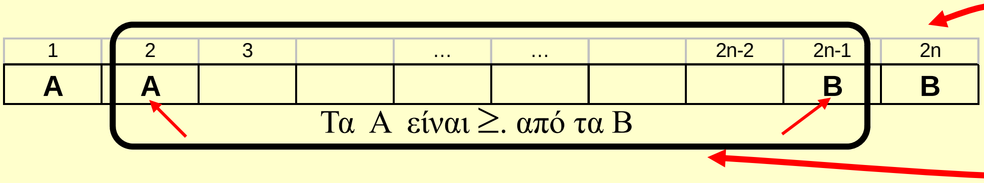
Σε μία εκλογή 2n εκλέκτορες ψηφίζουν δύο υποψήφιους Α και Β. Μετά την καταμέτρηση των ψήφων βρέθηκε ότι οι υποψήφιοι πήραν από ίσους ψήφους. Δείξτε ότι:

(α). Το πλήθος των δυνατών τρόπων καταμέτρησης των ψήφων ώστε σε όλη τη διαδικασία να προηγείται ο Α ισούται με C_n.

(β). Το πλήθος των δυνατών τρόπων καταμέτρησης των ψήφων ώστε σε όλη τη διαδικασία ο Α να έχει τουλάχιστον τόσους ψήφους όσους και ο Β ισούται με C_{n+1}

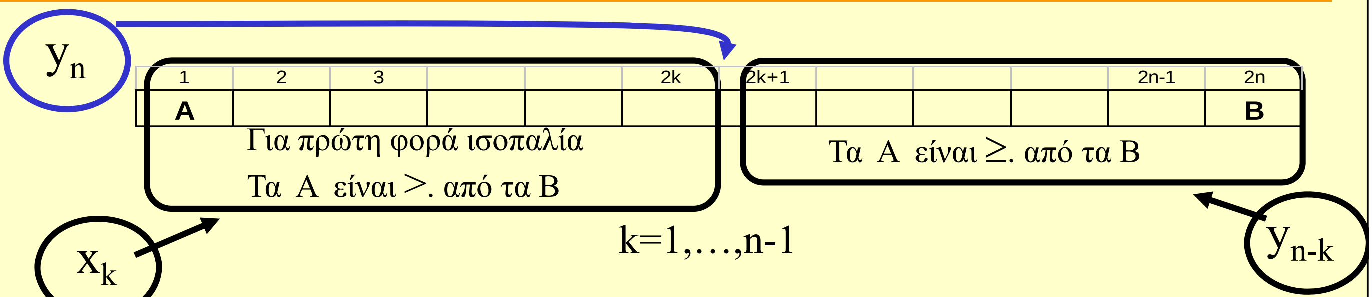
Συμβολίζουμε x_n το πλήθος στο (α) και y_n το πλήθος στο (β)

Πρέπει η α΄ ψήφος να είναι του Α και η τελευταία του Β.



$$x_n = y_{n-1}$$

Ισοδυναμία με αριθμούς Catalan



Αρχικές τιμές
$$\begin{aligned} &x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2 \\ &y_1 = 1, y_2 = 2 \Rightarrow y_0 = 1 \end{aligned}$$

$$y_n = x_1 \cdot y_{n-1} + x_2 \cdot y_{n-2} + \ldots + x_{n-1} \cdot y_1 + x_n \cdot y_0 \,,\, n \geq 2$$

$$y_n = x_{n+1}, n \geq 1 \qquad x_{n+1} = x_1 \cdot x_n + x_2 \cdot x_{n-1} + \ldots + x_{n-1} \cdot x_2 + x_n \cdot x_1 \,,\, n \geq 1$$

Άρα
$$x_n = C_n, \quad y_n = C_{n+1},$$

Καταγραφή των x_4 , y_4

x_4

AAAABBBB
AAABABBB
AABAABBB
AABABABB
AAABBABB

y_4

ABAAABBB	AABBAABB	AAAABBBB
ABAABABB	AABBABAB	AAABABBB
ABAABBAB		AABAABBB
ABABAABB	AAABBBAB	AABABABB
ABABABAB	AABABBAB	AAABBABB

Άσκηση

Στο ταμείο ενός θεάτρου υπάρχει μια ουρά 2n ατόμων. n από αυτούς έχουν από ένα 500-ρικο, ενώ οι υπόλοιποι έχουν μόνο 1000-ρικα. Τα εισιτήρια κάνουν 2500 και 3500 δρχ και στην αρχή ο ταμίας δεν έχει καθόλου ρέστα. Είναι φανερό ότι υπάρχουν $\binom{2n}{n}$ διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των ατόμων αυτών στην ουρά. Σε πόσους από τους τρόπους αυτούς υπάρχουν πάντα 500-ρικα στο ταμείο του θεάτρου ώστε να μην υπάρξει πρόβλημα; α) Ποια η πιθανότητα να μην υπάρξει πρόβλημα στο ταμείο; β) Ποια η πιθανότητα να μηδενιστεί ακριβώς μία φορά το πλήθος των 500-ρικων στο ταμείο και μάλιστα στο (2k)-στό άτομο; γ) Ποια να μηδενιστεί ακριβώς μία φορά (εκτός του πρώτου και τελευταίου).

Ας συμβολίσουμε με A αυτούς που έχουν 500-ρικο και με B αυτούς που δεν έχουν και ας τους καταγράψουμε σε μία σειρά.
Για να συμβαίνει το ζητούμενο θα πρέπει, μετρώντας από την αρχή της λίστας προς το τέλος τα A να είναι πάντα περισσότερα ή το πολύ ίσα με τα B. Άρα σύμφωνα με το (β) της προηγούμενης άσκησης υπάρχουν C_{n+1} τρόποι, για να μην υπάρξει πρόβλημα. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

α)

$$p = C_{n+1} / \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} / \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}$$

β) $C_k C_{n-k}$

γ) $\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} = C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ

- **ΒΙΒ Σχεδιασμοί**
- **Πίνακες Αντιστοίχισης**
- **Τριπλέτες Steiner**

Μωυσιάδης Χρόνης
Ζ΄ Εξάμηνο Μαθηματικών 2007-08

Πειραματικοί Σχεδιασμοί

Μία αλυσίδα σούπερμαρκετ αγοράζει ένα προϊόν σε τέσσερις διαφορετικές συσκευασίες α, β, γ, δ, που έχουν διαφορά στην τιμή αλλά όχι στην ποιότητα. Για να ερευνηθεί κατά πόσον η εμφάνιση παίζει ρόλο στις πωλήσεις, αποφασίστηκε να διατεθεί το προϊόν σε τέσσερα καταστήματα Α, Β, Γ, Δ, που διαφέρουν ως προς την οικονομικές δυνατότητες των πελατών τους και για τέσσερις περιόδους ίδιας διάρκειας Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, που διαφέρουν ως προς την καταναλωτική κίνηση.

	Α	Β	Γ	Δ
Π_1	α	β	γ	δ
Π_2	α	β	γ	δ
Π_3	α	β	γ	δ
Π_4	α	β	γ	δ

Συστηματική επιλογή

Κάθε συσκευασία διατέθηκε από ένα μόνο κατάστημα.Οι διαφορές μπορεί να οφείλονται μόνο στα καταστήματα

	Α	Β	Γ	Δ
Π_1	α	δ	β	δ
Π_2	γ	β	α	δ
Π_3	β	α	δ	β
Π_4	γ	γ	δ	γ

Τυχαία επιλογή

Η δ επελέγη 5 φορές

η α 3 φορές

Ισορροπημένοι σχεδιασμοί

	Α	Β	Γ	Δ
Π_1	α	α	γ	δ
Π_2	β	γ	δ	β
Π_3	γ	β	α	α
Π_4	δ	δ	β	γ

Στρωματοποιημένη Τυχαία επιλογή (ανά κατάστημα)

Η α διατέθηκε σε δύο μόνο περιόδους

	Α	Β	Γ	Δ
Π_1	α	β	γ	δ
Π_2	β	γ	δ	α
Π_3	γ	δ	α	β
Π_4	δ	α	β	γ

ΒΙΒ σχεδιασμός

Κάθε συσκευασία 4 φορές, κάθε ζεύγος από 1 φορά

	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η
Π_1	α	β	γ	δ	ε	ζ	η
Π_2	β	γ	δ	ζ	η	α	ε
Π_3	γ	ζ	ε	η	α	β	δ
Π_4	δ	η	ζ	α	γ	ε	β

ΒΙΒ σχεδιασμός

Κάθε συσκευασία 4 φορές, κάθε ζεύγος από 2 φορές
Σε κάθε περίοδο όλες
Σε κάθε κατάστημα διαφορετικές

Παράδειγμα

Καθηγητής έχει επτά θέματα (τα 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7) και επτά μαθητές (τους Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ και Η). Είναι δυνατόν να δώσει σε κάθε μαθητή 3 θέματα με τρόπο ώστε κάθε ζεύγος θεμάτων να εξεταστεί από το ίδιο πλήθος μαθητών;

Επειδή κάθε τριάδα που σχηματίζεται δημιουργεί τρία ζεύγη συμβόλων, άρα οι 7 τριάδες που θα σχηματίσουμε θα έχουν $7\cdot3=21$ ζεύγη συμβόλων. Όμως, από την άλλη πλευρά, τα 7 σύμβολα σχηματίζουν $\binom{7}{2}=21$ διαφορετικά ζεύγη. Άρα το ζητούμενο είναι δυνατόν να κατασκευάζεται.

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η
123	145	167	246	257	347	356

Κ Πε Πα	Δ Πα Σ	Τρ Τε Πα	Κ Δ Τρ	Κ Τε Σ	Δ Τε Πε	Τρ Πε Σ

Κ, Δ, Τρ, Τε, Πε, Πα, Σ

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Ισοδύναμοι σχεδιασμοί

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ορισμός

(v, b, r, k, λ) – BIB σχεδιασμός

πλήθος επαναλήψεων
πλήθος ομάδων με ίδιο σύμβολο
replication number

σύμβολα
αντικείμενα
θεραπείες
ποικιλίες
treatments

ομάδες
μπλοκ
πειραματικές μονάδες
blocks

μέγεθος ομάδων
πλήθος συμβόλων σε κάθε ομάδα

συνδυαστότητα
πλήθος ομάδων με το ίδιο ζεύγος συμβόλων
covalency

v=b, r=k
συμμετρικός σχεδιασμός
(v, k, λ)-SBIB

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

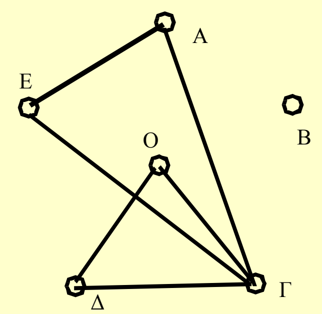
Ασκήσεις

Από τα σύμβολα 1,2,...,16 σχηματίζουμε 16 ομάδες με 6 σύμβολα η κάθε μία, με τρόπο ώστε η i-στή ομάδα να περιέχει όλα τα στοιχεία εκτός του i τα οποία βρίσκονται στην ίδια γραμμή ή στήλη με το i στο διπλανό πίνακα. Δείξτε ότι σχηματίζεται ένας BIB σχεδιασμός. Ποιες είναι οι παράμετροί του;

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(16, 16, 6, 6, 2)

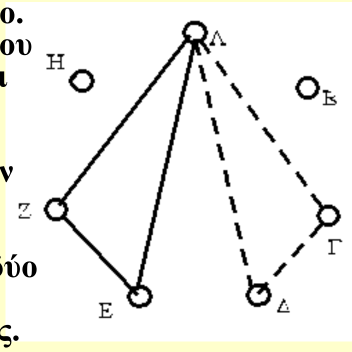
Θεωρείστε το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και το κέντρο του Ο. Σχηματίστε τώρα όλα τα τρίγωνα με κορυφές τα 6 σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ο, τα οποία έχουν μία μόνο πλευρά τους κοινή με πλευρά του πενταγώνου (δύο από αυτά έχουν ήδη σημειωθεί). Θεωρείστε τα σύνολα κορυφών των τριγώνων αυτών και δείξτε ότι είναι BIB σχεδιασμός.



(6, 10, 5, 3, 2)

Ασκήσεις

Το ΑΒΓΔΕΖΗ στο διπλανό σχήμα είναι κανονικό επτάγωνο. Σχηματίζουμε σκαληνά τρίγωνα με κορυφές τις κορυφές του επταγώνου. Δύο από αυτά είναι σημειωμένα στο σχήμα και μάλιστα παρατηρούμε ότι τα δύο αυτά τρίγωνα είναι κατοπτρικά ως προς τη διάμετρο του περιγεγραμμένου κύκλου που περνά από το Α. (α) Θεωρείστε το σύνολο όλων των υποσυνόλων κορυφών που σχηματίζουν σκαληνά τρίγωνα και δείξτε ότι αποτελούν ΒΙΒ-σχεδιασμό. (β) Χωρίστε το προηγούμενο σύνολο σκαληνών τριγώνων σε δύο υποσύνολα που το καθένα να περιέχει τα κατοπτρικά του άλλου και δείξτε ότι κάθε υποσύνολο είναι ΒΙΒ-σχεδιασμός.



α. (7, 14, 6, 3, 2), β. (7, 3, 3, 3, 1)

Έστω σύνολο S με v στοιχεία και B_k το σύνολο όλων των υποσυνόλων του με k στοιχεία. Αν θεωρηθούν τα στοιχεία του B_k ως ομάδες ενός σχεδιασμού, δείξτε ότι ο σχεδιασμός αυτός είναι ΒΙΒ. Ποιες είναι οι παράμετροί του;

$$\left(v, \binom{v}{k}, \binom{v-1}{k-1}, k, \binom{v-2}{k-2}\right) \qquad \left(v, \binom{v}{k}-b, \binom{v-1}{k-1}-r, k, \binom{v-2}{k-2}-\lambda\right)$$

Έστω D το σύνολο των ομάδων ενός ΒΙΒ σχεδιασμού με παραμέτρους (v, b, r, k, λ). Το D από τον ορισμό του, είναι ένα σύνολο k-συνόλων του S = {1, 2, 3, ..., v}. Έστω T το σύνολο όλων των k-συνόλων του S, που είναι διαφορετικά από αυτά του D. Δείξτε ότι το T είναι το σύνολο των ομάδων ενός ΒΙΒ σχεδιασμού και βρέστε τις παραμέτρους του.

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Συστήματα μειωμένης ανάπτυξης του ΛΟΤΤΟ

Με 9 αριθμούς στο Α, σε πλήρη ανάπτυξη έχουμε $\binom{9}{6}=84$ στήλες.

Με 9 αριθμούς στο Α, στο σύστημα μειωμένης ανάπτυξης 48 έχουμε 12 στήλες.

Το Ελληνικό ΛΟΤΤΟ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	6	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	2	7	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	3	8	Α
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	4	9	
41	42	43	44	45	46	47	48	49		5	0	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	6	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	2	7	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	3	8	Β
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	4	9	
41	42	43	44	45	46	47	48	49		5	0	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	6	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	2	7	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	3	8	Γ
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	4	9	
41	42	43	44	45	46	47	48	49		5	0	

(9, 12, 8, 6, 5) – ΒΙΒ σχεδιασμός

49: (10, 15, 9, 6, 5)–ΒΙΒ σχεδιασμός σχηματίζει 15 στήλες από 10 νούμερα,
57: (12, 22, 11, 6, 5)–ΒΙΒ σχεδιασμός σχηματίζει 22 στήλες από 12 νούμερα,

μερική ανάπτυξη

38: (8, 14, 7, 4, 3)- σχηματίζει 14 στήλες των 4 αριθμών από 8
47: (32, 1240, 155, 4, 15)- σχηματίζει 1240 στήλες των 4 από 32

Θεώρημα 3.1

Σε κάθε (v, b, r, k, λ) – BIB σχεδιασμό, ισχύουν

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha)\quad v\cdot r = b\cdot k \\ &\beta)\quad \lambda\cdot(v-1) = r\cdot(k-1) \end{aligned}}$$

σύνολο v συμβόλων

(α) $\mathcal{S}=\{t_1, t_2, \ldots, t_v\}$

r, r, r, …. r =v·r

σύνολο b ομάδων

$\mathcal{B}=\{B_1, B_2, \ldots, B_b\}$

k, k, k, …. k =b·k

(β) $\mathcal{B}_\alpha=\{B_{\alpha 1}, B_{\alpha 2}, \ldots, B_{\alpha r}\}$

k-1, k-1, …. k-1 =r·(k-1)

χωρίς το α

κάθε στοιχείο εκτός του α εμφανίζεται λ φορές μαζί με το α

λ·(v-1)

$\boxed{\text{Π.}\quad \mathbf{k < v}}$

Αν k=v τότε r=b ⇒ κάθε ομάδα όλα τα σύμβολα

Πίνακες Αντιστοίχισης

$A=(a_{ij})$ v×b πίνακας με $a_{ij} = \begin{cases} \alpha\nu\ \ t_i \in B_j \\ \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$

123	145	167	246	257	347	356

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0 \\ 1&0&0&0&0&1&1 \\ 1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

Κ Πε Πα	Δ Πα Σ	Τρ Τε Πα	Κ Δ Τρ	Κ Τε Σ	Δ Τε Πε	Τρ Πε Σ

Αν πάρουμε τις γραμμές A_2 με τη σειρά 6, 1, 5, 2, 7, 3, 4, δηλαδή αν εφαρμόσουμε στις γραμμές του A_2 τον αυτομορφισμό σ(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)=(6, 1, 5, 2, 7, 3, 4), προκύπτει ο A_1 (ισοδύναμοι σχεδιασμοί)

Παράδειγμα

$\boxed{\times} \to 1$

$\boxed{} \to 0$

Πίνακας θέσεων του συστήματος 38 στο ΛΟΤΤΟ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	×	×	×	×	×	×	×							
2	×	×	×					×	×	×	×			
3	×			×	×			×	×			×	×	
4	×					×	×			×	×	×	×	
5		×		×		×		×		×		×		×
6		×			×		×		×		×	×		×
7			×		×	×		×			×		×	×
8			×	×			×		×	×			×	×

$$A_{38} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Θεώρημα 3.2

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

α) κάθε σύμβολο r φορές $\Rightarrow$ $A\cdot\mathbf{1}_b = r\cdot\mathbf{1}_v$ ή $A\cdot J_b = r\cdot J_{vb}$

β) κάθε ομάδα k σύμβολα $\Rightarrow$ $\mathbf{1}'_v\cdot A = k\cdot\mathbf{1}'_b$ ή $J_v\cdot A = k\cdot J_{vb}$

γ)

$$A\cdot A' = \begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & r \end{pmatrix} = (r-\lambda)I_v + \lambda J_v.$$

κάθε γραμμή έχει
r μονάδες και b-r 0-κά

κάθε δύο γραμμές
λ κοινές μονάδες

Θεώρημα 3.3 (Αντίστροφο)

Αν ένας (0,1) πίνακας τάξης v×b ικανοποιεί τις: $A \cdot A' = (r-\lambda)I_v + \lambda J_v$
τότε ο A είναι πίνακας αντιστοίχισης ενός (v,b,r,k,λ)–BIB σχεδιασμού.

$$J_v \cdot A = kJ_{vb}$$

πλήρως συμμετρικός πίνακας

Λήμμα

Για τον πλήρως συμμετρικό πίνακα $A=\alpha I_n+\beta J_n$ ισχύει:

$$\boxed{|A| = \alpha^{n-1}(\alpha+n\beta)} \qquad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\alpha}I_n - \frac{\beta}{\alpha(\alpha+n\beta)}J_n}$$

β) Έστω $A^{-1} = xI_n + yJ_n$ τότε

$$AA^{-1} = (\alpha I_n + \beta J_n)(xI_n + yJ_n) = \alpha x I_n + (\alpha y + \beta x + \beta yn)J_n$$

$$J_n \cdot J_n = nJ_n$$

$=1$

$=0$

Ορίζουσα |αI+βJ|

$$|A| = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha+\beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha+\beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+n\beta & \alpha+n\beta & \cdots & \alpha+n\beta \\ \beta & \alpha+\beta & \cdots & \beta \\ \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & \alpha+\beta \end{pmatrix} =$$

$$= (\alpha+n\beta)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \beta & \alpha+\beta & \cdots & \beta \\ \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = (\alpha+n\beta)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha^{n-1}(\alpha+n\beta).$$

Μωυσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Θεώρημα 3.4 (Ανισότητα Fisher)

Για κάθε (v, b, r, k, λ)-BIB σχεδιασμό ισχύει $b \geq v$ και $r \geq k$.

Απόδειξη

Αν r=λ τότε v=k, b=r=λ, δηλαδή όχι BIB. Άρα **λ<r**.

$$|AA'| = |(r-\lambda)I_v + \lambda J_v| = (r-\lambda)^{v-1}\left(r - \lambda(v-1)\right) = (r-\lambda)^{v-1} r k > 0$$

άρα A μη-ιδιάζων ή ισοδύναμα ο AA΄ έχει βαθμό v

Αν b<v τότε

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1b} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2b} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vb} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B \cdot B' = A \cdot A'$$

$$|B \cdot B'| = |A \cdot A'| \neq 0$$

άτοπο

Β΄ τρόπος

$$v = rank(AA') \leq rankA \leq \min(v,b)$$

Δυϊκός σχεδιασμός

σύμβολα → ομάδες
ομάδες → σύμβολα

$B_1 = \{1,2,3\}$	$B_5 = \{2,5,8\}$	$B_9 = \{3,4,8\}$
$B_2 = \{4,5,6\}$	$B_6 = \{3,6,9\}$	$B_{10} = \{1,6,8\}$
$B_3 = \{7,8,9\}$	$B_7 = \{1,5,9\}$	$B_{11} = \{3,5,7\}$
$B_4 = \{1,4,7\}$	$B_8 = \{2,6,7\}$	$B_{12} = \{2,4,9\}$

$\Rightarrow$

$\bar{1} = \{B_1, B_4, B_7, B_{10}\}$	$\bar{6} = \{B_2, B_6, B_8, B_{10}\}$
$\bar{2} = \{B_1, B_5, B_8, B_{12}\}$	$\bar{7} = \{B_3, B_4, B_8, B_{11}\}$
$\bar{3} = \{B_1, B_6, B_9, B_{11}\}$	$\bar{8} = \{B_3, B_5, B_9, B_{10}\}$
$\bar{4} = \{B_2, B_4, B_9, B_{12}\}$	$\bar{9} = \{B_3, B_6, B_7, B_{12}\}$
$\bar{5} = \{B_2, B_5, B_7, B_{11}\}$	

πότε είναι BIB ;

Ζευγαρωτός σχεδιασμός

$$S,\ B \rightarrow \begin{array}{l} \mathcal{S}^* = \{xy : x \in \mathcal{S},\ y \in \mathcal{S},\ x \neq y\} \\ B^* = \{xy : x \in B,\ y \in B,\ x \neq y\} \end{array}$$

$B_1=\{1,2,3\}$, $B_2=\{1,4,5\}$, $B_3=\{1,6,7\}$, $B_4=\{2,4,6\}$, $B_5=\{2,5,7\}$, $B_6=\{3,4,7\}$, $B_7=\{3,5,6\}$

$\Rightarrow$

$B_1^*=\{12,13,23\}$ $B_4^*=\{24,26,46\}$ $B_6^*=\{34,37,47\}$

$B_2^*=\{14,15,45\}$ $B_5^*=\{25,27,57\}$ $B_7^*=\{35,36,56\}$

$B_3^*=\{16,17,67\}$

δεν είναι BIB !

Συμπληρωματικός σχεδιασμός

$$S,\ \{B_1,\dots,B_b\} \rightarrow S,\ \{B'_1,\dots,B'_b\}$$

$B_1 = \{1,2,3\}$	$B_5 = \{2,5,8\}$	$B_9 = \{3,4,8\}$
$B_2 = \{4,5,6\}$	$B_6 = \{3,6,9\}$	$B_{10} = \{1,6,8\}$
$B_3 = \{7,8,9\}$	$B_7 = \{1,5,9\}$	$B_{11} = \{3,5,7\}$
$B_4 = \{1,4,7\}$	$B_8 = \{2,6,7\}$	$B_{12} = \{2,4,9\}$

$\Rightarrow$

$B'_1 = \{4,5,6,7,8,9\}$	$B'_5 = \{1,3,4,6,7,9\}$	$B'_9 = \{1,2,5,6,7,9\}$
$B'_2 = \{1,2,3,7,8,9\}$	$B'_6 = \{1,2,4,5,7,8\}$	$B'_{10} = \{2,3,4,5,7,9\}$
$B'_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$	$B'_7 = \{2,3,4,6,7,8\}$	$B'_{11} = \{1,2,4,6,8,9\}$
$B'_4 = \{2,3,5,6,8,9\}$	$B'_8 = \{1,3,4,5,8,9\}$	$B'_{12} = \{1,3,5,6,7,8\}$

Θ. (v,b,r,k,λ) → (v,b,b-r,v-k,b-2r+λ)

ομάδες αρχικού σχεδιασμού που περιέχουν	x	x	όχι x	όχι x
	y	όχι y	y	όχι y
πλήθος	λ	r−λ	r−λ	λ΄

Πολλαπλάσια σχεδιασμών

$$S,\ \{B_1,\dots,B_b\} \rightarrow S,\ \{\boxed{B_1,\dots,B_1},\dots,\boxed{B_b,\dots,B_b}\}$$

d φορές

(v,b,r,k,λ) → (v,db,dr,k,dλ)

Παραγόμενος - Υπολειπόμενος σχεδ.

(v, k, λ)– SBIB, με ομάδες $B_1,\dots,B_b$

$B_1 \cap B_v,\ \dots,\ B_{v-1} \cap B_v$

$B_1 - B_v,\ \dots,\ B_{v-1} - B_v$

(k, v-1, k-1, λ, λ-1)-BIB

	αρχικός σχεδιασμός (15,15,7,7,3)	υπολειπόμενος ως προς B_{15} (8,14,7,4,3)-BIB σχεδιασμός	παραγόμενος ως προς B_{15} (7,14,6,3,2)-BIB σχεδιασμός
B_1	1, 2, 3, 4, 9,10,12	1, 2, 3, 4	9,10,12
B_2	5, 6, 7, 8, 9,10,12	5, 6, 7, 8	9,10,12
B_3	1, 2, 7, 8,10,11,13	1, 2, 7, 8	10,11,13
B_4	3, 4, 5, 6,10,11,13	3, 4, 5, 6	10,11,13
B_5	1, 3, 6, 8,11,12,14	1, 3, 6, 8	11,12,14
B_6	2, 4, 5, 7,11,12,14	2, 4, 5, 7	11,12,14
B_7	1, 4, 6, 7,12,13,15	1, 4, 6, 7	12,13,15
B_8	2, 3, 5, 8,12,13,15	2, 3, 5, 8	12,13,15
B_9	1, 2, 5, 6, 9,13,14	1, 2, 5, 6	9,13,14
B_{10}	3, 4, 7, 8, 9,13,14	3, 4, 7, 8	9,13,14
B_{11}	1, 3, 5, 7,10,14,15	1, 3, 5, 7	10,14,15
B_{12}	2, 4, 6, 8,10,14,15	2, 4, 6, 8	10,14,15
B_{13}	1, 4, 5, 8, 9,11,15	1, 4, 5, 8	9,11,15
B_{14}	2, 3, 6, 7, 9,11,15	2, 3, 6, 7	9,11,15
B_{15}	9,10,11,12,13,14,15		

(v-k, v-1, k, k-λ, λ)-BIB

Θεωρήματα (ύπαρξης -κατασκευής)

Θ. Εμφύτευσης. (Hall-Connor). Αν λ=1 ή 2, τότε: ο (v-k, v-1, k, k-λ, λ)- BIB σχεδιασμός είναι υπολειπόμενος σχεδιασμός ενός (v, v, k, k, λ)-BIB σχεδιασμού

Το θεώρημα δεν ισχύει για μεγαλύτερες τιμές του λ. Ο Bhattacharya κατασκεύασε, το 1944, έναν (16,24,9,6,3)-BIB σχεδιασμό του οποίου δύο ομάδες έχουν 4 (>λ) κοινά στοιχεία, πράγμα που αποδεικνύει (βλ. Π. παρακάτω) ότι δεν εμφυτεύεται στον αντίστοιχο (25,9,3)-SBIB σχεδιασμό.

Θ. (Ryser). Αν A μη-ιδιάζων v×v πίνακας που ικανοποιεί

μία από τις :

$i.\quad AA' = (k - \lambda)I + \lambda J$

$ii.\quad A'A = (k - \lambda)I + \lambda J$

και μία από τις:

$iii.\quad AJ = kJ$

$iv.\quad JA = kJ$

τότε ο A θα ικανοποιεί και τις τέσσερις σχέσεις και επιπλέον **k^2-k=λ(v-1)**

Π. Σε έναν συμμετρικό BIB-σχεδιασμό, κάθε δύο ομάδες περιέχουν ακριβώς λ κοινά στοιχεία.

Θεωρήματα (συνέχεια)

Θ. Ο δυϊκός του (v, b, r, k, λ)-σχεδιασμού είναι BIB αν-ν b = v, δηλ. αν και μόνο αν ο αρχικός είναι συμμετρικός.

Θ. (Bruck-Ryser-Chowla). Αν υπάρχει ένας συμμετρικός BIB-σχεδιασμός με παραμέτρους v, k, λ θα ισχύει:

(α) Αν v άρτιος, ο αριθμός k-λ είναι τέλειο τετράγωνο.

(β) Αν v περιττός η διοφαντική εξίσωση

$$z^2 = (k - \lambda)x^2 + (-1)^{(v-1)/2}\lambda y^2$$

έχει μη μηδενική λύση

Υπάρχει συμμετρικός BIB-σχεδιασμός με παραμέτρους (29, 8, 2);

ΟΧΙ διότι $\boxed{z^2 = 6x^2 + 2y^2}$ δεν έχει ακέραιες λύσεις

μία απόδειξη με διαιρετότητα

Πεπερασμένα Σώματα

GF(q) σώμα q στοιχείων χαρακτηριστικής p $\underbrace{x+x+\ldots+x}_{\text{p φορές}}=0$

GF(3)

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

GF(2^2)

+	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

·	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Τετραγωνικά υπόλοιπα

q, (q≠0) : $x^2=q$ έχει λύση στο σώμα

GF(3) το 1
GF(2^2), τα 1, α, β

Σύμβολο Legendre $\left(\frac{b}{p}\right)$
(p περιττός πρώτος)

1 αν b τ.υ. modp
-1 αλλιώς

Σύμβολο Hilbert $(b,c)_p$
(p φυσικός ή ∞)

1 αν $bx^2+cy^2\equiv z^2 \bmod p^m$
έχει ακέραιες λύσεις (m οτιδήποτε)
-1 αλλιώς

Ιδιότητες συμβόλων Legendre-Hilbert

1. $\left(\frac{b}{p}\right)=\left(\frac{c}{p}\right)$, αν b≡cmodp
2. $b^{\frac{p-1}{2}}\equiv\left(\frac{b}{p}\right)\bmod p$
3. $\left(\frac{bc}{p}\right)=\left(\frac{b}{p}\right)\cdot\left(\frac{c}{p}\right)$
4. $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$
5. $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$
6. $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$
7. $\prod_{p\ \text{πρώτος ή}\ \infty}(b,c)_p=1$
8. $(b,-b)_p=1$
9. $(b,c)_p=(c,b)_p$
10. $(b_1b_2,c)_p=(b_1,c)_p(b_2,c)_p$
11. $(bd^2,ce^2)_p=(b,c)_p$
12. $(b^2,c)_p=1$
13. $(b,c)_p=1$ αν p περιττός πρώτος και b,c πρώτοι προς τον p.
14. $(b,p)_p=\left(\frac{b}{p}\right)$, αν b ≢ 0modp και p περιττός πρώτος.
15. $(p,p)_p=(-1,p)_p$, αν p περιττός πρώτος.
16. $(b_1,c)_p=(b_2,c)_p$, αν $b_1\equiv b_2\not\equiv 0 \bmod p$ και p περιττός πρώτος.

$\boxed{z^2=6x^2+2y^2}$ $(6,2)_3\overset{(10)}{=}(2,2)_3\cdot(3,2)_3\overset{(13)}{=}1\cdot(3,2)_3\overset{(9)}{=}(2,3)_3\overset{(14)}{=}\left(\frac{2}{3}\right)\overset{(5)}{=}(-1)^{\frac{3^2-1}{8}}=-1$

Τριπλέτες Steiner

(v,b,r,3,1)-BIB $\Rightarrow$ $b=v(v-1)/6$, $r=(v-1)/2$ $\Rightarrow$ (6t+1, t(6t+1), 3t, 3, 1)
(6t+3, (3t+1)(2t+1), 3t+1, 3, 1)

Μέθοδος 1. Κατασκευή για v=6t+3=3m.

S={0,1,…,m-1, $\Leftarrow a_i$
m,…,2m-1, $\Leftarrow b_i$
2m,…,3m-1} $\Leftarrow c_i$

m τριπλέτες της μορφής $\{a_i, b_i, c_i\}$, i=0,1,...,m-1

$\binom{m}{2}$ τριπλέτες της μορφής $\{a_i, a_j, b_k\}$, $i\neq j$, $i+j\equiv k \bmod m$

$\binom{m}{2}$ τριπλέτες της μορφής $\{b_i, b_j, c_k\}$, $i\neq j$, $i+j\equiv k \bmod m$

$\binom{m}{2}$ τριπλέτες της μορφής $\{c_i, c_j, a_k\}$, $i\neq j$, $i+j\equiv k \bmod m$

S={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

a_i: {0, 1, 2},
b_i: {3, 4, 5},
c_i: {6, 7, 8}.

{036, 147, 258},
{014, 025, 123},
{347, 358, 456},
{671, 682, 780}.

Τριπλέτες Steiner (συνέχεια)

Μέθοδος 2. Κατασκευή για $v=6t+1 = p^n$ (για κάποιο p πρώτο).

Έστω x πρωταρχική ρίζα του $GF(p^n)$

t τριπλέτες $\rightarrow$ $\{x^i, x^{2t+i}, x^{4t+i}\}$, i=0, 1, ..., (t-1).

προσθέτουμε,(modp), διαδοχικά s,
s=1, 2, ..., 6t, σχηματίζοντας b=6v ομάδες

$v=6\cdot 2+1=13^1$

$GF(13)=Z_{13}=\{0, 1, 2, ...,12\}$

x=2 είναι πρωταρχική ρίζα

$2^0, 2^1, ..., 2^{11}$
1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7

$B_1=\{2^0, 2^4, 2^8\}=$	$B_2=\{2^1, 2^5, 2^9\}=$
$=\boxed{\{1, 3, 9\}}$	$=\boxed{\{2, 6, 5\}}$
{2, 4, 10}	{3, 7, 6}
{3, 5, 11}	{4, 8, 7}
{4, 6, 12}	{5, 9, 8}
{5, 7, 0}	{6, 10, 9}
{6, 8, 1}	{7, 11, 10}
{7, 9, 2}	{8, 12, 11}
{8, 10, 3}	{9, 0, 12}
{9, 11, 4}	{10, 1, 0}
{10, 12, 5}	{11, 2, 1}
{11, 0, 6}	{12, 3, 2}
{12, 1, 7}	{0, 4, 3}
{0, 2, 8}	{1, 5, 4}

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

- **Πίνακες Hadamard**
- **Σύνολα Διαφορών**
- **Πεπερασμένες Γεωμετρίες**
- **Λατινικά τετράγωνα**
- **(0, 1) - Πίνακες**

Μωυσιάδης Χρόνης
Ζ΄ Εξάμηνο Μαθηματικών 2007-08

Μωυσιάδης Πολ.-Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Πίνακες Hadamard

n×n δυαδικός πίνακας H με στοιχεία 1 και -1 που ικανοποιεί τη σχέση $\boxed{HH' = nI_n}$

Θ. Αν $\mathbf{h}_i'$, i=1,2,...,n, είναι τα διανύσματα-γραμμές ενός (1,-1)-πίνακα H, τότε ο H είναι Hadamard αν και μόνο αν τα διανύσματα αυτά είναι ανά δύο ορθογώνια.

$$HH' = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1' \\ \mathbf{h}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{h}_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1'\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_1'\mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_1'\mathbf{h}_n \\ \mathbf{h}_2'\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2'\mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_2'\mathbf{h}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}_n'\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_n'\mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_n'\mathbf{h}_n \end{pmatrix}$$

Θ. α) $|H| = n^{n/2}$ $\Longrightarrow$ $|H|^2 = |HH'| = |nI_n| = n^n$

β) H΄ είναι Hadamard $\Longrightarrow$ $H^{-1}(HH')H = H^{-1}\, n\, I_n H$

γ) Ο πίνακας H παραμένει Hadamard με εναλλαγή οποιωνδήποτε δύο γραμμών ή/και στηλών του, είτε με πολλαπλασιασμό κάποιων γραμμών ή/και στηλών του επί -1

Η-Ισοδυναμία - κανονική μορφή

Πίνακες Hadamard που προκύπτουν ο ένας από τον άλλο με εναλλαγή γραμμών ή/και στηλών, είτε με πολλαπλασιασμό γραμμών ή/και στηλών με -1 θα λέγονται **Η-ισοδύναμοι**.

Ένας πίνακας Hadamard λέμε ότι είναι σε κανονική μορφή αν γράφεται με τη μορφή

$$H=\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1}'_{n-1} \\ \mathbf{1}_{n-1} & A \end{pmatrix}$$

πυρήνας

Παρατήρηση

Ο Hadamard απέδειξε την πρόταση: Αν $A=(a_{ij})$ είναι $n\times n$ πίνακας με $|a_{ij}|\leq 1$, i, j =1, 2, .., n, τότε: $|A|\leq n^{n/2}$
με ισότητα αν $a_{ij}=\pm 1$ και $A A'=n I_n$ (δηλ. αν A είναι Hadamard)

Τάξη Η-πινάκων

Θ. Η τάξη n ενός πίνακα Hadamard είναι 1 ή 2 ή πολλ(4).

$$H_1=(1)$$

$$H_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{h}'_1$:	1 1 1 ... 1	1 1 1 ... 1	1 1 1 ... 1	1 1 1 ... 1
$\mathbf{h}'_2$:	1 1 1 ... 1	1 1 1 ... 1	-1 -1 -1 ...-1	-1 -1 -1 ...-1
$\mathbf{h}'_3$:	1 1 1 ... 1	-1 -1 -1 ...-1	1 1 1 ... 1	-1 -1 -1 ...-1
	x	y	z	w

$$\begin{aligned} & x+y+z+w=n \\ \mathbf{h}'_1\mathbf{h}_2 &= x+y-z-w=0 \\ \mathbf{h}'_1\mathbf{h}_3 &= x-y+z-w=0 \\ \mathbf{h}'_2\mathbf{h}_3 &= x-y-z+w=0 \end{aligned}$$

$$\boxed{x=y=z=w=\frac{n}{4}}$$

Το Θεώρημα δεν ισχύει αντίστροφα. Δηλαδή, δεν είναι βέβαιο ότι αν n≡0mod4 τότε υπάρχει πίνακας Hadamard τάξης n.

Μικρότερος n που δεν κατασκευάστηκε είναι ο n=428

Σχέση με σχεδιασμούς

Θ. Η ύπαρξη ενός πίνακα Hadamard τάξης 4t συνεπάγεται την ύπαρξη ενός (4t-1,2t-1,t-1)– SBIB σχεδιασμού και αντίστροφα.

$$H=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & & & \\ \vdots & & A & \\ 1 & & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{1}'_{4t-1}\\ \mathbf{1}_{4t-1} & A\end{pmatrix}\Rightarrow HH'=\begin{pmatrix}4t & \mathbf{1}'+\mathbf{1}'\cdot A'\\ \mathbf{1}+A\cdot\mathbf{1} & \mathbf{1}\cdot\mathbf{1}'+A\cdot A'\end{pmatrix}=4t\cdot I_{4t}$$

$$A\cdot J=-J$$
$$A\cdot A'=4t\,I-J$$

$$\boxed{B=\frac{1}{2}(A+J)}$$

$$B\cdot J=(2t-1)J$$
$$B\cdot B'=t\,I+(t-1)J$$

Όμοια

(4t-1, 4t-1, 2t-1, 2t-1, t-1)-BIB

Και Αντίστροφα

$$\Gamma=\frac{1}{2}(J-A)$$

Συμπληρωματικός BIB-σχεδιασμός

H-πίνακες Τύπου Sylvester

Γινόμενο Kronecker

$$A\times B=\begin{pmatrix}\alpha_{11}B & \alpha_{12}B & & \alpha_{1n}B\\ \alpha_{21}B & \alpha_{22}B & & \alpha_{2n}B\\ & & & \\ \alpha_{m1}B & \alpha_{m2}B & & \alpha_{mn}B\end{pmatrix}$$

Θ. K : H_n , L : H_r τότε K×L : H_{nr}

$$H\cdot H'=(K\times L)\cdot(K\times L)'=$$
$$=(K\times L)\cdot(K'\times L')=$$
$$=(K\cdot K')\times(L\cdot L')=$$
$$=n\,I_n\times r\,I_r=n\,r\,I_{nr}$$

Ιδιότητες

- λ(A×B) = (λA)×B, λ∈ ,
- λ(A×B) = A×(λB), λ∈ ,
- $(A_1+A_2)\times B = (A_1\times B)+(A_2\times B)$,
- $A\times(B_1+B_2) = (A\times B_1)+(A\times B_2)$,
- (A×B)×Γ = A×(B×Γ),
- (A×B)′ = A′×B′,
- $(A_1\times B_1)\cdot(A_2\times B_2) = (A_1\cdot A_2)\times(B_1\cdot B_2)$.

Παράδειγμα $H_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$H_2\times H_2=H_4$

$H_4\times H_2=H_8$

τύπου Sylvester

H-πίνακες Τύπου Paley

Θ. Paley $q=p^n \equiv -1 \bmod 4$ και GF(q). τότε ο $(q+1)\times(q+1)$ πίν. $P=(p_{ij})$ με:
με $i,j=\infty,0,1,\ldots,q-1$
είναι H-πίνακας.

$$p_{ij}=\begin{cases}+1, & \alpha\nu\ i=\infty\ \acute{\eta}\ j=\infty\\ -1, & \alpha\nu\ i=j\neq\infty\\ +1, & \alpha\nu\ i-j\ \tau.\upsilon.\ \sigma\tau o\ GF(q)\\ -1, & \alpha\nu\ i-j\ \mu\eta-\tau.\upsilon.\end{cases}$$

Παράδειγμα
q=11≡–1mod4
$Z_{11}=\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$
είναι το GF(11)

(4t-1, 2t-1, t-1)–SBIB

$$\begin{array}{c}\infty\\0\\1\\ \\ \\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \\ \\ \\ 11\end{array}\quad H=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&-1&-1&1&-1&-1&-1&1&1&1&-1&1\\1&1&-1&-1&1&-1&-1&-1&1&1&1&-1\\1&-1&1&-1&-1&1&-1&-1&-1&1&1&1\\1&1&-1&1&-1&-1&1&-1&-1&-1&1&1\\1&1&1&-1&1&-1&-1&1&-1&-1&-1&1\\1&1&1&1&-1&1&-1&-1&1&-1&-1&-1\\1&-1&1&1&1&-1&1&-1&-1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1&1&1&-1&1&-1&-1&1&-1\\1&-1&-1&-1&1&1&1&-1&1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1&-1&1&1&1&-1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1&-1&-1&1&1&1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

H-πίνακες Τύπου Williamson

Θ. Williamson. A, B, C, D, συμμετρικοί, αντιμεταθετοί (1,-1)-πίνακες τάξης n με:

$$A^2+B^2+C^2+D^2=4n\, I_n$$

$$H=\begin{pmatrix}A&B&C&D\\-B&A&-D&C\\-C&D&A&-B\\-D&-C&B&A\end{pmatrix}$$

$$HH'=\begin{pmatrix}A^2+B^2+C^2+D^2&0&0&0\\0&A^2+B^2+C^2+D^2&0&0\\0&0&A^2+B^2+C^2+D^2&0\\0&0&0&A^2+B^2+C^2+D^2\end{pmatrix}$$

Παράδ. $A=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}$

$B=C=D=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}$

$$A^2+B^2+C^2+D^2=$$
$$\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&0&0\\0&12&0\\0&0&12\end{pmatrix}$$

Σύνολα Διαφορών

$D=\{d_1, d_2,\ldots,d_k\}$ λέγεται (v,k,λ)-σ.δ.

$d_1-d_2,\ldots, d_1- d_k$
$d_2-d_1,\ldots, d_2- d_k$
……………..
$d_k-d_1,\ldots, d_k- d_{k-1}$

$k(k-1)$ διαφορές

Είναι λ φορές το 1,
λ φορές το 2,
…………..
λ φορές το v

$\lambda(v-1)$ διαφορές

Π. Το $D=\{0, 1, 3, 9\}$ είναι (13, 4, 1)-σ.δ.

0-1=12	1-0= 1	3-0=3	9-0=9
0-3=10	1-3=11	3-1=2	9-1=8
0-9= 4	1-9= 5	3-9=7	9-3=6

Π. Το $D=\{1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17\}$ είναι ένα (19, 9, 4)-σ.δ.
Χρειάζονται $9\times 8=72$ διαφορές

Αλγόριθμος ελέγχου σ.δ.

1	4	5	6	7	9	11	16	17
3	1	1	1	2	$\boxed{2}$	5	1	3
4	2	2	3	4	7	6	4	6
5	3	4	5	9	8	$\boxed{9}$	7	7
...	...	...	10	10	11	...	...	...

Βήμα 1. Θέτουμε d(0,i), i=1,2,…,k, τα δοθέντα στοιχεία και μηδενίζουμε αθροιστές για τα στοιχεία 1, 2, ...,v-1.
Βήμα 2. Υπολογίζουμε k πρώτες διαφορές d(1,i)
d(1,i)= d(0,i+1)–d(0,i), i=1, 2, …, k, με d(0,k+1)=d(0,1), (αθροιστής)
Βήμα 3. Για j=2, έως k-1 υπολογίζουμε τις διαφορές d(j,i),
d(j,i)=d(j-1,i+1)+d(1,i), i=1, 2, …, k, με d(j-1,k+1)=d(j-1,1), (αθροιστής)
Βήμα 4. Ελέγχουμε αν όλοι οι αθροιστές έχουν κοινή τιμή (ίση με (k−1)·k/(v-1)), οπότε είναι σύνολο διαφορών.

πρόγραμμα differ.exe

Κυκλικοί πίνακες

ορισμός

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{n\text{-}1} & \alpha_n\\ \alpha_n & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n\text{-}2} & \alpha_{n\text{-}1}\\ \alpha_{n\text{-}1} & \alpha_n & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n\text{-}3} & \alpha_{n\text{-}2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \cdots & \alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_n & \alpha_1\end{pmatrix}$$

ισχύει $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{n\text{-}1},\alpha_n)'=(\alpha_1,\alpha_n,\alpha_{n\text{-}1},\ldots,\alpha_3,\alpha_2)$

$\alpha_2=\alpha_n$, $\alpha_3=\alpha_{n-1}$, …….., $\alpha_s=\alpha_{n+2-s}$, s=2, 3, [(n+1)/2]

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$ και συμμετρικός πίνακας

Ορισμός

Ένας συμμετρικός BIB σχεδιασμός, του οποίου ο πίνακας αντιστοίχισης είναι κυκλικός πίνακας, θα λέγεται κυκλικά συμμετρικός BIB σχεδιασμός.

Σχέση με BIB σχεδιασμούς

Θ. Οι θέσεις των μονάδων σε μία γραμμή ή στήλη του πίνακα αντιστοίχισης ενός (v, k, λ) **κυκλικά συμμετρικού** BIB σχεδιασμού, όπου οι γραμμές και στήλες αριθμούνται από 0 έως v-1, αποτελούν ένα (v, k, λ)- σύνολο διαφορών

d_1, d_2 …….

$$A=(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{\text{v-2}},\ \alpha_{\text{v-1}})$$

s-στή γραμμή $\alpha_s,\alpha_{1+s},\alpha_{2+s},\ldots,\alpha_{\text{v-2+s}},\alpha_{\text{v-1+s}}$

d_m+s, d_t +s …….

Στα $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ που είναι λ ισχύει $d_j=d_i+s$

για διάφορα i και j

$d_j-d_i=s$
έχει λ λύσεις
Αυτό
για κάθε s

ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

Ιδιότητες

Θ. $D=\{d_1, d_2,\ldots,d_k\}$ είναι (v,k,λ)-σ.δ., τότε:

1. Το σύνολο $D+s=\{d_1+s, d_2+s,\ldots,d_k+s\}$, (μετατόπιση του D), είναι επίσης (v,k,λ)-σύνολο διαφορών, για οποιοδήποτε s.

Τα στοιχεία του συνόλου D+s, έχουν αναχθεί modv.

Διαφορές στο D και στο D+s είναι ίδιες.

2. Για $t\in\mathbb{N}$, $(t,v)=1$, το σύνολο $tD=\{td_1, td_2,\ldots,td_k\}$ είναι επίσης (v, k, λ)-σ.δ. Τα στοιχεία του tD έχουν αναχθεί modv.

Από $(t,v)=1$ και $t(d_i-d_j)=0$ προκύπτει $d_i=d_j$

3. Το συμπληρωματικό σύνολο $D'=\{0, 1, 2,\ldots, v-1\}-D$, είναι επίσης σ.δ. με παραμέτρους (v, v-k, v-2k+λ) και λέγεται συμπληρωματικό σύνολο διαφορών του D.

Σχηματίζουμε το BIB σχ. παίρν. συμπληρωμ. και αντίστροφα

Π.χ, τα {1, 2, 4} και {0, 3, 5, 6} είναι συμπληρωματικά σ.δ. mod7, με παραμέτρους (7, 3,1) και (7, 4, 2) αντίστοιχα.

Μωυσιάδης Πολ.-Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Πολλαπλασιαστής

(v, k, λ) και (v΄, k΄, λ΄) συμπληρωματικά σ.δ. $\Rightarrow$ $k+k'=v$, $k-\lambda = k'-\lambda'$

Θέτοντας $n=k-\lambda$ ισχύει (για μη τετριμένα σ.δ.)

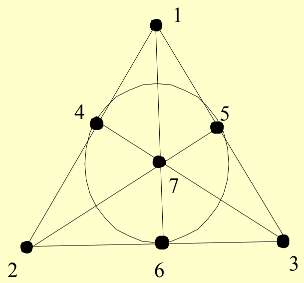
$$4n-1 \le v \le n^2+n+1$$

βοηθά στις κατασκευές

Αν για $t\in$, $(t,v)=1$, υπάρχει s : **tD=D+s**, όπου D το αρχικό σύνολο διαφορών, τότε το t λέγεται πολλαπλασιαστής του D.

π.χ. το t=3 είναι **πολλαπλασιαστής** του D={0, 1, 4, 6}mod13, διότι 3D=D+12.

Πεπερασμένες Γεωμετρίες



Σημεία 1, 2, …, 7

Γραμμές {1,4,2}, {2,6,3}, …, {4,5,6}

κάθε δύο γραμμές τέμνονται σε ένα σημείο

Γενικά

> G={A_1, A_2,..., A_n}, n *σημείων (points), και*
> $\mathcal{L}$=*{ℓ_1, ℓ_2,..., ℓ_m}, m γραμμών (lines), όπου $\ell_k \subseteq$ G.*

Αν A∈G ανήκει στην ℓ λέμε το A κείται στην ℓ ή
η ℓ διέρχεται από το A

Σημεία στη ίδια γραμμή λέγονται συγγραμμικά

Δύο γραμμές έχουν
το πολύ ένα κοινό σημείο

→ ένα κοινό τεμνόμενες

→ κανένα κοινό παράλληλες

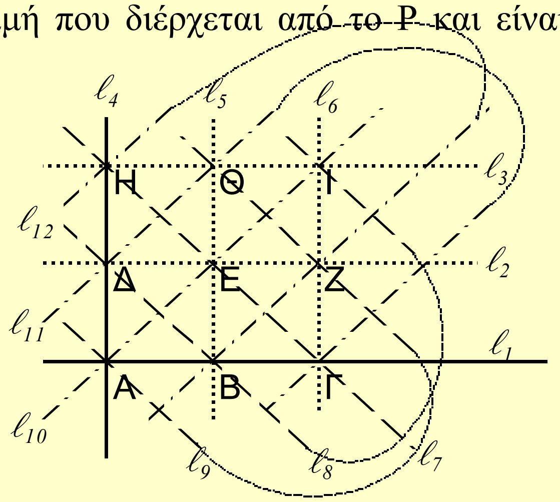
Πεπερασμένο αφφινικό επίπεδο

(G,$\mathcal{L}$) λέγεται *πεπερασμένη αφφινική γεωμετρία* (finite affine geometry) ή *πεπερασμένο αφφινικό επίπεδο* (finite affine plane), όταν ικανοποιούνται τα αξιώματα:

(Α1) Υπάρχει ακριβώς μία γραμμή, που διέρχεται από δύο οποιαδ. σημεία.
(Α2) Για κάθε δύο γραμμές, υπάρχει το πολύ ένα σημείο πού κείται και στις δύο.
(Α3) Υπάρχουν τέσσερα σημεία, τέτοια ώστε ανά τρία να μην είναι συγγραμ.
(Α4) Αν P ένα οποιοδήποτε σημείο και ℓ μία γραμμή που δεν διέρχεται από το P, τότε υπάρχει ακριβώς μία γραμμή που διέρχεται από το P και είναι παράλληλη με την ℓ.

Παράδειγμα
G={Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι}
$\mathcal{L}$={ℓ_1, ℓ_2,...,ℓ_{12}}

ℓ_1: Α Β Γ	ℓ_4: Α Δ Η	ℓ_7: Η Ε Γ	ℓ_{10}: Α Ε Ι
ℓ_2: Δ Ε Ζ	ℓ_5: Β Ε Θ	ℓ_8: Α Ζ Θ	ℓ_{11}: Β Ζ Η
ℓ_3: Η Θ Ι	ℓ_6: Γ Ζ Ι	ℓ_9: Β Δ Ι	ℓ_{12}: Γ Δ Θ



Πεπερασμένο προβολικό επίπεδο

(G,$\mathcal{L}$) λέγεται *πεπερασμένη προβολική γεωμετρία* (finite projective geometry) *ή πεπερασμένο προβολικό επίπεδο (finite projective plane), όταν ικανοποιούνται τα αξιώματα:*

*(*P1) Υπάρχει ακριβώς μία γραμμή, που διέρχεται από δύο οποιαδ. σημεία.

(P2) Υπάρχει ακριβώς ένα κοινό σημείο για οποιεσδήποτε δύο γραμμές.

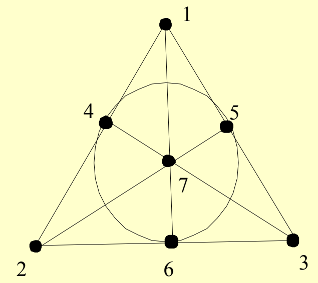
(P3) Υπάρχουν τέσσερα σημεία, τέτοια ώστε ανά τρία να μην είναι συγγραμμικά.

Παράδειγμα

G={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

$\mathcal{L}=\{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_7\}$

ℓ_1: 1 2 4	ℓ_3: 1 6 7	ℓ_5: 3 4 7	ℓ_7: 4 5 6
ℓ_2: 1 3 5	ℓ_4: 2 5 7	ℓ_8: 2 3 6	



Σχέση με BIB σχεδιασμούς

Θ. Αν θεωρήσουμε τις γραμμές ενός πεπερασμένου αφφινικού επιπέδου ως ομάδες και τα σημεία ως σύμβολα, τότε παίρνουμε έναν BIB-σχεδιασμό με παραμέτρους

$$(n^2, n^2+n, n+1, n, 1)$$

Ο φυσικός αριθμός n, λέγεται *τάξη* του αφφινικού επιπέδου.

Θ. Αν θεωρήσουμε τις γραμμές ενός πεπερασμένου προβολικού επιπέδου ως ομάδες και τα σημεία ως σύμβολα, τότε παίρνουμε ένα συμμετρικό BIB-σχεδιασμό με παραμέτρους

$$(n^2+n+1, n+1, 1)$$

Ο φυσικός αριθμός n, λέγεται *τάξη* του προβολικού επιπέδου.

ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εμφύτευση

Θ. Ένας $(n^2, n^2+n, n+1, n, 1)$ BIB-σχεδιασμός εμφυτεύεται με μοναδικό τρόπο σε έναν $(n^2+n+1, n+1, 1)$ συμμετρικό BIB-σχεδιασμό ή ισοδύναμα ένα αφφινικό επίπεδο επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε προβολικό.

1η παράλληλη δέσμη n σημείων
2η παράλληλη δέσμη n σημείων
……………………..
n+1 παράλληλη δέσμη n σημείων

1η
2η
…
n+1

n+1 επιπλέον σημεία

1 επιπλέον γραμμή

Θ. Αν ο n είναι δύναμη πρώτου αριθμού, τότε υπάρχει αφφινικό και προβολικό επίπεδο τάξης n, ή ισοδύναμα υπάρχουν οι BIB-σχεδιασμοί με παραμέτρους

$$(n^2, n^2+n, n+1, n, 1),$$
$$(n^2+n+1, n^2+n+1, n+1, n+1, 1).$$

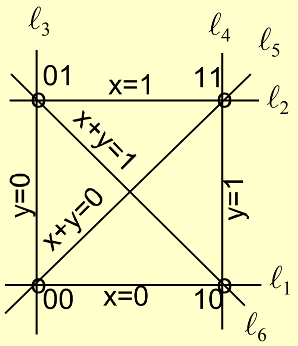
Παράδειγμα

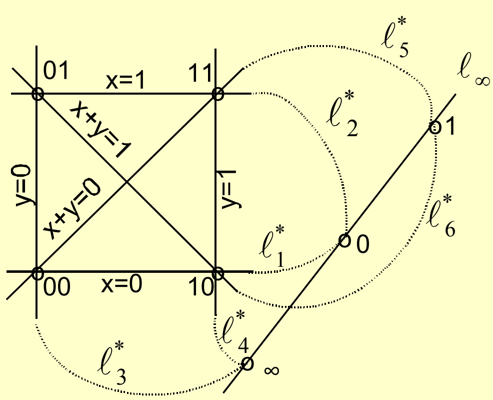
Κατασκευή αφφινικού και προβολικού επιπέδου τάξης n=2.

$GF(2)=\{0,1\} \Rightarrow \quad V = \{00, 01, 10, 00\}$

$T = \{\ \alpha x+\beta y+\gamma=0,$ όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}\ \}=$

$=\{\ \ell_1 : y=0,\ \ell_2 : y=1,\ \ell_3 : x=0,\ \ell_4 : x=1,\ \ell_5 : x+y=0,\ \ell_6 : x+y=1\ \}$





Λατινικά τετράγωνα

n^2 αξιωματικοί, κάθε n από ίδιο βαθμό και κάθε n από ίδια εθνικότητα. Τοποθέτηση σε τιμητικό σχηματισμό σε n-άδες, ώστε σε καμία από τις γραμμές ή τις στήλες του σχηματισμού να μην υπάρχουν αξιωματικοί ίδιας εθνικότητας ή ίδιου βαθμού;

$$\boxed{\begin{matrix} A\alpha & B\beta & \Gamma\gamma \\ \Gamma\beta & A\gamma & B\alpha \\ B\gamma & \Gamma\alpha & A\beta \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} A\alpha & B\beta & C\gamma & D\delta \\ B\gamma & A\delta & D\alpha & C\beta \\ C\delta & D\gamma & A\beta & B\alpha \\ D\beta & C\alpha & B\delta & A\gamma \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} A\alpha & B\beta & C\gamma & D\delta & E\varepsilon \\ B\gamma & C\delta & D\varepsilon & E\alpha & A\beta \\ C\varepsilon & D\alpha & E\beta & A\gamma & B\delta \\ D\beta & E\gamma & A\delta & B\varepsilon & C\alpha \\ E\delta & A\varepsilon & B\alpha & C\beta & D\gamma \end{matrix}}$$

Λατινικό τετράγωνο τάξης k

k×k πίνακας με τα πρώτα γράμματα του Λατινικού αλφαβήτου : σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη να εμφανίζονται όλα τα γράμματα από μία φορά ακριβώς.

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & \cdots & S & T \\ T & A & B & C & D & \cdots & \cdots & S \\ S & T & A & B & C & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & S & T & A & B & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B & C & D & E & \cdots & \cdots & T & A \end{pmatrix}$$

κανονική μορφή

Ορθογώνια λ.τ.

Θ. Για κάθε $k \geq 2$ το $k\times k$ τετράγωνο $L=(\ell_{ij})$με στοιχεία
$\ell_{ij}=i+j$, $i, j \in \mathbb{Z}_k$
είναι λατινικό τετράγωνο (η πρόσθεση εννοείται modk).

Αν $\ell_{ij}=\ell_{ij'}$, τότε $i+j=i+j'$ (και προσθ. $-i\in\mathbb{Z}_k$) $j=j'$

C	D	A	B	E
D	A	B	E	C
A	B	E	C	D
B	E	C	D	A
E	C	D	A	B

A	D	C	E	B
C	E	B	A	D
B	A	D	C	E
D	C	E	B	A
E	B	A	D	C

(αμοιβαία) ορθογώνια (mutual orthogonal)

$C\to A$, $D\to B$, $A\to C$, $B\to D$, $E\to E$

A	B	C	D	E
B	C	D	E	A
C	D	E	A	B
D	E	A	B	C
E	A	B	C	D

$A\to A$, $D\to B$, $C\to C$, $E\to D$, $B\to E$

A	B	C	D	E
C	D	E	A	B
E	A	B	C	D
B	C	D	E	A
D	E	A	B	C

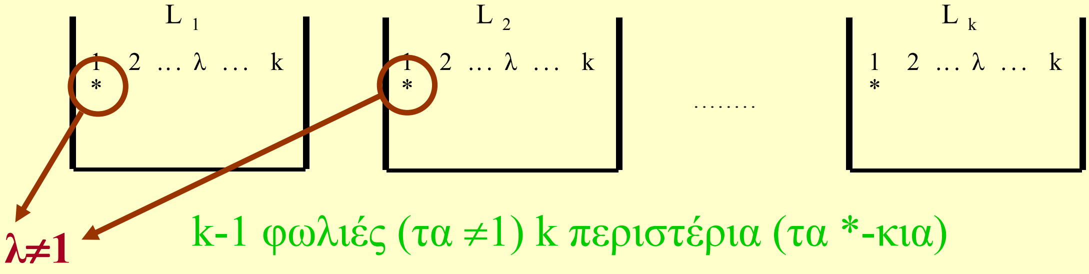
Σε κανονική μορφή

ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ

Μωυσιάδης Πολ.-Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Μέγιστο πλήθος ορθ.λ.τ.

Θ. Αν υπάρχει ορθογώνια οικογένεια r λατινικών τετραγώνων τάξης k, τότε θα πρέπει $r \le k-1$.



k-1 φωλιές (τα ≠1) k περιστέρια (τα *-κια)

$L_1=(\ell_{1;ij})$ και $L_2=(\ell_{2;ij})$ είναι αμοιβαία ορθ. αν για οποιοδήποτε διατεταγμένο ζεύγος (m,n) υπάρχει ακριβώς μία θέση (i,j), ώστε: $\ell_{1;ij}=m$ και $\ell_{2;ij}=n$

Θ. Έστω p πρώτος και $t \neq 0$ στοιχείο του $\mathbb{Z}_p$. Τότε $L_t=(\ell_{t;i\,j})$ με

$$\ell_{t\,;\,i\,j} = t \cdot i + j, \quad i, j \in \mathbb{Z}_p$$

είναι ορθογώνια οικογένεια λατινικών τετραγώνων. Δηλ. για $t \neq s$, τα λατινικά τετράγωνα L_t , L_s είναι αμοιβαία ορθογώνια.

Μουσιάδης Πολ.-Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Παραδείγματα

Π. Κατασκευή της πλήρους ορθογ. οικογ. λ.τ. τάξης 5.

$$L_1:\begin{array}{|ccccc|}\hline 0&1&2&3&4\\1&2&3&4&0\\2&3&4&0&1\\3&4&0&1&2\\4&0&1&2&3\\\hline\end{array}\quad L_2:\begin{array}{|ccccc|}\hline 0&1&2&3&4\\2&3&4&0&1\\4&0&1&2&3\\1&2&3&4&0\\3&4&0&1&2\\\hline\end{array}\quad L_3:\begin{array}{|ccccc|}\hline 0&1&2&3&4\\3&4&0&1&2\\1&2&3&4&0\\4&0&1&2&3\\2&3&4&0&1\\\hline\end{array}\quad L_4:\begin{array}{|ccccc|}\hline 0&1&2&3&4\\4&0&1&2&3\\3&4&0&1&2\\2&3&4&0&1\\1&2&3&4&0\\\hline\end{array}$$

Π. (Κατασκευή σχεδιασμών Yates). Με μια ορθογώνια οικογένειας λατινικών τετραγώνων τάξης 4, να κατασκευαστεί ο BIB σχεδιασμός με παραμέτρους (16, 20, 5, 4, 1).

$$L_1:\begin{array}{|cccc|}\hline 0&1&\alpha&\beta\\1&0&\beta&\alpha\\\alpha&\beta&0&1\\\beta&\alpha&1&0\\\hline\end{array}\quad L_\alpha:\begin{array}{|cccc|}\hline 0&1&\alpha&\beta\\\alpha&\beta&0&1\\\beta&\alpha&1&0\\1&0&\beta&\alpha\\\hline\end{array}\quad L_\beta:\begin{array}{|cccc|}\hline 0&1&\alpha&\beta\\\beta&\alpha&1&0\\1&0&\beta&\alpha\\\alpha&\beta&0&1\\\hline\end{array}$$

0→A, 1→B, α→C, β→D

Σχέση με BIB σχεδιασμούς

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

$B_1 : \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ $B_5 : \{1,\ 5,\ 9,\ 13\}$
$B_2 : \{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ $B_6 : \{2,\ 6,\ 10,\ 14\}$
$B_3 : \{9,\ 10,\ 11,\ 12\}$ $B_7 : \{3,\ 7,\ 11,\ 15\}$
$B_4 : \{13,\ 14,\ 15,\ 16\}$ $B_8 : \{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$

$B_9 : \{1,\ 6,\ 11,\ 16\}$ $B_{13} : \{1,\ 7,\ 12,\ 14\}$ $B_{17} : \{1,\ 8,\ 10,\ 15\}$
$B_{10} : \{2,\ 5,\ 12,\ 15\}$ $B_{14} : \{2,\ 8,\ 11,\ 13\}$ $B_{18} : \{2,\ 7,\ 9,\ 16\}$
$B_{11} : \{3,\ 8,\ 9,\ 14\}$ $B_{15} : \{3,\ 5,\ 10,\ 16\}$ $B_{19} : \{3,\ 6,\ 12,\ 13\}$
$B_{12} : \{4,\ 7,\ 10,\ 13\}$ $B_{16} : \{4,\ 6,\ 9,\ 15\}$ $B_{20} : \{4,\ 5,\ 11,\ 14\}$

Κατασκευές αμοιβ. ορθογ. λ.τ.

Αν $\boxed{k = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}}$ $\boxed{n(k) = \min\left\{p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \ldots, p_r^{n_r}\right\}}$

N(k) : μέγιστο πλήθος αμοιβαία ορθογωνίων λ.τ. τάξης k.

Εικασία Euler. Ο Euler είχε διατυπώσει το 1782 την εικασία ότι δεν υπάρχουν αμοιβαία ορθογώνια λατινικά τετράγωνα τάξης 4t+2, για οποιοδήποτε ακέραιο t.

Εικασία H.F.Mac Neish. Αφού ο Mac Neish απέδειξε (1922) ότι υπάρχουν πάντα n(k) αμοιβαία ορθογώνια λατινικά τετράγωνα τάξης k, διατύπωσε την εικασία n(k)=N(k)

Αν η εικασία του Mac Neish είναι αληθής τότε θα είναι αληθής και η εικασία του Euler. Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο.

Ιστορική αναδρομή

Το 1958 ο E.T.Parker κατέρριψε την εικασία Mac Neish

Το 1959-60 οι Bose-S.S.Shrikhande κατασκεύασαν δύο αμοιβαία ορθογώνια λατινικά τετράγωνα τάξης 22 και επέκτειναν τη μέθοδό τους για άπειρες τιμές της μορφής 2mod4, καταρρίπτοντας έτσι την Εικασία Euler.

Το 1959 ο E.T.Parker κατέρριψε την εικασία Euler για όλα τα $k=(3q+1)/2$, με $q\equiv 3\bmod 4$. Τελικά έδειξε ότι $N(k)\geq 2$ για $k>6$.

Ανοικτό μένει το πρόβλημα της συμπεριφοράς του N(k) για μεγάλες τιμές του k. Ένα καλό αποτέλεσμα στην κατεύθυνση αυτή είναι του R.M. Wilson το 1971, ότι $N(k) \geq k^{1/17}-2$ για μεγάλα k

Συστήματα διακεκρ. Αντιπροσ. SDR

διακεκριμένα

$x_1, x_2, \ldots, x_n$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$

SDR **1, 2, 5, 3, 4**

X={1, 2, 3, 4, 5, 6}

$A_1=\{1, 2, 3\}$
$A_2=\{1, 2, 4\}$
$A_3=\{1, 2, 5\}$
$A_4=\{3, 4, 5, 6\}$
$A_5=\{3, 4, 5, 6\}$

$B_1=\{1, 2\}$
$B_2=\{1, 3\}$
$B_3=\{1, 4\}$
$B_4=\{2, 3\}$
$B_5=\{2, 4\}$
$B_6=\{1, 2, 5\}$

$\nexists$ *SDR*

Θ. Hall's Marriage

$$\exists\ SDR \Leftrightarrow |A(J)| = \left|\bigcup_{j\in J} A_j\right| \geq |J|$$
$$\text{για όλα τα } J \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$$

συνθήκη Hall

$|B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4\cup B_5|=4<|J|$

Θ. Hall συνθ. Hall + $|A_i|\geq r$

$$\Rightarrow \text{πλήθος SDR's} \quad \begin{cases} r!, & \text{αν } r\leq n \\ r(r-1)\ldots(r-n+1), & \text{αν } r>n \end{cases}$$

Εφαρμογή στα λατινικά τετράγωνα

Θ. $A_i \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ α) $|A_i| = r$, για i=1, 2, ... n
β) κάθε στοιχείο του {1, 2, ..., n) περιέχεται σε ακριβώς r από τα σύνολα $A_1, A_2, ..., A_n$

ικανοπ. συνθήκη Hall
∃ τουλ. r! SDR's

1	2	3	4	5	6
3	1	6	5	4	2

2×6 λατινικό ορθογώνιο

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
2, 4, 5, 6	3, 4, 5, 6	1, 2, 4, 5	1, 2, 3, 6	1, 2, 3, 6	1, 3, 4, 5

Θ. k×n λατινικό ορθογ. (k<n)
Υπάρχουν (n-k)! για την k+1 γραμμή

Π. Το πλήθος των Λ.τ. τάξης n
= 1!·2!·...n!

Μαγικά τετράγωνα

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{r^2} k = \frac{r^2(r^2+1)}{2} = r \cdot A$$

				1													65
			6		2												
		11		7		3					11	24	7	20	3		65
	16		12		8		4				4	12	25	8	16		65
21		17		13		9		5			17	5	13	21	9		65
	22		18		14		10				10	18	1	14	22		65
		23		19		15					23	6	19	2	15		65
			24		20												
				25							65	65	65	65	65		65

Μοσχόπουλος

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

μ.τ. με τη βοήθεια λ.τ.

Θ. Έστω $L=(\ell_{ij})$, $\Lambda=(\lambda_{ij})$ αμοιβαία ορθογώνια λ.τ. τάξης r, τα οποία έχουν στις δύο διαγωνίους τους όλα τα σύμβολα.

i, $i=0,1, \ldots, r-1$, τα σύμβολα του L

j, $j=0,1, \ldots, r-1$, τα σύμβολα του Λ.

$M=(\mu_{ij})$ με $\mu_{ij}=r\cdot\ell_{ij}+\lambda_{ij}+1$, $i=0,1, \ldots, r-1$ και $j=0,1, \ldots, r-1$

Τότε το τετράγωνο M είναι μαγικό.

$$\times 4 \qquad\qquad + \qquad\qquad +1$$

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|cccc|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|cccc|}\hline 1 & 6 & 11 & 16 \\ 12 & 15 & 2 & 5 \\ 14 & 9 & 8 & 3 \\ 7 & 4 & 13 & 10 \\ \hline\end{array}$$

Μωυσιάδης Πολ.-Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

(0, 1) - ΠΙΝΑΚΕΣ

$$A=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&1 \\ 1&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

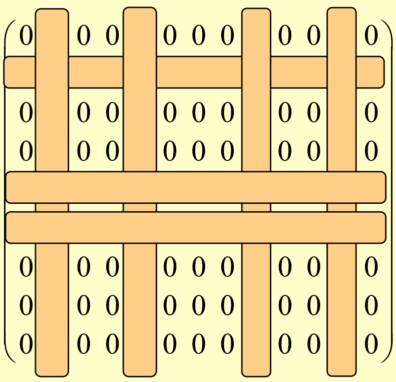
$$\mathbf{R}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{1_n}=(r_1, r_2, \ldots, r_m)'$$

$$\mathbf{S}=\mathbf{1}'_m\,\mathbf{A}\cdot=(s_1, s_2, \ldots, s_n)'$$

$$\mathbf{1}'_m\cdot\mathbf{R}=\sum_{j=1}^{m} r_j=r \qquad \mathbf{1}'_n\cdot\mathbf{S}=\sum_{i=1}^{n} s_i=r$$

$r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_m$ $\quad s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_n$

τότε A είναι σε **κανονική μορφή**.

$A_0=$ 

$$A_0=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&1 \\ 1&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

Μωυσιάδης Πολ.-Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Κάλυψη και Ανεξαρτησία

Θ. (König). Ο ελάχιστος αριθμός γραμμών ή/και στηλών που καλύπτουν όλες τις μονάδες ενός (0, 1) – πίνακα Α, είναι ίσος με το μέγιστο αριθμό “ανεξάρτητων” μονάδων του Α, μονάδων δηλαδή που μπορούν να επιλεγούν στον Α, έτσι ώστε να μην ανήκουν ανά δύο στην ίδια γραμμή ή στήλη.

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & 1 \\
1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot
\end{array}\right)
\qquad
A_2 = \left(\begin{array}{cccc|ccccccccc}
\cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right)$$

$S_1=\{4,5,8,10\}$, $S_2=\{7,10,11,12\}$, $S_3=\{4,6\}$ **4,7,6 SDR**

$R_1=\{5,6,9\}$, $R_2=\{4,8\}$, $R_3=\{6,9\}$, $R_4=\{5,7,9\}$ **5,4,6,7 SDR**

ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

- **Ορισμοί – Ιδιότητες**
- **Συνδετικότητα**
- **Επιπεδότητα**
- **Χρωματισμοί**

Μωυσιάδης Χρόνης
Ζ΄ Εξάμηνο Μαθηματικών 2007-08

Βασικές έννοιες

Γράφημα (graph) G(p,q)

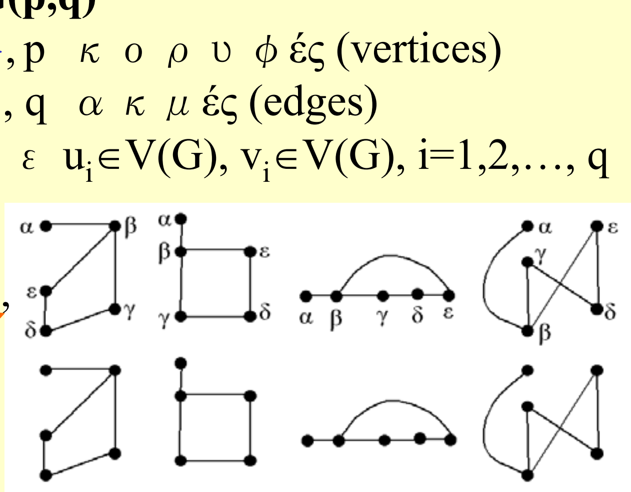
$V(G)=\{v_1, v_2,..., v_p\}$, p κορυφές (vertices)

$E(G)=\{x_1, x_2,..., x_q\}$, q ακμές (edges)

$x_i=\{u_i, v_i\}$ με $u_i \in V(G)$, $v_i \in V(G)$, i=1,2,…, q

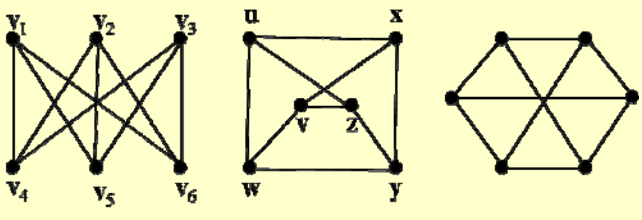
$V = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \}$,
$E = \{\{\alpha,\beta\},\{\beta,\gamma\},\{\gamma,\delta\},\{\delta,\varepsilon\},\{\beta,\varepsilon\}\}$

σημασμένα (labeled)



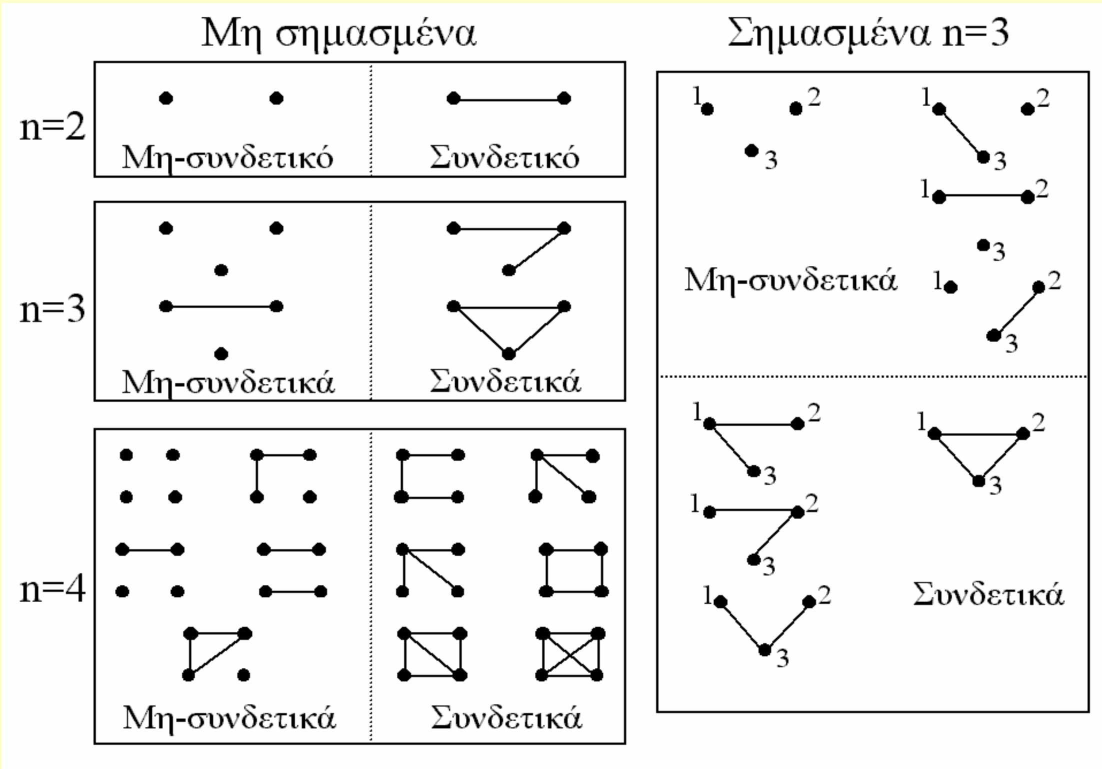
ισόμορφα γραφήματα

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
φ(v)	u	v	y	w	x	z



G_1 G_2 G_3

Γραφήματα για n=2,3,4



Πλήθος γραφημάτων

Το πλήθος των γραφημάτων p κορυφών και k ακμών είναι:

$$G_{p,k} = \binom{m}{k}$$

όπου $m = \binom{p}{2} = \dfrac{p(p-1)}{2}$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

πρέπει να επιλεγούν k από τις m το πλήθος δυνατές ακμές.

Επομένως το πλήθος των γραφημάτων p κορυφών θα είναι:

$$\boxed{G_p = \sum_{k=0}^{m} G_{p,k} = 2^m = 2^{p(p-1)/2}}$$

Το πλήθος των μη-σημασμένων γραφημάτων είναι άγνωστο γενικά.
Για μικρά n η γεννήτρια είναι:

$F(x)=1+x+2x^2+4x^3+11x^4+34x^5+156x^6+1044x^7+12346x^8+274668x^9+\ldots$

ενώ για τα συνδετικά

$C(x)=1+x+x^2+2x^3+6x^4+21x^5+112x^6+853x^7+11117x^8+261080x^9+\ldots$

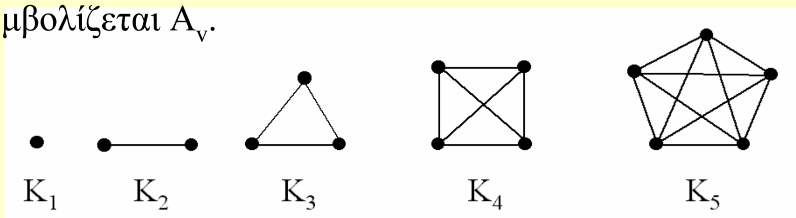
Διαδρομές και μονοπάτια

- u, w $\in V(G)$, *διαδοχικές ή άμεσα συνδεδεμένες* αν η ακμή $\{u,w\} \in E(G)$.
- Η ακολουθία $v_1\{v_1,v_2\}v_2\{v_2,v_3\}v_3\{v_3,v_4\}\ldots\{v_{n-1},v_n\}v_n$, λέγεται *περίπατος* ή *άλυσσος* (walk ή chain).
- Περίπατος με όλες τις ακμές διαφορετικές λέγεται *διαδρομή* (trail).
- Περίπατος με όλες τις κορυφές διαφορετικές, λέγεται *μονοπάτι* (path).
- Αν $v_n=v_1 \Rightarrow$ *κλειστός περίπατος, κλειστή διαδρομή, κύκλος* (cycle ή circuit)
- Αν $\forall u,v \in V(G)$ υπάρχει περίπατος από u σε v, G *συνδετικό*. Αλλιώς λέγεται *μη-συνδετικό*, ή *ασυνδετικό*.
- Μήκος (length) περιπάτου, διαδρομής, μονοπατιού ή κύκλου λέγεται το πλήθος των ακμών του. Ένα μονοπάτι μήκους n συμβολίζεται με P_n. Ένας κύκλος μήκους n συμβολίζεται με C_n.
- Το συντομότερο μονοπάτι που συνδέει δύο κορυφές u, v του G, λέγεται γεωδαισιανή. Το μήκος της γεωδαισιανής των u, v, λέγεται απόσταση (distance) των u, v και συμβολίζεται d(u,v).
- Το μήκος της μακρύτερης γεωδαισιανής στο G, δηλαδή το μέγιστο των αποστάσεων μεταξύ των κορυφών του G, λέγεται διάμετρος d(G).

Πλήρη γραφήματα και διγραφήματα

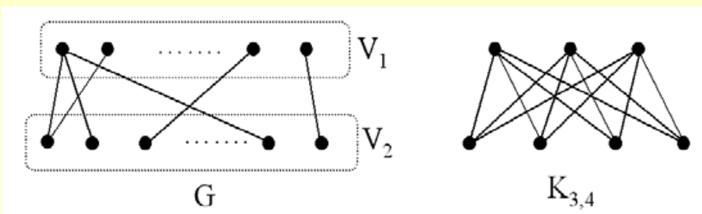
•Αν κάθε κορυφή του G συνδέεται άμεσα με οποιαδήποτε άλλη, τότε το G λέγεται πλήρες γράφημα και συμβολίζεται K_n.

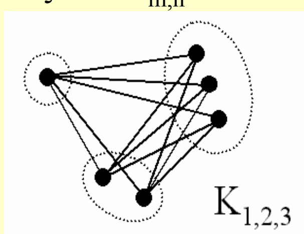
•Αν καμία κορυφή του G δεν συνδέεται άμεσα με άλλη, (δηλαδή G δεν έχει ακμές), τότε το G λέγεται *πλήρως ασυνδετικό* γράφημα και συμβολίζεται A_v.



πλήρη γραφήματα

Αν $V(G)=V_1 \cup V_2$, και E(G) δεν περιέχει ακμή που συνδέει δύο κορυφές του V_1 ή του V_2, το G λέγεται *διγράφημα ή διμερές γράφημα*. Αν υπάρχουν όλες οι επιτρεπτές ακμές λέγεται *πλήρες διγράφημα* και συμβολίζεται $K_{m,n}$. Γενικεύεται.





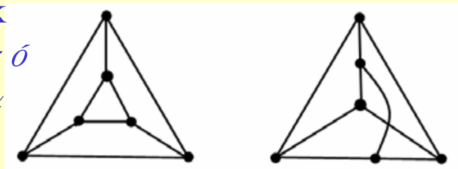
Βαθμός κορυφής

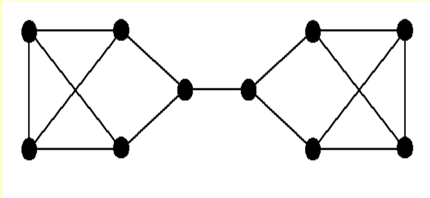
Το πλήθος των ακμών που ένα από τα άκρα τους είναι η κορυφή v, λέγεται *βαθμός* (degree) ή *αξία* (valency) της κορυφής v και συμβολίζεται δ(v).

Ο ελάχιστος βαθμός των κορυφών ενός γραφήματος G συμβολίζεται με δ(G) και ο μέγιστος βαθμός με Δ(G). Προφανώς ισχύει: δ(G) ≤ Δ(G).

$$\delta(G) = \min_{v_i \in V(G)} \{\delta(v_i)\} \qquad \text{και} \qquad \Delta(G) = \max_{v_i \in V(G)} \{\delta(v_i)\}$$

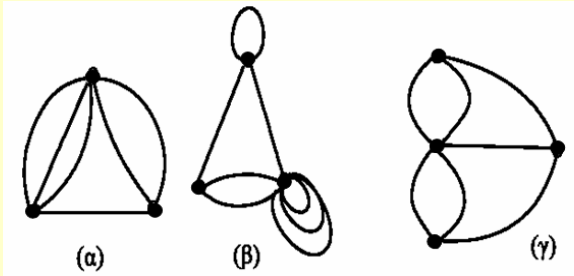
δ (G)= Δ (G)=k *κανονικό γράφημα τάξης* k.
k=3 κυβικό





πολλαπλά γραφήματα

και ψευδογραφήματα

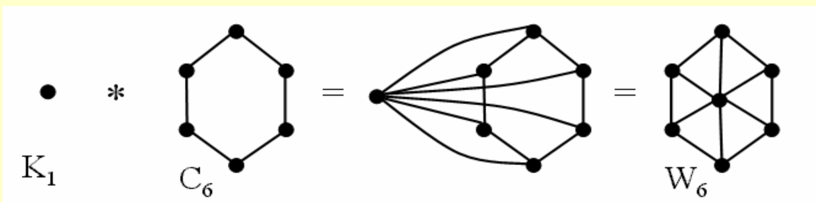


Υπογράφημα-Συνένωση - Συμπλήρωμα

Έστω G=(V, E) και H=(U, F) δύο ξένα γραφήματα. Τότε:

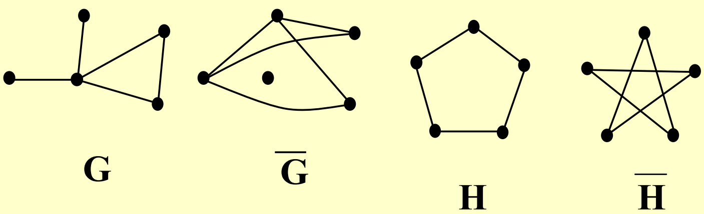
H λέγεται υπογράφημα του **G** αν **U⊆V** και **F ⊆E.**

G⊠H (*συνένωση* των G και H)= G∪H με την προσθήκη όλων των ακμών
τις κορυφές του H.



(πλήρες τάξης 1)*
(κύκλος μήκους 6)=
(τροχός τάξης 6)

Συμπλήρωμα $\overline{G}$ του G=(V, E), είναι το γράφημα (V, $\overline{E}$), όπου το $\overline{E}$ =[V]^2-E περιέχει όλα τα 2-σύνολα του V που δεν περιέχονται στο E



H και $\overline{H}$
ισόμορφα
αυτοσυμπληρωματικά

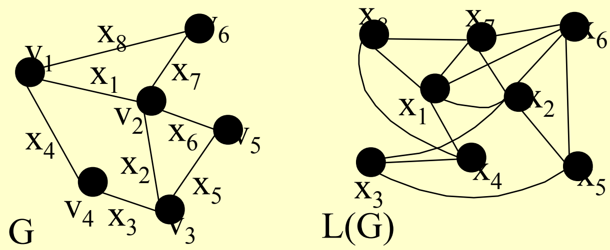
Γραμμογράφημα - Δένδρα

Αν σε γράφημα εναλλάξουμε ρόλους μεταξύ των κορυφών και των ακμών του, προκύπτει το *γραμμογράφημα* (line graph) του G, L(G).

$V(L(G))=E(G)$,

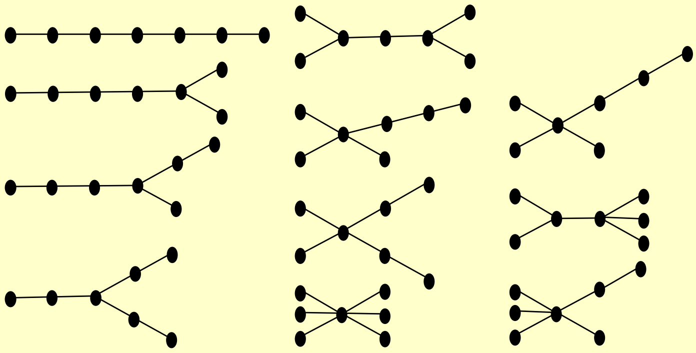
$E(L(G))=\{\{x,y\}: x=\{a,b\}, y=\{c,d\},$

$\{a,b\}\cap\{c,d\}\neq\emptyset, a,b,c,d \in V\}$



Γράφημα συνδετικό χωρίς κύκλους λέγεται *δένδρο* (tree)

Υπογράφημα ζεύξης που είναι δένδρο λέγεται δένδρο ζεύξης
Είναι βασικό πρόβλημα



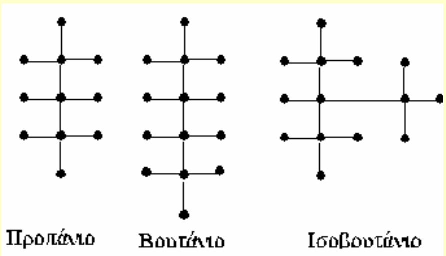
όλα τα δένδρα 7 κορυφών

Μουσιάδης Πολ.-Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Πλήθος Δένδρων

Θ. Αν το G(p,q) είναι δένδρο τότε ισχύει p=q+1. Αντίστροφα, αν ένα συνδετικό γράφημα G(p,q) ικανοποιεί τη σχέση p=q+1, τότε είναι δένδρο.

Συμβολίζοντας τους δεσμούς μιας χημικής ένωσης με ακμές και τα στοιχεία που συμμετέχουν με κορυφές, προκύπτει ένα γράφημα. Αν η ένωση είναι κορεσμένος υδρογονάνθρακας, το γράφημα είναι δένδρο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



O Cayley (1857) σκέφτηκε ότι προκειμένου να καταμετρήσουμε όλους τους δυνατούς κορεσμένους υδρογονάνθρακες αρκεί να καταμετρή- σουμε όλα τα δένδρα με κορυφές βαθμών 1 ή 4. Απέδειξε πρώτα ότι αν $N(d_1, d_2,...,d_n)$ το πλήθος των σημασμένων δένδρων με n κορυφές, των οποίων η κορυφή i έχει βαθμό d_i+1, τότε ισχύει:

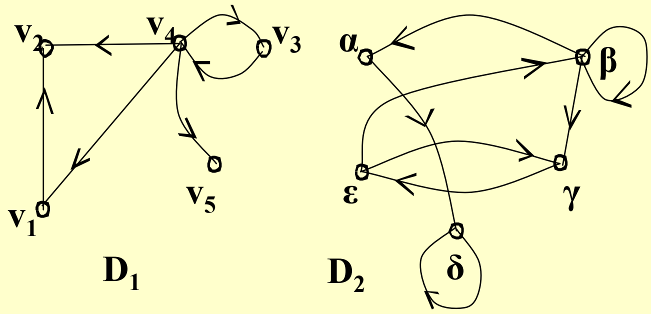
$$N(d_1,d_2,...,d_p)=\frac{(p-2)!}{d_1!d_2!...d_p!} \quad \alpha\nu \sum_{i=1}^{p} d_i = p-2$$

Αθροίζοντας για όλα τα d_i με $\Sigma d_i = p-2$, προκύπτει το:

Θ. Για $p\geq 2$ υπάρχουν p^{p-2} διαφορετικά σημασμένα δένδρα με p κορυφές.

Κατευθυνόμενα γραφήματα

Αν στο G=(V,E), το στοιχείο (α,β) ∈E, θεωρηθεί ως διατεταγμένο ζεύγος και όχι ως 2-σύνολο, τότε G είναι κατευθυνόμενο.



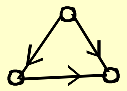
δ₋(v) *έσω-βαθμός*

δ₊(v) *έξω-βαθμός*

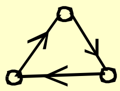
ασθενικά συνδετικό

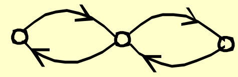
μονόδρομα συνδετικό

ισχυρά συνδετικό



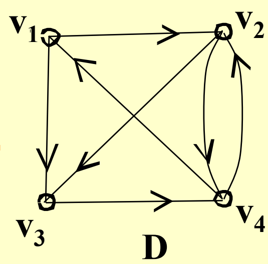
Μονόδρομα συνδετικό





Ισχυρά συνδετικά

v_1v_2 , $v_2v_4v_1$,
v_1v_3 , $v_3v_4v_1$,
$v_1v_2v_4$, v_4v_1 ,
....



Ιδιότητες

Θ. (Euler). Σε κάθε G(p,q) με V={v_i, i=1,2,...,p}

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} \delta(v_i) = 2q}$$

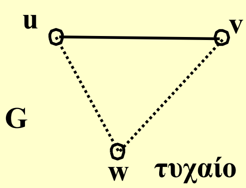
Π. Το πλήθος των κορυφών περιττού βαθμού σε κάθε G είναι άρτιος αριθμός.

Θ. Δεν υπάρχει κυβικό γράφημα με περιττό πλήθος κορυφών.

Το πλήθος των ακμών του πλήρους γραφήματος K_n είναι ίσο με $\binom{n}{2}$
Το πλήθος κορυφών του διγραφήματος $K_{m,n}$ είναι m≺n.

Θ. Ο μέγιστος αριθμός ακμών σε γράφημα p κορυφών χωρίς τρίγωνα, είναι $\left[p^2/4 \right]$, όπου [x] συμβολίζει το ακέραιο μέρος του αριθμού x

Έστω p=2n, και ισχύει μέχρι n, q≤n^2
Για n+1, και u,v συνδεδεμένες η πρόταση ισχύει στο G-{u,v}, δηλαδή q΄≤n^2. Οι επιπλέον ακμές του G είναι το πολύ 2n+1, …..



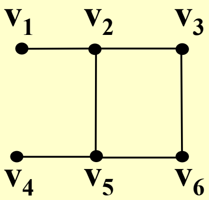
Πίνακας συνδέσεων

Πίνακας συνδέσεων είναι ο p×p πίνακας $A=(a_{ij})$, με όπου G(p,q) σημασμένο γράφημα με

$$V(G)=\{v_1, v_2, ..., v_p\}$$

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \alpha\nu\ \{v_i,v_j\}\in E(G)\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

G:



$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

Θ. (1) $a_{ii}=0$, i=1,2,...,p
(2) $a_{ij}=a_{ji}$, i,j=1,2,...,p
(3) $\mathbf{1}'A=\boldsymbol{\delta}'$ και $A\cdot\mathbf{1}=\boldsymbol{\delta}$

$$\delta=\left(\delta(v_1),\ \delta(v_2),\ ...,\ \delta(v_p)\right)'$$

Ο πίνακας συνδέσεων του πλήρους γραφήματος K_n έχει όλα τα μη-διαγώνια στοιχεία ίσα με 1.

$$A(K_n)=J_n-I_n$$

Ο πίνακας συνδέσεων του πλήρους διγραφήματος $K_{m,n}$ με κατάλληλη σήμανση γράφεται:

$$A(K_{m,n})=\begin{pmatrix}0 & J_{m,n}\\ J_{n,m} & 0\end{pmatrix}$$

$A+\overline{A}=J_n-I_n$
συμπληρωματικά

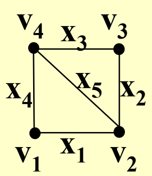
G μη συνδετικό, τότε A(G) γράφεται ως διαχωρισμένος

$$A(G)=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

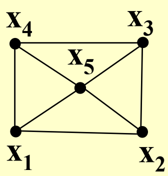
Πίνακας αντιστοιχιών

Πίνακας αντιστοιχιών είναι ο p×q πίνακας $B=(b_{ij})$, με όπου G(p,q) σημασμένο γράφημα με
$V(G)=\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ και $E(G)=\{x_1, x_2, ..., x_q\}$

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \alpha\nu\ v_i\in x_j\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$



G=K4-x



L(G)

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\1&1&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

Θ. (1) $\mathbf{1}_p{}'B=2\cdot\mathbf{1}_q{}'$
(2) $B\cdot\mathbf{1}_q=\boldsymbol{\delta}$

$$\boldsymbol{\delta}=\left(\delta(v_1),\ \delta(v_2),\ ...,\ \delta(v_p)\right)'$$

Θ. Αν L(G) το γραμμογράφημα του G, τότε ο πίνακας συνδέσεων A(L(G)) του L(G) και ο πίνακας αντιστοιχιών B(G) του G, ικανοποιούν τη σχέση:

$$A(L(G))\ =\ B(G)'B(G)-\ 2\cdot I_q$$

Επαλήθευση του θεωρήματος για το προηγούμενο παράδειγμα

$$A(L(G))=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}\qquad B'B=\begin{pmatrix}2&1&0&1&1\\1&2&1&0&1\\0&1&2&1&1\\1&0&1&2&1\\1&1&1&1&2\end{pmatrix}$$

Συνδετικότητα

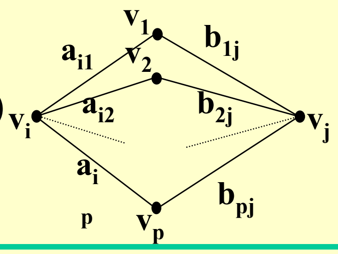
Θ. Αν υπάρχει περίπατος που συνδέει τις κορυφές α και β ενός γραφήματος G τότε υπάρχει και μονοπάτι μεταξύ αυτών των κορυφών.

Π. Αν G συνδετικό γράφημα n κορυφών, τότε οποιεσδήποτε κορυφές συνδέονται με μονοπάτι μήκους το πολύ n-1.

Θ. Έστω A ο πίνακας συνδέσεων του γραφήματος G. Το (i,j) στοιχείο του πίνακα A^m δίνει το πλήθος των διαφορετικών περιπάτων μήκους m που συνδέουν τις κορυφές v_i και v_j.

Απόδ. $A=(a_{ij})$, $A^n=(b_{ij})$ και $A^{n+1}=(c_{ij})$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}$$



Θ. Έστω A ο πίνακας συνδέσεων του γραφήματος G που έχει n>2 κορυφές. Το G είναι συνδετικό αν και μόνον αν κάθε στοιχείο του πίνακα $A+A^2+A^3+\ldots+A^{n-1}$, είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1.

Θ. Αν το γράφημα G είναι μη-συνδετικό τότε το είναι συνδετικό.

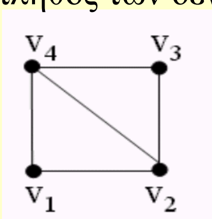
Π. Κάθε αυτοσυμπληρωματικό γράφημα είναι συνδετικό.

Θεώρημα Kirchoff

G συνδετικό, A(G) πίνακας συνδέσεων, **δ**(G) το διάνυσμα των βαθμών και M(G) ο πίνακας $M(G)=-A(G)+diag(\boldsymbol{\delta}(G))$

Τότε οι συμπαράγοντες του M(G) είναι όλοι ίσοι και η κοινή τιμή τους δίνει το πλήθος των δένδρων ζεύξης του G

Παράδειγμα

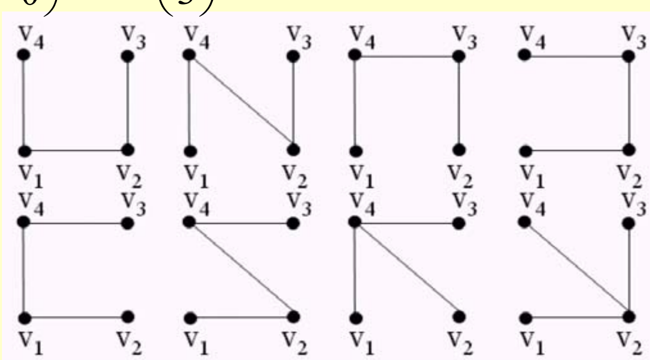


$G=K_4$-x

$$A(G)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{\delta}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix}\qquad M(G)=\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\-1&3&-1&-1\\0&-1&2&-1\\-1&-1&-1&3\end{pmatrix}$$

$$(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&3\end{vmatrix}=8$$

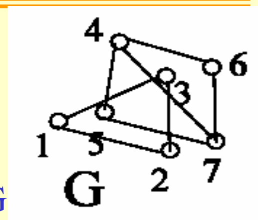
$$(-1)^{1+2}M_{12}=\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\0&2&-1\\-1&-1&3\end{vmatrix}=8$$



Π. (Caylay) Το πλήθος σημασμένων δένδρων με p κορυφές είναι p^{p-2}.

Παράγοντες – Τομές - Γέφυρες

Ένα υπογράφημα του G λέγεται (συνδετικός) *παράγοντας* (connected component) του G αν είναι μέγιστο συνδετικό υπογράφημα του G



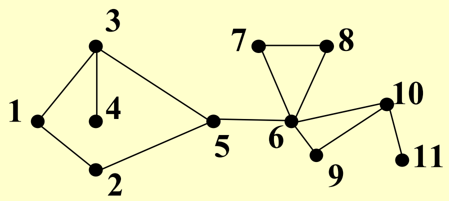
H, με V(H)={1,2,3}, E(H)={12,13,23} είναι παράγοντας του G

K, με V(K)={4,6,7}, E(K)={46, 47, 67} δεν είναι παράγοντας διότι το K περιέχεται στο L με V(L)={4,5,6,7}, E(L)={45, 46, 47, 57, 67}.

Αν A, B $\subseteq$V και για το σύνολο X $\subseteq$V$\cup$E ισχύει ότι κάθε μονοπάτι που συνδέει κορυφές του A με κορυφές του B περνάει οπωσδήποτε από μία κορυφή ή ακμή του X, τότε το X χωρίζει τα σύνολα κορυφών A, B. Γενικότερα, αν το X χωρίζει δύο κορυφές του G-X, τότε το X λέγεται *σύνολο τομής του G* ή λέμε ότι το σύνολο X χωρίζει το G.

Αν X ={v}, v$\in$V, τότε η κορυφή v λέγεται *σημείο τομής* (cutvertex).

Αν X ={x}, x$\in$E, τότε η ακμή x λέγεται γέφυρα (bridge).



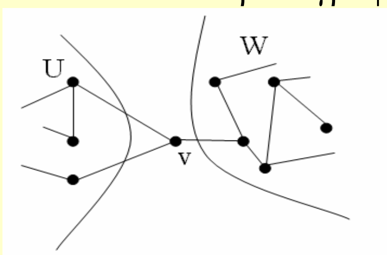
σημεία τομής 3,5,6,10

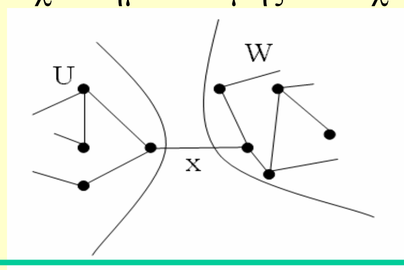
γέφυρες 34,56, (10)(11)

Μωυσιάδης Πολ.-Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Θεώρημα για κυβικό γράφημα

Θ. Ένα συνδετικό κυβικό γράφημα έχει σημείο τομής $\Leftrightarrow$ έχει γέφυρα.





Συνδετικός αριθμός

Συνδετικός αριθμός k ή k(G) λέγεται ο ελάχιστος αριθμός κορυφών του G που πρέπει να απομακρύνουμε, για να προκύψει μη συνδετικό γράφημα.

Ισχύει $k(A_n)=0$, k(G)=1 αν υπάρχει σημείο τομής στο G, $k(G)\geq 2$ για κάθε αδιαχώριστο γράφημα και $k(K_p)=p-1$.

Γραμμοσυνδετικός αριθμός λ ή λ(G) λέγεται ο ελάχιστος αριθμός ακμών του G που πρέπει να απομακρύνουμε, για να προκύψει μη συνδετικό γράφημα.

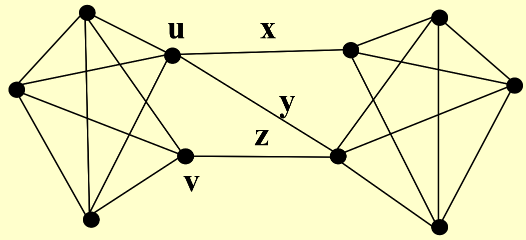
Ισχύει $\lambda(K_1)=0$, λ (ενός μη συνδετικού γραφήματος) = 0 και λ(G)=1, αν υπάρχει γέφυρα.

Θεώρημα Whitney

Για κάθε γράφημα G, ισχύει: $k(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$

Παράδειγμα

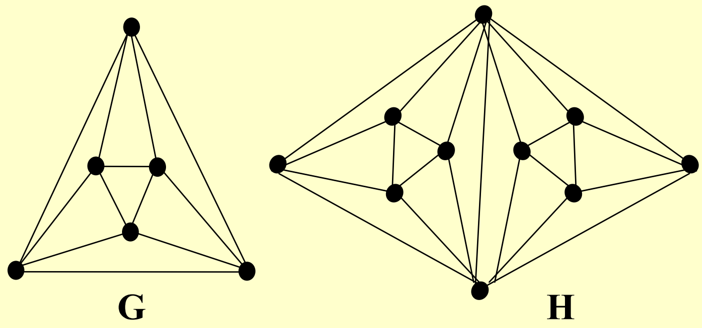
k=2 λ=3



Παράδειγμα

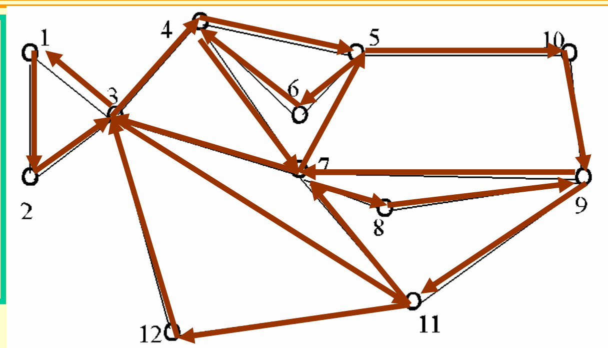
G: Πρέπει k≤ λ ≤4
Τελικά k= λ =4

H: Πρέπει k≤ λ ≤4
Τελικά k=2, λ =4



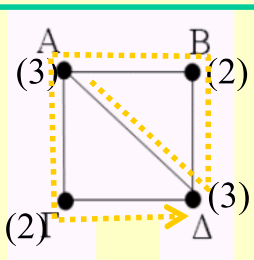
Γραφήματα Euler

Θ. Οι προτάσεις είναι ισοδύναμες:
(1) Το G είναι γράφημα Euler.
(2) Κάθε κορυφή του G έχει άρτιο βαθμό.
(3) Το σύνολο των κορυφών του G μπορεί να χωριστεί σε κύκλους

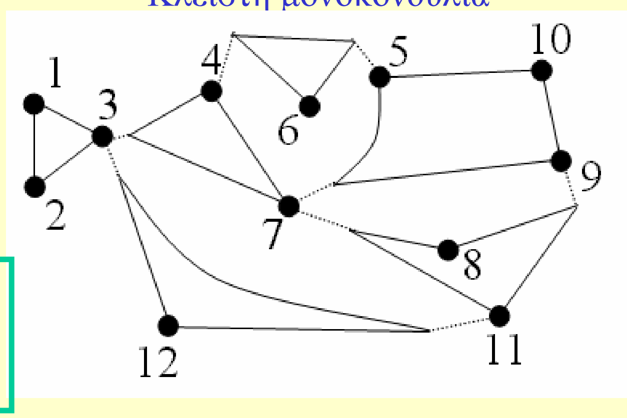


1, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 7, 5, 10, 9, 7, 8, 9, 11, 7, 3, 11,12, 3, 1

Κλειστή μονοκονδυλιά



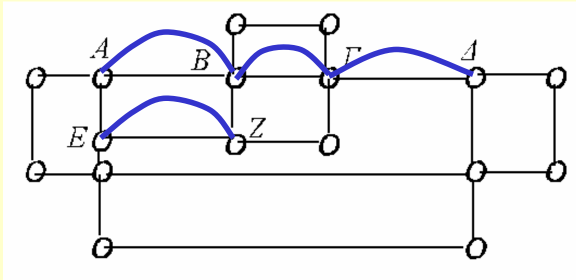
Ανοικτή μονοκονδυλιά = ανοικτή διαδρομή Euler



Θ. Αν G έχει 2n κορυφές περιττού βαθμού, τότε υπάρχουν n ανοιχτές διαδρομές Euler, ξένες μεταξύ τους.

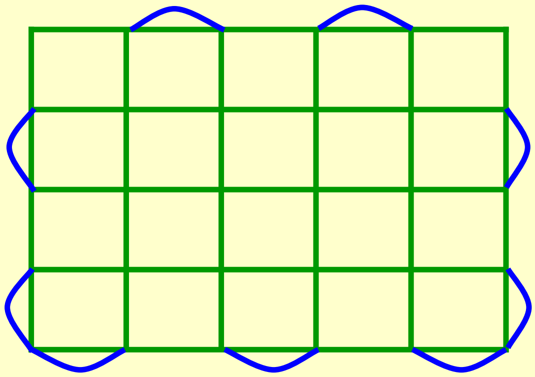
Πρόβλημα του Κινέζου ταχυδρόμου

Διαπιστώσατε ότι το γράφημα δίπλα δεν είναι Euler, ούτε έχει ανοικτή διαδρομή Euler. Ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος προσθήκης ακμών (επιτρεπτών) ώστε να υπάρξει διαδρομή Euler; (chinese postman problem).



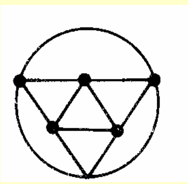
Με ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΕΖ, γίνεται γράφημα Euler

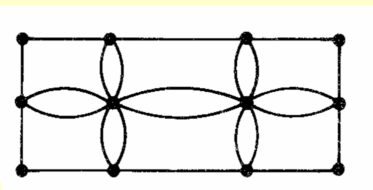
καλή μετατροπή γραφήματος οικοδομικών τετραγώνων, σε γράφημα Euler



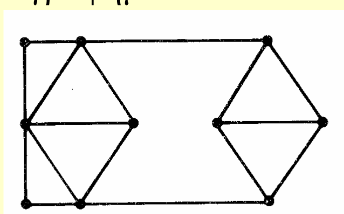
Ασκήσεις

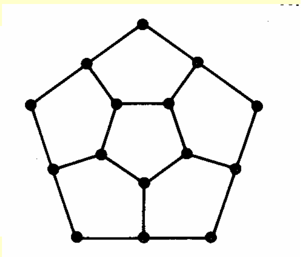
Βρέστε μία κλειστή διαδρομή Euler στα παρακάτω γραφήματα.



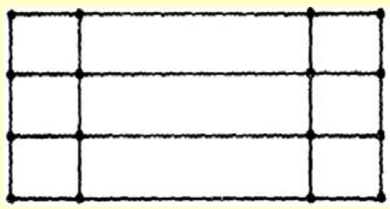


Συμπληρώστε ώστε να γίνουν γραφήματα Euler

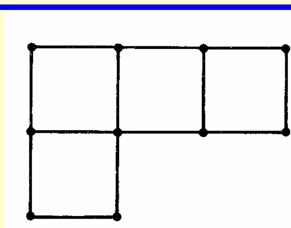


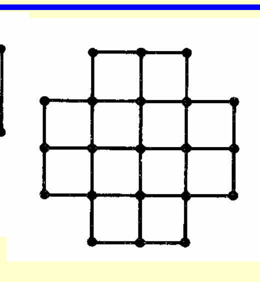


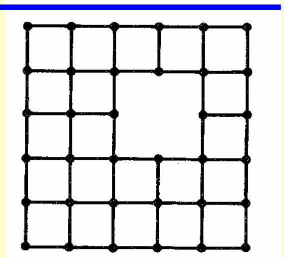
Τα τετράγωνα στο σχήμα έχουν πλευρά 1000 μ., ενώ η μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου 4000 μ. Μετατρέψτε το σε γράφημα Euler με τρόπο ώστε οι επί πλέον ακμές να έχουν μήκος 8000 μ.



Συμπληρώστε με καλές μετατροπές, ώστε να γίνουν γραφήματα Euler

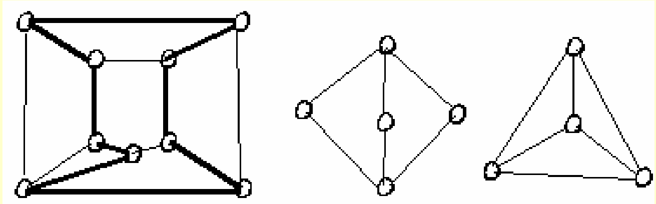






Γραφήματα Hamilton

Αν το γράφημα G περιέχει έναν κύκλο Z που περνά από όλες τις κορυφές του G ακριβώς μία φορά, (αν δηλαδή ο Z είναι κύκλος ζεύξης), τότε το G λέγεται ***γράφημα Hamilton*** και ο Z λέγεται ***κύκλος Hamilton***.

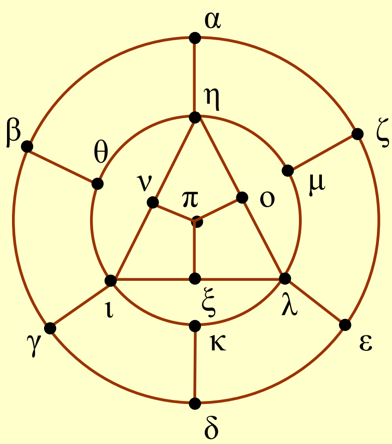


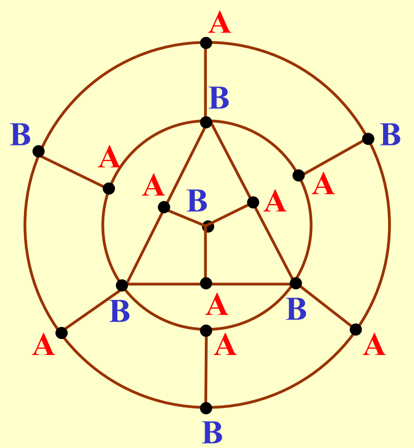
Το α΄ γράφημα έχει κύκλο Hamilton (όπως φαίνεται), το β΄ δεν έχει, ενώ το γ΄ έχει τρεις διαφορετικούς κύκλους.

Αν και έχουν δοθεί διάφορες ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένα γράφημα G να περιέχει έναν κύκλο Hamilton, δεν υπάρχει μέχρι τώρα μία συνθήκη που να οδηγεί σε πολυωνυμικό αλγόριθμο. Το πρόβλημα του **περιοδεύοντος εμπορικού αντιπροσώπου** (traveling salesman problem) είναι μία γενίκευση του παραπάνω προβλήματος. Το πρόβλημα αυτό ισοδυναμεί με ένα γράφημα, στο οποίο ζητείται να εξετάσουμε αν περιέχεται κύκλος Hamilton και, αν ναι, να ευρεθεί εκείνος που ελαχιστοποιεί κάποια αντικειμενική συνάρτηση των ακμών που μπορεί να αφορά χρόνο, μήκος, κόστος, κλπ. Το πρόβλημα αυτό που είναι το διασημότερο στην Επιχειρησιακή έρευνα, είναι ένα NP-complete πρόβλημα.

Μία μέθοδος για μη-Hamilton

Για το γράφημα αριστερά

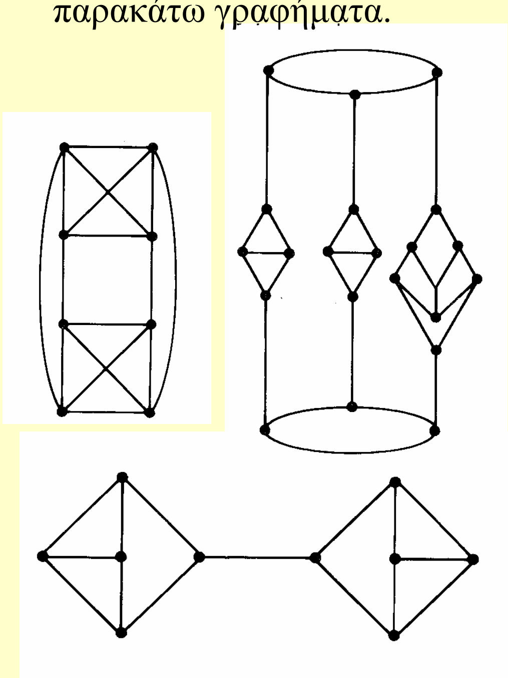




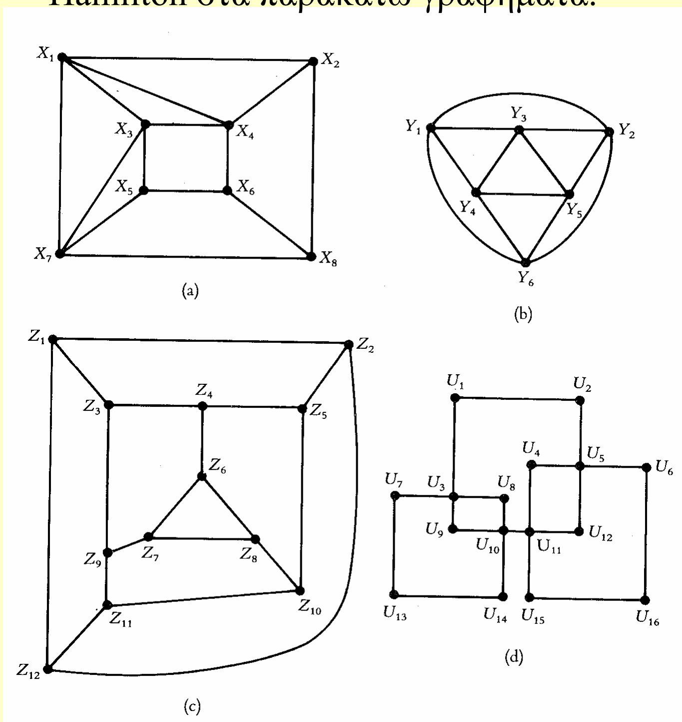
σημάναμε τις κορυφές με δύο γράμματα (χρώματα) ώστε διαδοχικές κορυφές να έχουν διαφορετικό γράμμα και δεν υπήρξε πρόβλημα. Επειδή υπάρχουν 9 κορυφές A και 7 κορυφές B, και ένας κύκλος Hamilton θα περιέχει εναλλάξ A και B, άρα δεν υπάρχει τέτοιος κύκλος.

Ασκήσεις

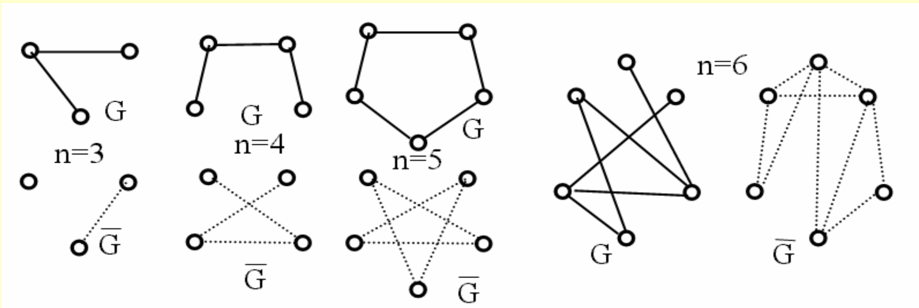
Βρέστε, αν υπάρχει, μία διαδρομή Hamilton στα παρακάτω γραφήματα.



Βρέστε, αν υπάρχει, διαδρομή Euler ή Hamilton στα παρακάτω γραφήματα.



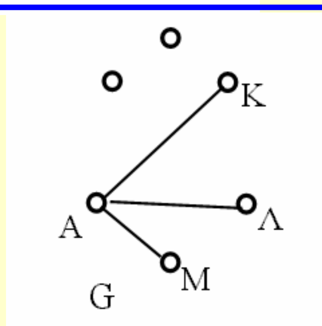
Αριθμοί Ramsey



Θ. Αν G είναι γράφημα με 6 κορυφές τότε είτε το G είτε το $\overline{G}$ περιέχει τρίγωνο

(α) Η κορυφή Α έχει βαθμό ≥3

(β) Η κορυφή Α έχει βαθμό <3



Π. Σε οποιαδήποτε συντροφιά 6 ατόμων, τα οποία μπορούν να μιλούν οποιεσδήποτε γλώσσες, **υπάρχουν** είτε τρία άτομα που μιλούν την ίδια γλώσσα είτε τρία άτομα που ανά δύο δε μιλούν την ίδια γλώσσα.

(p,q)-ιδιότητα Ramsey

Ορ. Έστω ένα σύνολο S με N στοιχεία και δύο φυσικοί αριθμοί p και q, με p, q≥2. Σχηματίζουμε όλα τα 2-υποσύνολα του S και τα κατανέμουμε με οποιονδήποτε τρόπο σε δύο σύνολα X και Y. Αν για οποιαδήποτε τέτοια κατανομή ισχύει ένα από τα παρακάτω,

(α) ∃ p-υποσύνολο του S του οποίου όλα τα 2-υποσύνολα ∈ X,

(b) ∃ q-υποσύνολο του S του οποίου όλα τα 2-υποσύνολα ∈ Y,

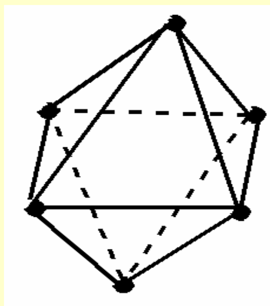
τότε θα λέμε ότι ο αριθμός N έχει την *(p, q)-ιδιότητα του Ramsey.*

Θ. (Ramsey). Έστω p, q ≥ 2 φυσικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός N, που έχει την (p, q)-ιδιότητα του Ramsey. Ο αριθμός αυτός λέγεται αριθμός Ramsey των p, q και συμβολίζεται R(p,q).

Ισοδύναμα. Έστω p, q ≥ 2 δύο οποιοιδήποτε φυσικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει φυσικός N, τέτοιος ώστε αν σχηματίσουμε το πλήρες γράφημα K_N, και χρωματίσουμε με οποιονδήποτε τρόπο με δύο χρώματα τις ακμές του γραφήματος, τότε θα συμβαίνει είτε να έχουμε χρωματίσει ένα πλήρες K_p με το πρώτο χρώμα, είτε να έχουμε χρωματίσει ένα πλήρες K_q με το δεύτερο χρώμα.

Πρόβλημα

Σ' ένα οκτάεδρο χρωματίζουμε με τυχαίο τρόπο τις ακμές του και τις διαγώνιές του, χρησιμοποιώντας δύο χρώματα. Να δειχθεί ότι υπάρχει πάντοτε τρίγωνο με πλευρές ίδιου χρώματος.



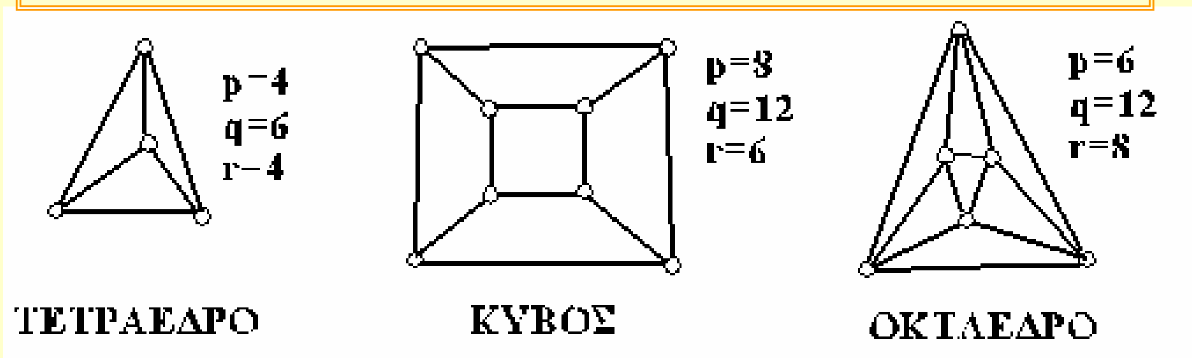
Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι 12 ακμές μαζί με τις 3 διαγώνιες συμπληρώνουν το πλήρες γράφημα 6 κορυφών, και να εφαρμόσουμε το θεώρημα Ramsey

Επιπεδότητα

Ένα γράφημα G λέγεται ***επίπεδο*** αν μπορεί να παρασταθεί στο επίπεδο έτσι ώστε οι γραμμές του να μην τέμνονται.

Το 1750, ο Euler παρατήρησε ότι στα κυρτά γεωμετρικά στερεά ισχύει η σχέση: **H + S = A + 2**,
όπου H (έδρες), S (στερεές γωνίες), A (ακμές).

Θ. Στα στα επίπεδα γραφήματα ισχύει :
p - q + r = 2 , p (κορυφές), q (ακμές), r (επιφάνειες). π.χ.

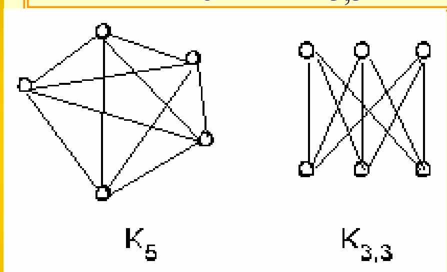


Θεωρήματα για επίπεδα γραφήματα

Θ. Αν G είναι επίπεδο γράφημα με p≥3, τότε: $q \le 3p - 6$

Θ. Αν G είναι επίπεδο γράφημα χωρίς τρίγωνα, τότε: $q \le 2p - 4$

Θ. Τα K_5 και $K_{3,3}$, δεν είναι επίπεδα.



Απόδειξη

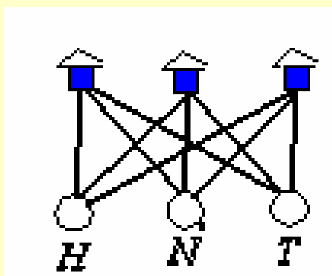
K_5: q=10 και p=5
ενώ θα έπρεπε q◘3≺5-6=9

$K_{3,3}$: q=9 και p=6 και δεν έχε τρίγωνα,
ενώ θα έπρεπε q◘2≺6-4=8

Θ. Kuratowski. G επίπεδο αν-ν «ανάγεται» σε K_5 ή $K_{3,3}$.

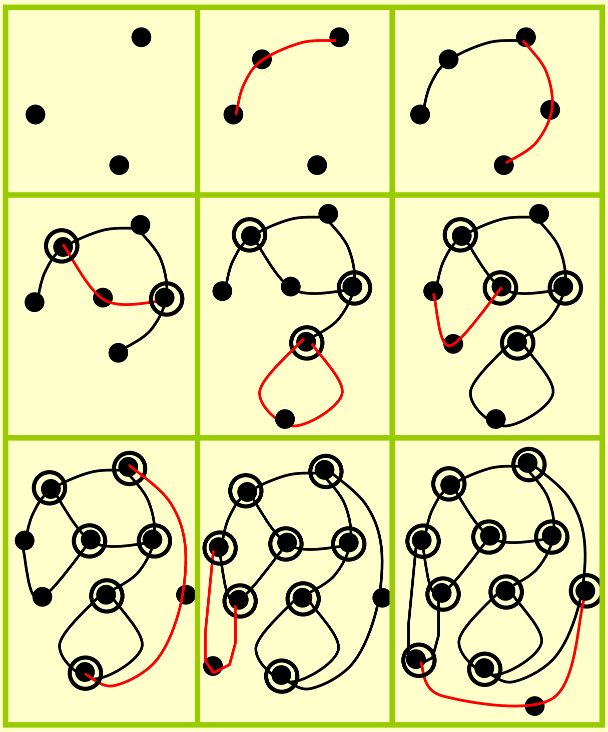
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

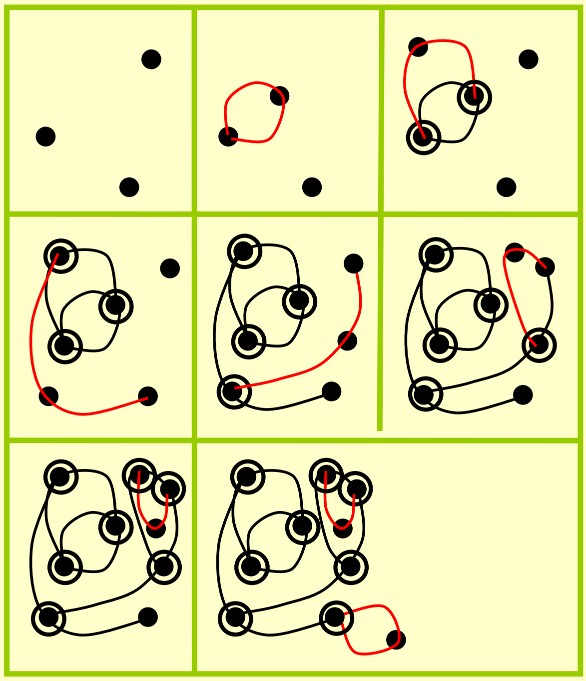
Τρία γειτονικά σπίτια πρόκειται να συνδεθούν με τρεις παροχές (π.χ. ηλεκτρικό φως, νερό, τηλέφωνο), από τρία σημεία που βρίσκονται ανά ένα απέναντι από κάθε σπίτι. Είναι δυνατόν να βρεθούν συνδέσεις, τέτοιες ώστε να μην τέμνονται μεταξύ τους;



Βλαστάρια (sprouts) - Ένα παιχνίδι

Γράφουμε ακμή και κορυφή μέχρι το πολύ 3 ακμές/κορυφή, ώστε G επίπεδο.





Conway & Paterson 1967

Αρχικά 9 δυνατές ακμές, μετά 8 (το πολύ), μετά 7 κλπ

Το πολύ 8 κινήσεις. Γενίκευση

Χρωματισμοί

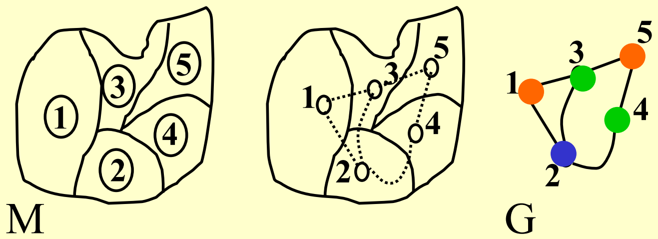
Χρωματισμός του G είναι η αντιστοίχιση χρωμάτων στις κορυφές του G ώστε συνδεδεμένες κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα. Το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων που απαιτούνται λέγεται ***χρωματικός αριθμός*** και συμβολίζουμε X(G). Το σύνολο των κορυφών με το ίδιο χρώμα λέγεται ***χρωματική κλάση***.

Ισχύουν:	$X(K_p\text{-}x) = p\text{-}1$	$X(C_{2n}) = 2$
$X(G) \leq p$,	$X(\overline{K_p}) = 1$,	$X(C_{2n+1}) = 3$
$X(K_p) = p$,	$X(K_{m,n}) = 2$,	X(T) = 2 για T δένδρο.

Θ. (Köning)
Ένα γράφημα έχει έναν 2-χρωματισμό (δηλαδή X(G)=2), αν και μόνο αν δεν έχει περιττούς κύκλους.

Μωυσιάδης Πολ.-Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

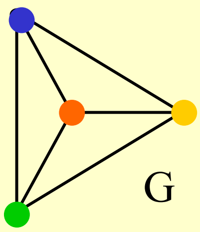
Χάρτες



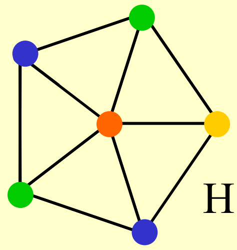
Ο χρωματισμός των κορυφών του G, ισοδυναμεί με χρωματισμό των χωρών του χάρτη M. Το G είναι προφανώς επίπεδο γράφημα.

Θ. Ισχύει

$X(G) \leq 1 + \Delta(G)$



$X(G)=4=$
$=1 + \Delta(G)$



$X(G)=4<$
$<1 + \Delta(G)$

Το πρόβλημα των 4 χρωμάτων

Οι Appel and Haken στο Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976) σελ. 711-712, απέδειξαν με Η/Υ με εκτύπωση αρκετών εκατοντάδων σελίδων, ότι αρκούν 4 χρώματα για το χρωματισμό κάθε επίπεδου γραφήματος. Η προσπάθεια συνεχίζεται για απλούστερη απόδειξη.

Το πρόβλημα των 5 χρωμάτων, δηλ ότι .$X(G) \leq 5$, είχε αποδειχθεί το 1890 από τον Heawood.

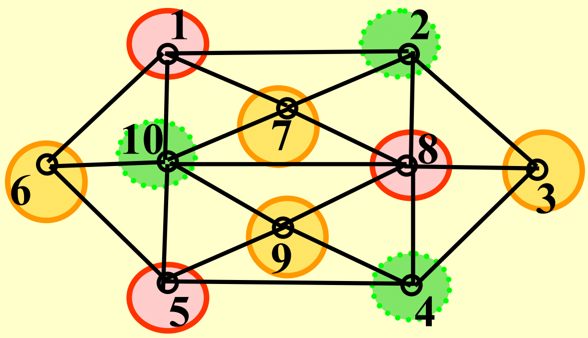
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ (με ανεξάρτητα σύνολα κορυφών)

Πρώτη φάση: Εύρεση όλων των ανεξάρτητων συνόλων κορυφών με την ιδιότητα κανένα από αυτά να μην είναι υποσύνολο άλλου.

Δεύτερη φάση: Εύρεση όλων των δυνατών ενώσεων των ανεξαρτήτων συνόλων κορυφών που έχουν ένωση το V. Το s που δίνει το μικρότερο πλήθος τέτοιων συνόλων είναι ο χρωματικός αριθμός.

Παράδειγμα

α΄: Τα ανεξάρτητα σύνολα:
{1,3,5}, {1,3,9}, {1,4}, {1,5,8}, {2,4,6}, {2,4,10}, {2,5}, {2,6,9}, {3,5,7}, {3,6,7,9}, {3,10}, {4,6,7}, {6,8}.



β΄: Η ένωση των λιγότερων από αυτά που συμπληρώνουν το V είναι:
$\{1,5,8\} \cup \{2,4,10\} \cup \{3,6,7,9\} = V$.

Άρα
$X(G)=3$.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ (του Χριστοφίδη)

1. Διατάσσουμε τις κορυφές σε φθίνουσα σειρά βαθμών, δηλ.
   $x_1, x_2, \ldots, x_p$ αν $\delta(x_1) \geq \delta(x_2) \geq \ldots \geq \delta(x_p)$.
2. Αντιστοιχίζω το χρώμα 1 στην x_1.
3. Ελέγχουμε την επόμενη κορυφή στη σειρά, αν δεν συνδέεται άμεσα με κάποια από τις κορυφές που έχει εξεταστεί προηγούμενα. Αν συμβαίνει αυτό δίνουμε στην κορυφή το χρώμα αυτό και μάλιστα το μικρότερο δυνατό. Αλλιώς της δίνουμε το επόμενο χρώμα, αυτό που δεν είχε δοθεί μέχρι τώρα.

Παράδειγμα

x_1 ✶1

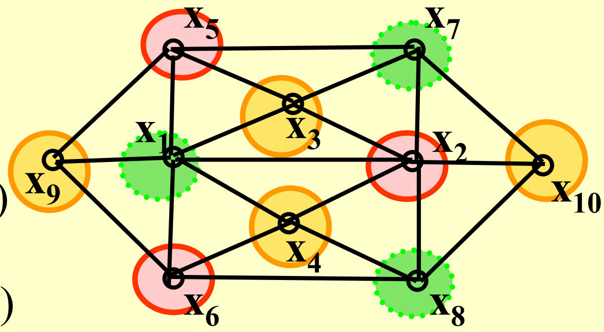
x_2 ✶2 (συνδέεται με x_1)

x_3 ✶3 (συνδέεται με x_1 και με x_2)

x_4 ✶3 (δεν συνδέεται με x_3)

x_5 ✶2 (συνδέεται με x_1, όχι με x_2)

κλπ.



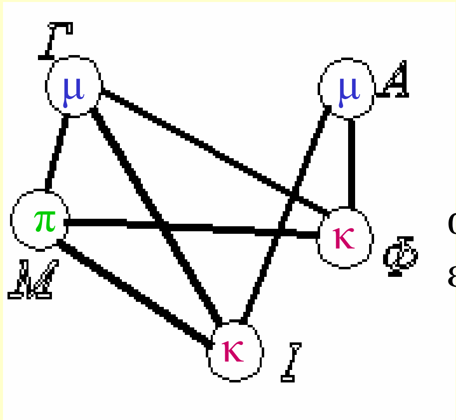
Τελικά **1, 2, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 3, 3**

Άρα X(G)=3.

Εφαρμογή

Δίνονται οι παρακάτω μαθητές και το μάθημα που πρόκειται να εξεταστούν:
Ιωάννου, Κων/νου, Χρήστου και Δήμου, θα εξεταστούν στη (Γ)λώσσα,
Νικολάου, Δήμου, Σιδεράς και Ιωάννου, θα εξεταστούν στα (Μ)αθηματικά
Λαδάς, Μανδαρίνος, θα εξεταστούν στα (Α)γγλικά,
Λαδάς, Δήμου και Γεωργός, θα εξεταστούν στη (Φ)υσική, και
Μανδαρίνος, Παπάς, Ιωάννου και Ιατρού, θα εξεταστούν στην (Ι)στορία.

Ερώτημα:
Μπορούν τα μαθήματα αυτά να εξεταστούν τις μέρες Δευτέρα, Τετάρτη και Παρασκευή χωρίς να υπάρξει πρόβλημα με τους μαθητές που χρωστούν περισσότερα από ένα μαθήματα;



κορυφές= μαθήματα

ακμές=κοινός εξεταζόμενος

Απάντηση. ΝΑΙ
Δευτέρα=κ, Τετάρτη=μ, Παρασκευή=π

ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ
ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ 2009-10

Μωυσιάδης Χρόνης

Δεν απαιτούνται για τις εξετάσεις οι επόμενες παράγραφοι ή θεωρήματα:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η παράγραφος 2.3.4, το θεώρημα 2.6, η πρόταση 2.5 και η παράγραφος 2.4 (εκτός του τύπου (2.43) και των εφαρμογών του)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Τα θεωρήματα 3.7, 3.9β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Από σελ.196 έως 202, παράγραφοι 4.3, 4.4.1, 4.4.2, 4.5.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ

ΜΩΥΣΙΑΔΗΣ ΧΡΟΝΗΣ

$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ τύπος Stirling	$\mathcal{E}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$ επαναλ. συνδυασμοί n ανά k
$\binom{t}{k} = \frac{t\cdot(t-1)\cdot(t-2)\cdot\ldots\cdot(t-k+1)}{k!}$, $k\in\mathbb{N}, t\in\mathbb{R}$, *γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής.*	

Αναδρομικές Σχέσεις

$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$	διαταράξεις
$F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$, $n\geq 2$, $F_0=F_1=1$	*αριθμοί Fibonacci*
$g_n= g_{n-1}+g_{n-2}$, $n\geq 2$, $g_0=2$, $g_1=1$	αριθμοί Loucas
$S_i^{(n+1)} = S_{i-1}^{(n)} - nS_i^{(n)}$, $i=2,3,\ldots,n$, $n\geq 1$, $S_{n+1}^{(n+1)}=1, n\geq 0$ *και* $S_1^{(n+1)} = -nS_1^{(n)}$, $n\geq 1$,	αριθμοί Stirling 1ου είδους
$s_i^{(n+1)} = s_{i-1}^{(n)} + is_i^{(n)}$, $i=2,3,\ldots,n$, $n\geq 1$, $s_{n+1}^{(n+1)}=1, n\geq 0$ *και* $s_1^{(n+1)} = s_1^{(n)}$, $n\geq 1$,	αριθμοί Stirling 2ου είδους
$B_n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B_{n-k}$, $B_0=1$	Αριθμοί Bell
$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k\cdot C_{n-k}$, , n≥2, με $C_1=1$	αριθμοί Catalan $C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$, n=1,2,…

Πλήθη

$\binom{n-k+1}{k}$ Τοποθετ. σε ευθεία k από τους n πρώτους φυσικούς χωρίς διαδοχ.
F_{n+1} Τοποθετ. σε ευθεία αριθμών από τους n πρώτους φυσικούς χωρίς διαδοχ
$\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$ Τοποθετ. σε κύκλο k από τους n πρώτους φυσικούς χωρίς διαδοχ.
F_n+F_{n-2} Τοποθετ. σε κύκλο αριθμών από τους n πρώτους φυσικούς χωρίς διαδοχ
$\binom{r-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n-1}{n-1}$ ακεραίων λύσεων της $x_1+x_2+\ldots+x_n=r$, με $x_1>\alpha_1$, $x_2>\alpha_2$, …, $x_n>\alpha_n$
$\binom{r-1}{n-1}-\binom{n}{1}\binom{r-\alpha-1}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{r-2\alpha-1}{n-1}-\ldots$ ακεραίων λύσεων της $x_1+x_2+\ldots+x_n=r$, με $1\leq x_i\leq\alpha$, $i=1,2,\ldots,n$
συντελεστής x^n στο $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)$, πλήθος λύσεων της διοφ.εξ. $k_1+2k_2+3k_3+\ldots+nk_n=n$, με $k_1, k_2,\ldots,k_n$ =0 ή 1
συντελεστής x^n στο $(1+x+x^2+\ldots+x^n)(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2[n/2]})(1+x^3+\ldots)\cdots(1+x^n)$, πλήθος λύσεων της διοφ.εξ. $\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\ldots+n\lambda_n=n$, με $0\leq\lambda_i\leq[n/i]$,

Ταξινόμηση

Πλήθος τοποθετ. n διακ. σφαιρ. σε k διακ κελιά, χωρίς άδεια κελιά $$f(n,k)=k^n-\binom{k}{1}(k-1)^n+\binom{k}{2}(k-2)^n-\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}(1)^n$$
Πλήθος τοποθετ. n διακ. Σφαιρ. σε k όμοια κελιά, χωρίς άδεια κελιά $$g(n,r)=\frac{1}{r!}\left\{r^n-\binom{r}{1}(r-1)^n+\binom{r}{2}(r-2)^n-\ldots+(-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}(1)^n\right\}$$

Γεννήτριες

$F(t)=\dfrac{1}{1-t-t^2}$	αριθμοί Fibonacci
$B(t)=e^{e^t-1}$	αριθμοί Bell
$C(t)=\dfrac{1}{2}\left(1-(1-4t)^{1/2}\right)$	αριθμοί Catalan
$F(x)=\dfrac{1}{(1-x^1)(1-x^2)\cdot\ldots\cdot(1-x^n)}$	πλήθους διαμερ. του n, με οποιουσδ. προσθ
$R(x,B_{n\times m})=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{k}\cdot k!$	πολυώνυμο Rook ορθογώνιας σκακιέρας, (n≤m)

Πλήθος διατάξεων m αντικειμένων ανά n, (n≤m), με περιορισμούς $r_n(B)=\Delta_m^n-\Delta_{m-1}^{n-1}r_1(B')+\Delta_{m-2}^{n-2}r_2(B')-\ldots+(-1)^t\Delta_{m-t}^{n-t}r_t(B')+\ldots+(-1)^n\Delta_{m-n}^{0}r_n(B')$	
Αν $A=\alpha I_n+\beta J_n$ τότε $\lvert A\rvert=\alpha^{n-1}(\alpha+n\beta)$ και $A^{-1}=\dfrac{1}{\alpha}I_n-\dfrac{\beta}{\alpha(\alpha+n\beta)}J_n$	
[B-R-C] Αν v περιττός η $z^2=(k-\lambda)x^2+(-1)^{(v-1)/2}\lambda y^2$ έχει μη μηδενική λύση.	
Πίνακας Williamson $H=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & -D & C \\ -C & D & A & -B \\ -D & -C & B & A \end{pmatrix}$	G επίπεδο γράφημα με p≥3, τότε q ≤ 3p-6 G επίπεδο γράφημα χωρίς τρίγωνα, τότε q ≤ 2p-4