Χαράλαμπος **Στεργίου** – Χρήστος **Νάκης**

Μαθηματικά

Β΄ Γυμνασίου

- ΘΕΩΡΙΑ – ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ
- ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
- ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
- ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Ειδική συνεργάτιδα:
Ιωάννα **Στεργίου**

Σαββάλας
ΕΚΔΟΣΕΙΣ

ΘΕΡΙΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΣΤΕΡΓΙΟΥ- ΝΑΚΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ-ΕΚΔ: ΣΑΒΒΑΛΑΣ

Φίλη μαθήτρια, φίλε μαθητή

Το βιβλίο αυτό έχει διπλό σκοπό:

♦ Να σε βοηθήσει στην άρτια προετοιμασία του καθημερινού σχολικού μαθήματος.

♦ Να σου δώσει όλα τα απαραίτητα εφόδια, ώστε σε αυτή τη σημαντική τάξη να αποκτήσεις γερές βάσεις στα Μαθηματικά, κάτι που θα σε κάνει να τα κατανοήσεις ακόμα βαθύτερα, να βελτιώσεις αν χρειαστεί την επίδοσή σου αλλά και να τα αγαπήσεις περισσότερο.

Το βιβλίο ακολουθεί, για διδακτικούς λόγους, πιστά τη δομή του σχολικού. Κάθε ενότητα περιέχει:

♦ τη θεωρία σε μορφή ερωτήσεων-απαντήσεων, με σχόλια και παρατηρήσεις,

♦ υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις που συνοδεύονται συχνά από χρήσιμες μεθόδους,

♦ προτεινόμενες ασκήσεις και ερωτήσεις κατανόησης με σκοπό την αυτενέργεια και την απόκτηση αυτοπεποίθησης.

Στο τέλος των πιο σημαντικών ενοτήτων παρουσιάζονται συμπληρωματικά θέματα σε όλη την προηγούμενη ύλη, καθώς και ειδικά θέματα για όσους μαθητές επιθυμούν να λάβουν μέρος σε μαθηματικούς διαγωνισμούς, όπως ο «Θαλής», ο «Καγκουρό» και ο «Πυθαγόρας».

Στην προετοιμασία για τις τελικές εξετάσεις αφιερώνουμε μια ξεχωριστή ενότητα με θέματα από τη θεωρία και επιλεγμένες ασκήσεις, ώστε να ολοκληρωθούν σωστά οι στόχοι του βιβλίου αλλά και να επιτευχθούν οι δικές σου προσδοκίες.

Στο τέλος του βιβλίου περιέχονται υποδείξεις ή απαντήσεις σε όλες τις προτεινόμενες ασκήσεις, καθώς και οι λύσεις όλων των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου, κάτι που καθιστά το παρόν βιβλίο ιδιαίτερα φιλικό αλλά και εξαιρετικά χρήσιμο.

Θέλουμε να πιστεύουμε ότι η δομή του βιβλίου, η κατανοητή ανάπτυξη της θεωρίας, τα λυμένα παραδείγματα, η ποικιλία των ασκήσεων αλλά και ο πλούτος των θεμάτων του θα βοηθήσουν τους μαθητές να κατακτήσουν και να εδραιώσουν όλες τις μαθηματικές γνώσεις αυτής της τάξης.

Τέλος, θέλουμε να ευχαριστήσουμε για τη συμβολή τους στη δημιουργία αυτού του βιβλίου τις εκλεκτές συναδέλφους Μυρτώ Λιάπη και Γιάννα Στεργίου.

Οι συγγραφείς

Περιεχόμενα

Α΄ Μέρος: Άλγεβρα

Β΄ Μέρος: Γεωμετρία

Γ΄ Μέρος: Γενική Επανάληψη

Δ΄ Μέρος: Υποδείξεις – Απαντήσεις

Α΄ Μέρος

Άλγεβρα

Προετοιμασία για την Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΓΙΑ ΓΕΡΑ ΘΕΜΕΛΙΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΦΟΡΑ :

Στους Συναδέλφους, τους Γονείς και τους Μαθητές

1 Πρόσθεση-αφαίρεση ρητών αριθμών

Βασική θεωρία - Τι πρέπει να γνωρίζω

Α. Πρόσθεση

Θ 1 **α) Πώς προσθέτουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς;**
β) Πώς προσθέτουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς;

Απαντηση

α) Για να προσθέσουμε δύο **ομόσημους** ρητούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.

Είναι για παράδειγμα:

- $(+3)+(+8)=+(3+8)=+11$,
  διότι $|+3|=3$ και $|+8|=8$.
- $(-7)+(-5)=-(7+5)=-12$,
  διότι $|-7|=7$ και $|-5|=5$.

Για να προσθέσουμε δηλαδή δύο ομόσημους αριθμούς, τους προσθέτουμε σαν να ήταν θετικοί και βάζουμε μπροστά το κοινό τους πρόσημο.

β) Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Για παράδειγμα είναι:

- $(+5)+(-8)=-(8-5)=-3$,
  διότι $8-5=3$ και το 8 έχει πρόσημο $(-)$.

- $(-10)+(+14)=+(14-10)=+4$,
  διότι $14-10=4$ και το 14 (που είναι η μεγαλύτερη απόλυτη τιμή των δύο αριθμών) έχει μπροστά το πρόσημο $(+)$.

θ 2 **Να γράψετε τις ιδιότητες της πρόσθεσης των ρητών αριθμών.**

<u>Απαντηση</u>

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης των ρητών αριθμών είναι οι εξής:

- Αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

- Προσεταιριστική ιδιότητα:

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$$

- Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, που είναι το μηδέν:

$$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$$

- Κάθε αριθμός έχει αντίθετο:

$$\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$$

Β. Αφαίρεση

θ 4 **Πώς αφαιρούμε από τον ρητό αριθμό α τον ρητό αριθμό β;**

<u>Απαντηση</u>

Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό α τον αριθμό β, προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β. Είναι δηλαδή:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

Επομένως στους ρητούς αριθμούς η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση και έτσι είναι πάντα μια επιτρεπτή πράξη.

Για παράδειγμα είναι:

- $(+3)-(-8)=(+3)+(+8)=+11$
- $(+7)-(+2)=(+7)+(-2)=+5$

Θ 5 **Πώς απαλείφουμε παρενθέσεις σε μια παράσταση με ρητούς αριθμούς;**

<u>*Απαντηση*</u>

Πρόκειται για μια πολύ σημαντική διαδικασία, αλλά ευτυχώς εύκολη, που πρέπει να την κατανοήσουμε καλά. Για την απαλοιφή λοιπόν παρενθέσεων (ή αγκύλων ή άγκιστρων), προσέχουμε τα εξής:

- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το πρόσημο $(+)$ (ή δεν έχει πρόσημο), τότε απαλείφουμε (παραλείπουμε) την παρένθεση μαζί με το $(+)$ (αν έχει) και γράφουμε τους όρους που περιέχει η παρένθεση με τα πρόσημά τους (δεν αλλάζουμε δηλαδή τίποτα).
- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της $(-)$, τότε απαλείφουμε (παραλείπουμε) την παρένθεση μαζί με το $(-)$ και γράφουμε τους όρους που περιέχει με το **αντίθετο όμως πρόσημο**.

Για παράδειγμα είναι:

- $(+5)+(-8)+(-4)+(+9)=+5-8-4+9=5+9-8-4=$
  $=14-12=+2$
- $(-4)-(-8)-(+4)+(-6)=-4+8-4-6=-4-4-6+8=$
  $=-14+8=-6$
- $(7-6+9)-(-3+2)-(5-8)=7-6+9+3-2-5+8=$
  $=7+9+3+8-6-2-5=27-13=14$

Λυμένες ασκήσεις

Α. Πρόσθεση

1.1 **Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:**

α) $(+10)+(+8)$ **β)** $(-5)+(-7)$

γ) $(+13)+(-20)$ **δ)** $(-12)+(+19)$

Λυση

α) Οι αριθμοί $(+10)$ και $(+8)$ είναι ομόσημοι και μάλιστα θετικοί.

Επειδή $10 + 8 = 18$ είναι $(+10) + (+8) = +18$.

Θυμίζουμε πως όταν οι αριθμοί είναι ομόσημοι, τότε προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.

β) Οι αριθμοί (-5) και (-7) είναι ομόσημοι και μάλιστα αρνητικοί.

Επειδή $5 + 7 = 12$ είναι $(-5) + (-7) = -12$.

γ) Οι αριθμοί $(+13)$ και (-20) είναι ετερόσημοι. Το 20 (που είναι μεγαλύτερο του 13) έχει μπροστά πρόσημο $(-)$, και επειδή $20 - 13 = 7$, είναι $(+13) + (-20) = -7$.

δ) Όμοια βρίσκουμε ότι:

$$(-12) + (+19) = +7$$

διότι $19 - 12 = 7$ και ο αριθμός με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή είναι ο $+19$.

1.2 **Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:**

α) $(+5) + (-9) + (-6) + (+8)$ **β)** $(-7) + (+3) + (-6) + (+8)$

γ) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{5}{6}\right)+\left(+\frac{5}{2}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)$

Λυση

Όταν οι όροι του αθροίσματος είναι πολλοί, είναι προτιμότερο να χωρίζουμε τους θετικούς από τους αρνητικούς όρους.

α) $(+5) + (-9) + (-6) + (+8) = (+5) + (+8) + (-9) + (-6) =$

$= (+13) + (-15) = -2$

β) $(-7) + (+3) + (-6) + (+8) = (-7) + (-6) + (+3) + (+8) =$

$= (-13) + (+11) = -2$

γ) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{5}{6}\right)+\left(+\frac{5}{2}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{5}{6}\right)+\left(+\frac{5}{2}\right)=$

$=\left(-\frac{7}{3}\right)+\left(+\frac{5}{6}\right)+\left(+\frac{15}{6}\right)=\left(-\frac{7}{3}\right)+\left(+\frac{20}{6}\right)=\left(-\frac{7}{3}\right)+\left(+\frac{10}{3}\right)=+\frac{3}{3}=1$

διότι $\frac{20}{6}=\frac{20:2}{6:2}=\frac{10}{3}$ και $\frac{10}{3}-\frac{7}{3}=\frac{10-7}{3}=\frac{3}{3}=1.$

1.3 **Ένας πυροσβέστης βρίσκεται στο 100ό σκαλί μιας σκάλας για να σβήσει τη φωτιά. Αμέσως μετά κατεβαίνει 20 σκαλιά, μετά ξανακατεβαίνει άλλα 30,**

στη συνέχεια ανεβαίνει 15 σκαλιά, ξανά ανεβαίνει άλλα 35 σκαλιά και στο τέλος κατεβαίνει 25 σκαλιά. Σε ποιο σκαλοπάτι βρίσκεται τώρα;

Λυση

Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε:

$$(+100) + (-20) + (-30) + (+15) + (+35) + (-25) =$$
$$= (+100) + (+15) + (+35) + (-20) + (-30) + (-25) =$$
$$= (+150) + (-75) = +75$$

Άρα ο πυροσβέστης βρίσκεται στο 75ο σκαλί.

Β. Αφαίρεση

1.4 **Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις:**

α) $(-7) - (+5)$ **β)** $(+8) - (-6)$

γ) $(-17) - (-7)$ **δ)** $(+6) - (+9)$

Λυση

Επειδή η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση, σύμφωνα με τον τύπο:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

έχουμε:

α) $(-7) - (+5) = (-7) + (-5) = -12$

β) $(+8) - (-6) = (+8) + (+6) = +14$

γ) $(-17) - (-7) = (-17) + (+7) = -10$

δ) $(+6) - (+9) = (+6) + (-9) = -3$

Πιο κάτω θα δούμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε αυτές τις παραστάσεις και με άλλον τρόπο, κάνοντας εξαγωγή (απαλοιφή) των παρενθέσεων.

Γ. Απαλοιφή παρενθέσεων

Υπενθυμίζουμε - Τονίζουμε

- Αν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει το πρόσημο (+) ή δεν υπάρχει πρόσημο, απαλείφουμε την παρένθεση με το πρόσημό της (αν έχει) και γράφουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους. Για παράδειγμα:

$$+(7 - 8 + 5) = 7 - 8 + 5$$

- Αν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει το πρόσημο πλην (−), απαλείφουμε (παραλείπουμε) την παρένθεση μαζί με το (−) και γράφουμε τους όρους που περιέχει με τα αντίθετα όμως πρόσημα. Για παράδειγμα:
  - $-(5-8-6) = -5+8+6$
  - $-(-7+3-4) = +7-3+4$
- Αν στην παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις και αγκύλες (ή άγκιστρα), αρχίζουμε από μέσα προς τα έξω, εφαρμόζοντας και για τις αγκύλες ή τα άγκιστρα ό,τι περιγράψαμε πιο πάνω για τις παρενθέσεις. Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned} A &= \left[-(2+3-5)-7\right]-\left[(-3+7-1)-4\right] = \\ &= \left(-2-3+5-7\right)-\left(-3+7-1-4\right) = \\ &= -2-3+5-7+3-7+1+4 = \\ &= -2-7-7+5+1+4 = -16+10 = -6 \end{aligned}$$

Τονίζουμε ότι στον υπολογισμό παραστάσεων ο καθένας μπορεί να ακολουθήσει διαφορετικό δρόμο, αρκεί όμως να μην παραβαίνει τους κανόνες που περιγράψαμε πιο πάνω.

1.5 **Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:**

α) $-(-3)+(-2)-(-5)-(+4)$

β) $-(+8)+(-3)-(-4)-(-1)$

Λύση

Απαλείφουμε τις παρενθέσεις με το γνωστό τρόπο:

Όταν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει (+), αφήνουμε τους όρους όπως είναι, ενώ αν υπάρχει (−), γράφουμε τους αντίθετους όλων των όρων που βρίσκονται μέσα στις παρενθέσεις.

α) $-(-3)+(-2)-(-5)-(+4) = +3-2+5-4 =$
$= +3+5-2-4 = +8-6 = +2$

β) $-(+8)+(-3)-(-4)-(-1) = -8-3+4+1 = -11+5 = -6$

1.6 **Να βρεθεί η τιμή των παρακάτω παραστάσεων:**

α) $-5+7+8-6$ **β)** $-3+2-5+4$

γ) $3-8-9+15$ **δ)** $-4+3+2-7$

Λύση

Χωρίζουμε για ευκολία τους όρους της κάθε παράστασης σε δύο ομάδες: η μία περιέχει τους θετικούς αριθμούς και η άλλη τους αρνητικούς, ώστε η εκτέλεση των πράξεων να είναι πιο σύντομη.

α) $-5+7+8-6=-5-6+7+8=-11+15=+4$

β) $-3+2-5+4=-3-5+2+4=-8+6=-2$

γ) $3-8-9+15=3+15-8-9=+18-17=+1$

δ) $-4+3+2-7=-4-7+3+2=-11+5=-6$

1.7 Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $\mathbf{(-5+2)+(7-10)}$ **β)** $\mathbf{-(8-6)+(-7+5)}$

γ) $\mathbf{-(-3-8)-(4+6)}$ **δ)** $\mathbf{(-2-7)-(-8+1)}$

Λύση

Ακολουθούμε τη μέθοδο που περιγράψαμε στο σχόλιο.

α) $(-5+2)+(7-10)=-5+2+7-10=-5-10+2+7=-15+9=-6$

β) $-(8-6)+(-7+5)=-8+6-7+5=-8-7+6+5=-15+11=-4$

γ) $-(-3-8)-(4+6)=+3+8-4-6=+11-10=+1$

δ) $(-2-7)-(-8+1)=-2-7+8-1=-2-7-1+8=-10+8=-2$

1.8 Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $\mathbf{A=-\left[-(-3+2)-(-7+4-2)\right]+}$
$\mathbf{+\left[-(-3)-(-5+6)\right]-(-3+5)}$

β) $\mathbf{B=-\left[(-3+8-4)-(-2+1)\right]+}$
$\mathbf{+\left[(-5+4)-(-2+6+4)\right]-(-3+1)}$

Λύση

Αρχίζουμε από μέσα (από τις παρενθέσεις) προς τα έξω:

α) $A=-\left[-(-3+2)-(-7+4-2)\right]+\left[-(-3)-(-5+6)\right]-(-3+5)=$
$=-\left(+3-2+7-4+2\right)+\left(+3+5-6\right)+3-5=$
$=-3+2-7+4-2+3+5-6+3-5=-7+4+3-6=$
$=-7-6+4+3=-13+7=-6$

β) $B=-\left[(-3+8-4)-(-2+1)\right]+\left[(-5+4)-(-2+6+4)-(-3+1)\right]=$
$=-\left(-3+8-4+2-1\right)+\left(-5+4+2-6-4+3-1\right)=$
$=+3-8+4-2+1-5+4+2-6-4+3-1=$
$=+3-8-5+4-6+3=+3+4+3-8-5-6=$
$=+10-19=-9$

Εξισώσεις

Υπενθυμίζουμε

$$x + \alpha = \beta \quad ή \quad x = \beta - \alpha$$
$$\alpha + x = \beta \quad ή \quad x = \beta - \alpha$$
$$x - \alpha = \beta \quad ή \quad x = \beta + \alpha$$
$$\alpha - x = \beta \quad ή \quad x = \alpha - \beta$$

Για παράδειγμα είναι:

- $x + (-8) = -3$ ή $x = (-3) - (-8)$ ή $x = (-3) + (+8)$ ή $x = +5$
- $(+8) - x = -7$ ή $x = (+8) - (-7)$ ή $x = (+8) + (+7)$ ή $x = +15$

Όταν κάποιος όρος της εξίσωσης μεταφέρεται στο άλλο μέλος, τότε αυτός αλλάζει πρόσημο.

1.9 **Να λυθούν οι εξισώσεις:**

α) $\mathbf{x + (-8) = +5}$ **β)** $\mathbf{(+9) + x = +7}$

γ) $\mathbf{x - (-4) = -6}$ **δ)** $\mathbf{(-8) - x = +13}$

Λυση

α) Η εξίσωση $x + \alpha = \beta$ δίνει $x = \beta - \alpha$, οπότε:

$x + (-8) = +5$ ή $x = (+5) - (-8)$ ή $x = (+5) + (+8)$ ή $x = +13$

β) Όμοια βρίσκουμε:

$(+9) + x = +7$ ή $x = (+7) - (+9)$ ή $x = (+7) + (-9)$ ή $x = -2$

γ) Η εξίσωση $x - \alpha = \beta$ δίνει $x = \beta + \alpha$, οπότε:

$x - (-4) = -6$ ή $x = (-6) + (-4)$ ή $x = -10$

δ) Η εξίσωση $\alpha - x = \beta$ δίνει $x = \alpha - \beta$, οπότε:

$(-8) - x = +13$ ή $x = (-8) - (+13)$ ή $x = -8 + (-13)$ ή $x = -21$

1.10 **Ποιον αριθμό θα αφαιρέσουμε από τον -5 για να βρούμε διαφορά ίση με -7;**

Λυση

Έστω ότι είναι x ο αριθμός που ζητάμε. Τότε:

$(-5) - x = (-7)$ ή $x = (-5) - (-7)$ ή $x = -5 + 7$ ή $x = +2$

Ερωτήσεις κατανόησης

1.11 Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις.

α) Πώς προσθέτουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς;

β) Πώς προσθέτουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς;

γ) Να γράψετε τις ιδιότητες της πρόσθεσης ρητών αριθμών.

1.12 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

α) Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, ... τις .... τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το ....

β) Για να αφαιρέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, ... από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη .... τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη .... απόλυτη τιμή.

1.13 Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

α	β	$\lvert\alpha\rvert$	$\lvert\beta\rvert$	$\alpha+\beta$	$\alpha-\beta$	$\lvert\alpha\rvert-\lvert\beta\rvert$
-3	5					
7	-4					
-2	-3					
-5	-4					
7	8					
-10	-9					

1.14 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. ☐

β) $(-3) - (+5) = (-3) + (-5) = -8$. ☐

γ) $(-7) - (-3) = (-7) + (+3) = +4$. ☐

δ) $(-3) - (-1) = (-3) + (+1) = -2$. ☐

ε) $-(-8 + 4 - 2) = +8 - 4 + 2$ και $(-3 + 2 - 1) = -3 + 2 - 1$. ☐

στ) $-(4-2+6)+(-3+5)+(-1+3)=-4+2-6-3+5-1+3=$
$=-4-6-1+2+5=-11+7=-4.$ □

Ασκήσεις για εξάσκηση

Βασικές ασκήσεις

1.15 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $(+5)+(+3)$ **β)** $(+8)+(+7)$ **γ)** $(-2)+(-3)$
δ) $(-5)+(-7)$ **ε)** $(+6)+(-8)$ **στ)** $(+10)+(-5)$
ζ) $(-7)+(+5)$ **η)** $(-11)+(+15)$

1.16 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $(+3)+(+4)$ **β)** $(-3)+(-4)$ **γ)** $(+3)+(-4)$
δ) $(-3)+(+4)$ **ε)** $(-5)+(-7)$ **στ)** $(-5)+(+7)$
ζ) $(+5)+(+7)$ **η)** $(+5)+(-7)$

1.17 Να υπολογίσετε τα επόμενα αθροίσματα:

α) $(+7)+(+5)$ **β)** $(+8)+(+22)$ **γ)** $\left(+\frac{3}{8}\right)+\left(+\frac{5}{8}\right)$
δ) $\left(+\frac{11}{10}\right)+\left(+\frac{9}{10}\right)$ **ε)** $(-2)+(-7)$ **στ)** $(-6)+(-5)$
ζ) $\left(-\frac{5}{13}\right)+\left(-\frac{8}{13}\right)$ **η)** $\left(-\frac{8}{19}\right)+\left(-\frac{11}{19}\right)$

1.18 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $(+2)+0$ **β)** $(-2)+0$ **γ)** $(-3)+0$
δ) $0+(-5)$ **ε)** $(-4)+(+4)$ **στ)** $(+7)+(-7)$
ζ) $0+0$ **η)** $(-9)+(+9)$

1.19 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $A=(+3)+(-5)+(-3)+(-1)+(+5)$
β) $B=(-17)+(-13)+(+20)+(+10)+(-7)$
γ) $\Gamma=(-15)+(-7)+(+6)+(+3)+(-20)$
δ) $\Delta=(-31)+(+31)+(-70)+(+70)+(-25)$

1.20 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $A = (+3) + (-2) + (+4)$

β) $B = (-5) + (+3) + (-1)$

γ) $\Gamma = (-3) + (-2) + (-4) + (+1)$

δ) $\Delta = (-6) + (+7) + (-5) + (+3)$

1.21 Να συμπληρώσετε τα διπλανά μαγικά τετράγωνα.

−11		5
	1	
		13

−25		
	5	
−5		35

1.22 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά (κουτάκια) με το κατάλληλο πρόσημο, ώστε να προκύψουν σωστές ισότητες:

α) $(+4)+(\square 5) = +9$

β) $(+5)+(\square 6) = -1$

γ) $(\square 7)+(-8) = -15$

δ) $(\square 7)+(+4) = -3$

ε) $(\square 6)+(\square 10) = -16$

στ) $(\square 6)+(\square 10) = +4$

ζ) $(\square 20)+(\square 7) = +13$

η) $(\square 9)+(\square 1) = +10$

1.23 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $(+3,5) + (+4,2)$

β) $(+3,6) + (-4,5)$

γ) $(-4,5) + (-5,3)$

δ) $(-7,3) + (+4,3)$

ε) $(+9,4) + (-3,7)$

στ) $(+6,5) + (-7,2)$

ζ) $(-8,6) + (-2,4)$

η) $(-6,9) + (+1,9)$

1.24 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{3}{2}\right)$

β) $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{3}{2}\right)$

γ) $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)$

δ) $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)$

ε) $\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{7}{4}\right)$

στ) $\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{7}{4}\right)$

ζ) $\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{7}{4}\right)$

η) $\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{7}{4}\right)$

1.25 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $\left(+\frac{4}{3}\right)+\left(+\frac{7}{6}\right)$

β) $\left(+\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{7}{6}\right)$

γ) $\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(+\frac{7}{6}\right)$

δ) $\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{7}{6}\right)$

1.26 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)$ **β)** $\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)$

γ) $\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)$ **δ)** $\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)$

1.27 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$ **β)** $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)$

γ) $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$ **δ)** $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$

ε) $\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)$ **στ)** $\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)$

ζ) $\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)$ **η)** $\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)$

1.28 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $A=\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)$ **β)** $B=\left(+\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)$

γ) $\Gamma=\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)$ **δ)** $\Delta=\left(+\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{1}{10}\right)+\left(-\frac{1}{20}\right)$

1.29 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $\left(\frac{2}{3}+1\frac{1}{3}\right)+\left(-2\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{13}{3}\right)$

β) $\frac{7}{5}+\left(-1\frac{1}{5}\right)+\left(+2\frac{1}{5}\right)+\frac{3}{5}$

γ) $\frac{11}{3}+\left(-2\frac{1}{4}\right)+\left(-1\frac{1}{6}\right)$

δ) $\frac{5}{9}+\left(+1\frac{1}{3}\right)+\left(-2\frac{1}{9}\right)+\frac{11}{9}$

1.30 Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαφορές:

α) $(+3)-(+5)$ **β)** $(+4)-(-5)$ **γ)** $(-3)-(-7)$

δ) $(-7)-(+5)$ **ε)** $(+7)-(+8)$ **στ)** $(+10)-(+5)$

ζ) $(-9)-(+7)$ **η)** $(-10)-(-15)$

1.31 Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαφορές:

α) $(+3)-(+5)$ **β)** $(+3)-(-5)$ **γ)** $(+5)-(+3)$

δ) $(+5)-(-3)$ **ε)** $(-30)-(+15)$ **στ)** $(+27)-(-30)$

ζ) $(+50)-(+45)$ **η)** $(-60)-(-40)$

1.32 **α)** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	α + β	α − β	β − α
2	−5			
−3		4		
	−4	−10		
3			9	

β) Τι συμπεραίνετε για τους αριθμούς $α - β$ και $β - α$;

1.33 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	+3	+7	−8	−5	−6	+10	−13	+5
β	+4	−5	+2	−6	+9	−11	−7	+7
α + β								
α − β								

1.34 Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\left(+\frac{1}{3}\right)-\left(+\frac{4}{3}\right)$ **β)** $\left(-\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{7}{5}\right)$ **γ)** $\left(-\frac{2}{7}\right)-\left(+\frac{12}{7}\right)$

δ) $\left(+\frac{9}{5}\right)-\left(-\frac{6}{5}\right)$ **ε)** $\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)$ **στ)** $\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)$

ζ) $\left(-\frac{4}{7}\right)-\left(+\frac{1}{2}\right)$ **η)** $\left(+\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{2}{5}\right)$

Υπολογισμός παραστάσεων - Απαλοιφή παρενθέσεων

1.35 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $+3 - 2$ **β)** $+6 + 7$

γ) $-3 - 2$ **δ)** $-3 + 5$

ε) $+4 + 5 - 3$ **στ)** $-3 - 2 + 5 - 7$

ζ) $-3 + 2 - 5 - 7$ **η)** $+5 - 7 - 6 - 3 + 10$

1.36 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $-9 + 6 - 5 + 7$ **β)** $-4 - 7 - 3 + 10$

γ) $9 - 5 - 10 + 15$ **δ)** $-3 + 3 - 9 + 10$

ε) $-8 - 3 + 7 - 15$ **στ)** $-6 + 11 + 14 - 25$

ζ) $5 - 13 - 12 + 25$ **η)** $-5 + 13 - 15 + 27$

1.37 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $5 - 7 - 5 + 6$

β) $7 - 3 + 10 - 15 - 20 + 40$

γ) $-3 + 8 - 10 + 12 - 8$

δ) $3 + 5 - 3 + 7 - 5 + 10 - 10 + 12$

ε) $7 - 8 - 9 + 10 - 12$

στ) $-6 + 7 + 6 - 7 + 10 - 10$

ζ) $7 + 0 - 5 + 7 - 10$

η) $6 + 0 - 6 + 8 - 9 + 10$

1.38 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις, αφού πρώτα απαλείψετε τις παρενθέσεις:

α) $A = +(3 - 4)$

β) $B = -(-5 + 4)$

γ) $\Gamma = -(3 - 4) + (5 - 7) - (3 - 5)$

δ) $\Delta = (-5 + 7) - (3 - 4) + (7 - 8)$

ε) $E = -4 - (7 - 8) + (-5 - 6) - (-10)$

1.39 Να υπολογίσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A = (+4) - (-5) + (-7) - (-6)$

β) $B = (-3) - (-7) + (-5) - (-11)$

γ) $\Gamma = -(+3) + (-5) - (-7) + (-8)$

δ) $\Delta = -(-2) - (+5) - (-7) + (-7)$

ε) $E = +(-3) - (-9) + (-10) - (-12) - (-6)$

στ) $Z = -(+5) - (-8) - (-7) - (+4) - (+9)$

1.40 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $(+2 - 3) + (5 - 7)$

β) $(+3 + 4 - 1) + (+7 - 5 + 3)$

γ) $(6 - 3 + 5 - 7) + (10 - 3 - 5)$

δ) $(3 - 6 - 7) + (-9 + 10 - 2)$

ε) $(+5 - 4 - 3) + (7 - 5 - 8)$

στ) $(7 - 5 + 3) + (-6 + 7 - 10)$

ζ) $(4 - 3 - 5) + (7 - 8 - 9 + 15)$

η) $(6 - 5 + 5 - 3) + (-5 - 6 + 17)$

1.41 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(-3 + 5) - (5 - 7)$

β) $(+3 - 7) - (7 - 5)$

γ) $(8 - 5 + 6) - (7 - 3)$

δ) $(6-5+7)-(8-9+10)$

ε) $(12-5+13)-(-13+5)$

στ) $(-11-5+17)-(-5-6+7)$

ζ) $(-5+7+6)-(-6+5-18)$

η) $(-11+13-14)-(-15+17-12)$

1.42 Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $A=\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(+\frac{7}{12}\right)-\left(+\frac{5}{12}\right)$

β) $B=\left(+\frac{6}{7}\right)-\left(-\frac{5}{14}\right)-\left(+\frac{9}{28}\right)-\left(-\frac{3}{28}\right)$

γ) $\Gamma=\left(-\frac{14}{15}\right)-\left(+\frac{11}{20}\right)-\left(-\frac{3}{10}\right)-\left(-\frac{11}{60}\right)$

δ) $\Delta=\left(-\frac{9}{2}\right)+\left(-\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{11}{8}\right)-\left(-\frac{3}{8}\right)$

1.43 Να κάνετε τις αφαιρέσεις:

α) $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$ **β)** $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}$

γ) $\frac{6}{13}-\frac{2}{13}$ **δ)** $\frac{5}{14}-\frac{3}{14}$

2 Πολλαπλασιασμός-διαίρεση ρητών αριθμών

Βασική θεωρία - Τι πρέπει να γνωρίζω

Α. Πολλαπλασιαμός

θ 1

α) Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο ρητούς αριθμούς;
β) Πότε δύο αριθμοί α και β λέγονται αντίστροφοι;

Απαντηση

α) Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ρητούς αριθμούς εξετάζουμε πρώτα αν είναι ομόσημοι ή ετερόσημοι.

- Αν οι αριθμοί είναι ομόσημοι, τότε πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο **συν** (+).
- Αν οι αριθμοί είναι ετερόσημοι, τότε πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο **πλην** (–).

Παράδειγμα

- $(+5)(+8) = +40$, διότι $5 \cdot 8 = 40$ και αφού οι αριθμοί $+5$, $+8$ είναι ομόσημοι, μπροστά από το γινόμενο 40 βάζουμε το πρόσημο "+".
- $(-6)(-5) = +30$, διότι $6 \cdot 5 = 30$ και το γινόμενο 30 παίρνει το πρόσημο "+", διότι οι αριθμοί -6, -5 είναι ομόσημοι.
- $(-5)(+10) = -50$, διότι $5 \cdot 10 = 50$ και επειδή οι αριθμοί -5, $+10$ είναι ετερόσημοι, μπροστά από το 50 βάζουμε το πρόσημο "–".

- $(-2)(+5)(-4)(-2) = (-2)(+5)(-4)(-2) = (-10)(+8) = -80.$

Αν λοιπόν έχουμε να πολλαπλασιάσουμε περισσότερους από δύο παράγοντες, τότε τους πολλαπλασιάζουμε ανά δύο, αφήνοντας για την επόμενη φορά αυτόν που ίσως περισσεύει. Μπορούμε όμως να εφαρμόσουμε και τη μέθοδο που περιγράφουμε στο θέμα 3.

β) Δύο αριθμοί α και β λέγονται **αντίστροφοι** όταν έχουν γινόμενο τη μονάδα:

$$\alpha \cdot \beta = 1$$

Είναι φανερό ότι ο μόνος αριθμός που δεν έχει αντίστροφο είναι το μηδέν (0), διότι το 0 με όποιον αριθμό και να πολλαπλασιαστεί, δίνει πάντα γινόμενο 0.

Το 0 δεν έχει αντίστροφο!

Παραδείγματα

- Ο αντίστροφος του $+2$ είναι ο $+\frac{1}{2}$.
- Ο αντίστροφος του -3 είναι ο $-\frac{1}{3}$.
- Ο αντίστροφος του $-\frac{2}{5}$ είναι ο $-\frac{5}{2}$.

Θ 2 **Να γραφούν οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών είναι οι αντίστοιχες της πρόσθεσης και είναι οι παρακάτω:

- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ **αντιμεταθετική ιδιότητα**
- $\alpha(\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta)\gamma$ **προσεταιριστική ιδιότητα**
- $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$
- Κάθε αριθμός, εκτός από το 0, έχει αντίστροφο:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \quad \alpha \neq 0$$

- $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ και $\alpha(\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$ **επιμεριστική ιδιότητα**

Σχόλια

α) Η αντιμεταθετική ιδιότητα $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ μας επιτρέπει να αλλάζουμε τη σειρά δύο παραγόντων ενός γινόμενου:

$$(-2)(+5) = (+5)(-2) = -10$$

β) Η προσεταιριστική ιδιότητα $\alpha(\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta)\gamma$ μας επιτρέπει είτε να αντικαθιστούμε δύο παράγοντες με το γινόμενό τους είτε να αναλύουμε έναν παράγοντα σε γινόμενο:

$$(+4)\left[(-25)(+9)\right] = \left[(+4)(-25)\right](+9) = (-100)(+9) = -900$$

γ) Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με το 1, αυτός δεν μεταβάλλεται. Για τον λόγο αυτό το 1 λέγεται **ουδέτερο στοιχείο** για τον πολλαπλασιασμό.

δ) Αν σε ένα γινόμενο κάποιος παράγοντας είναι ίσος με το μηδέν, τότε το γινόμενο αυτό είναι ίσο με το 0:

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11(12 - 12) = 0$$

διότι στο παραπάνω γινόμενο ο παράγοντας $12 - 12$ είναι ίσος με 0, οπότε το γινόμενο είναι 0.

Είναι λοιπόν ανώφελο (αλλά και κουραστικό) να πολλαπλασιάσουμε κάποιους από τους αριθμούς αυτούς, αφού με μια προσεκτική ματιά βλέπουμε ότι το γινόμενο είναι ίσο με 0.

ε) Δύο αριθμοί α, β που είναι διάφοροι του μηδενός και έχουν γινόμενο 1 $(\alpha \cdot \beta = 1)$ λέγονται αντίστροφοι.

Ο μόνος αριθμός που δεν έχει αντίστροφο είναι το 0.

στ) Με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας βρίσκουμε ότι:

- $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$
- $(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) = \alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma + \beta\delta$

Θ 3 Πώς υπολογίζουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Όπως γίνεται φανερό από τον κανόνα πολλαπλασιασμού δύο θετικών ρητών αριθμών $(+)(+) = (+)$, όταν όλοι οι παράγοντες ενός γινομένου είναι θετικοί, τότε το γινόμενο είναι θετικός αριθμός.

Επομένως, ο υπολογισμός ενός γινομένου απαιτεί τη σχετική προσοχή μόνο αν υπάρχουν και αρνητικοί παράγοντες.

Επειδή όμως $(-)(-)=(+)$, καταλήγουμε στον παρακάτω κανόνα:

- Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο **πολλών παραγόντων** (που κανένας δεν είναι μηδέν), πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:
  - Το πρόσημο συν $(+)$, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **άρτιο** (ζυγό).
  - Το πρόσημο πλην $(-)$, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **περιττό** (μονό).
- Αν ένας τουλάχιστον παράγοντας του γινομένου είναι μηδέν (0), τότε και το γινόμενο είναι ίσο με μηδέν.

Σχόλιο

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι:

- Αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων ενός γινομένου είναι άρτιος αριθμός, τότε το γινόμενο είναι θετικός αριθμός (ή μηδέν, αν κάποιος παράγοντας είναι μηδέν).
- Αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων ενός γινομένου είναι περιττός αριθμός, τότε το γινόμενο είναι αρνητικός αριθμός (ή μηδέν, αν κάποιος παράγοντας είναι μηδέν).

Το πλήθος των θετικών παραγόντων δεν παίζει λοιπόν απολύτως κανένα ρόλο για το πρόσημο του γινομένου, παρά μόνο για την (απόλυτη) τιμή του.

Παράδειγμα

- $(+1)(-2)(-3)(+4)(-5)=-120$, διότι $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$ και το πλήθος των αρνητικών παραγόντων $(-2, -3, -5)$ είναι 3, δηλαδή περιττός αριθμός.
- $(-1)(-2)(-3)(-4)(+5)=+120$, διότι $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$ και το πλήθος των αρνητικών παραγόντων $(-1, -2, -3, -4)$ είναι 4, δηλαδή άρτιος αριθμός.

Β. Διαίρεση

Θ 4 Πώς διαιρούμε δύο ρητούς αριθμούς;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:

- το πρόσημο $+$, αν οι αριθμοί είναι ομόσημοι,
- το πρόσημο $-$, αν οι αριθμοί είναι ετερόσημοι.

Από τα παραπάνω μπορούμε να εξάγουμε τον εξής κανόνα προσήμων για τη διαίρεση ρητών:

- $(+):(+)=+,\quad (-):(-)=+$
- $(+):(-)=-,\quad (-):(+)=-$

Βλέπουμε λοιπόν ότι στη διαίρεση ρητών ισχύει ο ίδιος κανόνας προσήμων που ισχύει και στον πολλαπλασιασμό.

Παραδείγματα

- $(+10):(+2)=+5,\ (-10):(-2)=+5$
- $(-15):(+3)=-5,\ (+15):(-3)=-5$

Σχόλια

α) Σε κάθε διαίρεση, ο διαιρέτης δεν μπορεί ποτέ να είναι μηδέν. Άρα και σε κάθε κλάσμα $\frac{α}{β}$ είναι $β \neq 0$.

Διαίρεση με το μηδέν δεν ορίζεται.

β) Το πηλίκο της διαίρεσης $α:β$, δηλαδή ο $\frac{α}{β}$ λέγεται και **λόγος** του $α$ προς το $β$.

γ) Ο λόγος του $α$ προς το $β$, δηλαδή ο $\frac{α}{β}$ (με $β \neq 0$) ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $βx=α$.

δ) Η διαίρεση είναι στην πραγματικότητα πολλαπλασιασμός, διότι μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{α}{β}=α\cdot\frac{1}{β}$$

Για να διαιρέσουμε λοιπόν τον α με τον β ($\beta \neq 0$) αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον α με τον αντίστροφο του β.

Λυμένες ασκήσεις

Α. Πολλαπλασιαμός

2.1 **Να υπολογιστούν τα γινόμενα:**

α) $(+3)(+7)$ **β)** $(-2)(-10)$ **γ)** $(-5)(+6)$

δ) $(+4)(-8)$ **ε)** $(-5)(-8)$ **στ)** $(+6)(-7)$

Λύση

Όταν οι αριθμοί είναι ομόσημοι (έχουν δηλαδή το ίδιο πρόσημο), το γινόμενο είναι θετικό ενώ όταν είναι ετερόσημοι, το γινόμενο είναι αρνητικό.

α) $(+3)(+7) = +21$, διότι $3 \cdot 7 = 21$ και “$(+)(+) = +$”.

β) $(-2)(-10) = +20$, διότι $2 \cdot 10 = 20$ και “$(-)(-) = +$”.

γ) $(-5)(+6) = -30$, διότι $5 \cdot 6 = 30$ και “$(-)(+) = (-)$”.

δ) $(+4)(-8) = -32$, διότι $4 \cdot 8 = 32$ και “$(+)(-) = -$”.

ε) $(-5)(-8) = +40$, διότι “$(-)(-) = +$”.

στ) $(+6)(-7) = -42$, διότι “$(+)(-) = -$”.

2.2 **Να υπολογιστούν τα γινόμενα:**

α) $\left(+\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{9}{2}\right)$ **β)** $\left(-\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{16}{3}\right)$

γ) $(-8)\left(+\frac{7}{4}\right)$ **δ)** $(+6)\left(-\frac{9}{2}\right)$

Λύση

Επειδή έχουμε γινόμενο με κλάσματα, εκτός από το σωστό πρόσημο, μας ενδιαφέρει επίσης να απλοποιήσουμε το αποτέλεσμα. Έτσι:

α) $\left(+\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{9}{2}\right) = +\frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 2} = +\frac{18}{6} = +3$

β) $\left(-\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{16}{3}\right) = +\frac{3 \cdot 16}{8 \cdot 3} = +\frac{16}{8} = +2$

γ) $(-8)\left(+\frac{7}{4}\right) = -\frac{8 \cdot 7}{4} = -2 \cdot 7 = -14$

δ) $(+6)\left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{6 \cdot 9}{2} = -3 \cdot 9 = -27$

Όπως έγινε φανερό από τα παραπάνω παραδείγματα, η απλοποίηση είναι προτιμότερο να γίνεται πριν πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς που βρίσκονται στους όρους των κλασμάτων, χωρίς βέβαια να σημαίνει ότι αυτό είναι υποχρεωτικό.

2.3 **Να γίνουν οι πράξεις:**

α) $\mathbf{A = (-3)(+5) + (-4)(-6) - (-2)(-5)}$

β) $\mathbf{B = (-4)(-8) - (-3)(+4) + (+6)(-7)}$

Λύση

Ακολουθούμε την προτεραιότητα των πράξεων:

α) $A = (-3)(+5) + (-4)(-6) - (-2)(-5) = (-15) + (+24) - (+10) =$

$= -15 + 24 - 10 = -15 - 10 + 24 = -25 + 24 = -1.$

β) $B = (-4)(-8) - (-3)(+4) + (+6)(-7) = (+32) - (-12) + (-42) =$

$= +32 + 12 - 42 = +44 - 42 = +2.$

Σχόλια - Μέθοδος

Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων προσέχουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις:

- Αν κάποιος παράγοντας είναι μηδέν, τότε το γινόμενο ισούται με μηδέν.
- Αν κανένας παράγοντας δεν είναι μηδέν, τότε βρίσκουμε το πλήθος των αρνητικών μόνο παραγόντων (αριθμών) και στο γινόμενο των απολύτων τιμών βάζουμε:
  - το πρόσημο +, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιο,
  - το πρόσημο −, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττό.

Μπορούμε όμως να βρούμε ένα τέτοιο γινόμενο αν πάρουμε τους παράγοντες ανά δύο και επαναλάβουμε αυτό το βήμα όσες φορές χρειαστεί:

$$(-1)(-2)(+3)(-4)(+5) = (+2)(-12)(+5) = (-24)(+5) = -120$$

Σύμφωνα με τα σχόλια, συντομεύουμε όμως τη λύση γράφοντας:

- $(-1)(-2)(+3)(-4)(+5) = -(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5) = -120$, διότι το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι 3, δηλαδή περιττός αριθμός και έτσι το γινόμενο θα έχει μπροστά πλην $(-)$.

2.4 **Να γίνουν οι πράξεις στις παραστάσεις:**

α) $\mathbf{A = (-1)(-2)(-3) - (-2)(+3)(-4)}$

β) $\mathbf{B = (-2)(-4)(-5) - (-1)(-3)(+4)(-2)}$

Λύση

Σύμφωνα με τη μέθοδο που περιγράψαμε στα σχόλια έχουμε:

α) $A = (-1)(-2)(-3) - (-2)(+3)(-4) = (-6) - (+24) = -6 - 24 = -30$.

β) $B = (-2)(-4)(-5) - (-1)(-3)(+4)(-2) = (-40) - (-24) = -40 + 24 = -16$.

2.5 **Να βρεθούν ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι θετικοί και ποιοι αρνητικοί:**

α) $\mathbf{A = (-1)(-2)(-3)(-4)\cdot \ldots \cdot(-2010)(-2011)}$

β) $\mathbf{B = (-1)(+2)(-3)(+4)\cdot \ldots \cdot(-2011)(+2012)}$

γ) $\mathbf{\Gamma = (-1)(-3)(-5)\cdot \ldots \cdot(-1821)}$

δ) $\mathbf{\Delta = (-2)(-4)(-6)\cdot \ldots \cdot(-1940)}$

Λύση

Βρίσκουμε στην κάθε περίπτωση μόνο το πλήθος των αρνητικών παραγόντων.

α) Στο γινόμενο $A = (-1)(-2)(-3)(-4)\cdot \ldots \cdot(-2010)(-2011)$ το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι 2011, δηλαδή περιττό, οπότε ο A είναι αρνητικός $(A < 0)$.

β) Στο γινόμενο $B = (-1)(+2)(-3)(+4)\cdot \ldots \cdot(-2011)(+2012)$ οι μισοί αριθμοί, που το πλήθος τους είναι $2012 : 2 = 1006$, είναι αρνητικοί. Επειδή ο 1006 είναι άρτιος, ο B είναι θετικός αριθμός $(B > 0)$.

γ) Το πλήθος των αριθμών $1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 1821$ είναι ίσο με:

$$\frac{1821 + 1}{2} = \frac{1822}{2} = 911$$

δηλαδή περιττός αριθμός. Άρα ο Γ είναι αρνητικός αριθμός.

δ) Το πλήθος των αρνητικών παραγόντων στο γινόμενο:

$$\Delta = (-2)(-4)(-6)\cdot \ldots \cdot(-1940)$$

είναι $1940 : 2 = 970$, δηλαδή άρτιο. Άρα ο Δ είναι θετικός αριθμός.

Σχόλιο - Μέθοδος

Αν μια παράσταση έχει μεταβλητές και θέλουμε να αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με συγκεκριμένους ρητούς αριθμούς, τότε τους αρνητικούς αριθμούς τους βάζουμε πάντα σε παρένθεση.

Έτσι αν $A = 2\alpha - \beta\gamma - \alpha(\beta - \gamma)$ και $\alpha = 3$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$, θα είναι:

$$A = 2\alpha - \beta\gamma - \alpha(\beta - \gamma) = 2\cdot 3 - (-1)(-2) - 3\big[(-1) - (-2)\big] =$$
$$= 6 - (+2) - 3(-1 + 2) = 6 - 2 - 3(+1) = 4 - 3 = 1$$

2.6 **Αν $\alpha = -1$, $\beta = -2$ και $\gamma = +3$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις:**

α) $A = \alpha(\beta + \gamma) + \beta(\gamma - \alpha) - \gamma(\alpha - \beta)$

β) $B = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$

Λύση

Όπως έχουμε αναφέρει στα σχόλια, οι αριθμοί, μετά την αντικατάσταση μπαίνουν σε παρενθέσεις, ώστε να μην αλλοιωθεί η μορφή της παράστασης.

α) $A = \alpha(\beta + \gamma) + \beta(\gamma - \alpha) - \gamma(\alpha - \beta) =$

$= (-1)\big[(-2) + (+3)\big] + (-2)\big[(+3) - (-1)\big] - (+3)\big[(-1) - (-2)\big] =$

$= (-1)(-2 + 3) + (-2)(+3 + 1) - (+3)(-1 + 2) =$

$= (-1)(+1) + (-2)(+4) - (+3)(+1) =$

$= (-1) + (-8) - (+3) = -1 - 8 - 3 = -12$

β) $B = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) =$

$= (-1)(-2) + (-2)(+3) + (+3)(-1) + (-1)(-2)(+3)\big[(-1) + (-2) + (+3)\big] =$

$= (+2) + (-6) + (-3) + (+6)(-1 - 2 + 3) =$

$= +2 - 6 - 3 + (+6)\cdot 0 = +2 - 6 - 3 + 0 =$

$= +2 - 9 = -7$

Β. Διαίρεση

2.7 **Να υπολογιστούν τα παρακάτω πηλίκα:**

α) $(+10) : (+2)$ **β) $(-20) : (-5)$** **γ) $(-35) : (+7)$**

δ) $(+42) : (-7)$ **ε) $(-24) : (-6)$** **στ) $(+40) : (-5)$**

Λύση

Σύμφωνα με τον κανόνα των προσήμων για τη διαίρεση (και τον πολλαπλασιασμό):

- $(+):(+) = +, \qquad (-):(-) = +$
- $(+):(-) = -, \qquad (-):(+) = -$

βρίσκουμε τα εξής αποτελέσματα:

α) $(+10):(+2) = +5$, διότι $10:2 = 5$ και $+:+ = +$

β) $(-20):(-5) = +4$, διότι $20:5 = 4$ και $-:- = +$

γ) $(-35):(+7) = -5$, διότι $35:7 = 5$ και $-:+ = -$

δ) $(+42):(-7) = -6$, διότι $42:7 = 6$ και $+:- = -$

ε) $(-24):(-6) = +4$, διότι $24:6 = 4$ και οι αριθμοί -24, -6 είναι ομόσημοι.

στ) $(+40):(-5) = -8$, διότι $40:5 = 8$ και οι αριθμοί $+40$, -5 είναι ετερόσημοι.

2.8 Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

α) $\left(-\frac{4}{5}\right):\left(-\frac{2}{5}\right)$ **β)** $\left(+\frac{6}{7}\right):\left(-\frac{3}{7}\right)$

γ) $(-3{,}2):(-0{,}8)$ **δ)** $(-4{,}8):(+1{,}2)$

Λύση

α) $\left(-\frac{4}{5}\right):\left(-\frac{2}{5}\right) = +\left(\frac{4}{5}:\frac{2}{5}\right) = +\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{2}\right) = +\frac{20}{10} = +2$

β) $\left(+\frac{6}{7}\right):\left(-\frac{3}{7}\right) = -\left(\frac{6}{7}:\frac{3}{7}\right) = -\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{3}\right) = -\frac{42}{21} = -2$

γ) $(-3{,}2):(-0{,}8) = +(3{,}2:0{,}8) = +32:8 = +4$

δ) $(-4{,}8):(+1{,}2) = -(4{,}8:1{,}2) = -(48:12) = -4$

2.9 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $\mathrm{A} = (-8):(-2) - (-16):(+8) - (+3):(-1)$

β) $\mathrm{B} = (-15):(+3) - (+18):(-9) - (-7):(-4-3)$

Λύση

Επειδή η διαίρεση έχει προτεραιότητα έναντι της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, έχουμε:

α) $\mathrm{A} = (-8):(-2) - (-16):(+8) - (+3):(-1) = (+4) - (-2) - (-3) =$
$= 4 + 2 + 3 = 9.$

β) $\mathrm{B} = (-15):(+3) - (+18):(-9) - (-7):(-4-3) =$
$= -5 - (-2) - (-7):(-7) = -5 + 2 - (+1) = -5 + 2 - 1 = -4.$

2.10 **Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:**

α) $A = \dfrac{(-2)-(-3)(+4)}{(-3)-(-4):(-2)}$ **β)** $B = \dfrac{(-4)(-2)-(-8):(+4)}{(-3):(-1)-(-10):(-2)}$

Λύση

Ακολουθούμε την προτεραιότητα των πράξεων:

α) $A = \dfrac{(-2)-(-3)(+4)}{(-3)-(-4):(-2)} = \dfrac{(-2)-(-12)}{(-3)-(+2)} = \dfrac{-2+12}{-3-2} = \dfrac{+10}{-5} = -2$

β) $B = \dfrac{(-4)(-2)-(-8):(+4)}{(-3):(-1)-(-10):(-2)} = \dfrac{+8-(-2)}{(+3)-(+5)} = \dfrac{+8+2}{+3-5} = \dfrac{+10}{-2} = -5$

2.11 **Να λυθούν οι εξισώσεις:**

α) $(-2)x = +16$ **β)** $(-3)x = -15$

γ) $(-2)(x-3) = -8$ **δ)** $(x+2):(-3) = (-4)$

Λύση

α) $(-2)x = +16$ ή $x = (+16):(-2)$ ή $x = -8$

β) $(-3)x = -15$ ή $x = (-15):(-3)$ ή $x = +5$

γ) $(-2)(x-3) = -8$ ή $x-3 = (-8):(-2)$ ή $x-3 = +4$ ή $x = 4+3$ ή $x = 7$

δ) $(x+2):(-3) = -4$ ή $x+2 = (-3)(-4)$ ή $x+2 = +12$ ή
$x = +12-2$ ή $x = 10$

2.12 **Να υπολογιστεί η παράσταση:**

$$A = (-2)\left[-\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right):\left(+\frac{2}{5}\right)\right]-\left[-\frac{2}{5}+\left(-\frac{8}{5}\right):\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$$

Λύση

Θα εργαστούμε από μέσα προς τα έξω, κάνοντας δηλαδή τις πράξεις μέσα στις αγκύλες:

$$A = (-2)\left[-\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right):\left(+\frac{2}{5}\right)\right]-\left[-\frac{2}{5}+\left(-\frac{8}{5}\right):\left(-\frac{4}{5}\right)\right]=$$

$$= (-2)\left[-\left(+\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}:\frac{2}{5}\right)\right]-\left[-\frac{2}{5}+\left(+\frac{8}{5}:\frac{4}{5}\right)\right]=$$

$$= (-2)\left[-\frac{12}{15}-\left(-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{2}\right)\right]-\left[-\frac{2}{5}+\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{4}\right]=$$

$$= (-2)\left[-\frac{4}{5}-\left(-\frac{20}{10}\right)\right]-\left(-\frac{2}{5}+\frac{40}{20}\right)=$$

$$= (-2)\left(-\frac{4}{5}+2\right)-\left(-\frac{2}{5}+2\right) = (-2)\left(-\frac{4}{5}+2\right)+\frac{2}{5}-2 =$$

$$= +\frac{8}{5}-4+\frac{2}{5}-2 =$$

$$= +\frac{8}{5}+\frac{2}{5}-4-2 = \frac{10}{5}-4-2 = 2-4-2 = -4$$

Σχόλιο

Στο σημείο $A = (-2)\left(-\frac{4}{5}+2\right)+\frac{2}{5}-2$ μπορούμε αντί για την επιμεριστική ιδιότητα να προχωρήσουμε ως εξής:

$$A = (-2)\left(-\frac{4}{5}+\frac{10}{5}\right)+\frac{2}{5}-2 = (-2)\frac{-4+10}{5}+\frac{2}{5}-2 =$$

$$= (-2)\frac{6}{5}+\frac{2}{5}-2 = -\frac{12}{5}+\frac{2}{5}-2 = \frac{(-12)+2}{5}-2 =$$

$$= \frac{-10}{5}-2 = -2-2 = -4$$

Τονίζουμε ότι $-\frac{4}{5}+\frac{10}{5} = \frac{(-4)+10}{5}$ κ.λπ.

Είναι λάθος να γράψουμε ότι $-\frac{4}{5}+\frac{10}{5} = -\frac{4+10}{5}$ διότι στο κλάσμα $-\frac{4}{5}$ το πλην μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι το πρόσημο του αριθμητή, δηλαδή:

$$-\frac{4}{5} = \frac{-4}{5}$$

Αυτή είναι η πιο καλή τακτική όταν προσθέτουμε ή αφαιρούμε κλάσματα.

Ερωτήσεις κατανόησης

2.13 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α) $(+)(+) = \ldots$ και $(-)(-) = \ldots$

β) $(-)(+) = \ldots$ και $(+)(-) = \ldots$

γ) Ισχύει ότι $\alpha\beta = \ldots\ldots\ldots$, $(\alpha\beta)\gamma = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $\alpha(\beta+\gamma) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $\alpha(\beta-\gamma) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = \ldots$ και $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \ldots$

δ) Αν πολλαπλασιάσουμε 1000 αριθμούς, από τους οποίους οι 900 είναι θετικοί και οι 100 είναι αρνητικοί, το γινόμενό τους θα είναι ………………… αριθμός (επιλέξτε θετικός ή αρνητικός). Αν έχουμε 901 θετικούς και 99 αρνητικούς, τότε το γινόμενο θα είναι ………………………… αριθμός.

ε) Ισχύει ότι $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2.14 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) $(+)(+) = (+)$, $(-)(-) = (+)$ και $(+)(-) = (-)$. ☐

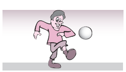
β) Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι άλλοτε θετικό και άλλοτε αρνητικό. ☐

γ) $\alpha(\beta-\gamma) = \alpha\beta - \gamma$ και $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \gamma$. ☐

δ) Το γινόμενο περιττού πλήθους αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός, ενώ το γινόμενο άρτιου πλήθους αρνητικών αριθμών είναι θετικός αριθμός. ☐

ε) Αν σε ένα γινόμενο υπάρχουν 100 παράγοντες με πρόσημο (+) και 99 παράγοντες με πρόσημο (−), τότε το γινόμενο αυτών των 199 αριθμών θα είναι θετικός αριθμός. ☐

Ασκήσεις για εξάσκηση



Βασικές ασκήσεις

2.15 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $(+3)(+2)$ **β)** $(+4)(-2)$ **γ)** $(-3)(-2)$

δ) $(-5)(+4)$ **ε)** $(-2)(+10)$ **στ)** $(-3)(-5)$

ζ) $(+6)(+7)$ **η)** $(+3)(-8)$

2.16 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $(+15)(-3)$ **β)** $(-7)(-8)$ **γ)** $(-11)(+3)$

δ) $(+42)(+2)$ **ε)** $0 \cdot (-128)$ **στ)** $(-35) \cdot 0$

ζ) $(+14)(-1)$ **η)** $(-19)(-1)$ **θ)** $(-0{,}2)(-0{,}5)$

ι) $(-0{,}3)(+11)$ **κ)** $(0{,}7)(-0{,}6)$ **λ)** $(+1{,}7)(+2{,}5)$

2.17 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $(-6)\left(-\frac{2}{3}\right)$ **β)** $(-8)\left(+\frac{7}{4}\right)$

γ) $(+12)\left(-\frac{5}{6}\right)$ **δ)** $(-15)\left(+\frac{3}{5}\right)$

2.18 Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

α) $\left(+\frac{8}{3}\right)\left(+\frac{18}{4}\right)$ **β)** $\left(+\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{15}{2}\right)$ **γ)** $\left(-\frac{16}{7}\right)\left(-\frac{14}{8}\right)$

δ) $\left(-\frac{35}{21}\right)\left(+\frac{42}{5}\right)$ **ε)** $\left(-\frac{12}{13}\right)\left(+\frac{26}{6}\right)$ **στ)** $\left(+\frac{25}{11}\right)\left(-\frac{22}{5}\right)$

2.19 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $\left(-\frac{1}{3}\right)(+6)$ **β)** $\left(-\frac{2}{5}\right)(-10)$ **γ)** $\left(-\frac{4}{5}\right)(+20)$

δ) $\left(+\frac{4}{9}\right)(+18)$ **ε)** $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{9}{4}\right)$ **στ)** $\left(-\frac{13}{10}\right)\left(-\frac{20}{39}\right)$

ζ) $\left(-\frac{15}{7}\right)\left(+\frac{14}{45}\right)$ **η)** $\left(+\frac{16}{11}\right)\left(+\frac{33}{64}\right)$

2.20 Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

α) $(+3)(\ldots\ldots) = 12$ **β)** $(+4)(\ldots\ldots) = -20$

γ) $(-6)(\ldots\ldots) = -12$ **δ)** $(-5)(\ldots\ldots) = 30$

ε) $(\ldots\ldots)(+7) = 21$ **στ)** $(\ldots\ldots)(-4) = 28$

2.21 Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις:

α) $(-2)(+6)(-5)$ **β)** $(-5)(-7)(+2)$

γ) $(-4)(-8)(+5)$ **δ)** $(-6)(+4)(+5)$

2.22 Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

α) $(-1)(+2)(-3)$ **β)** $(-2)(-4)(-5)$

γ) $(-2)(+3)(+6)$ **δ)** $(-2)(-3)(+7)$

2.23 Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

α) $\left(+\frac{1}{2}\right)(-6)\left(-\frac{1}{3}\right)$ **β)** $\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{12}{5}\right)\left(-\frac{25}{2}\right)$

γ) $\left(-\frac{7}{3}\right)\left(+\frac{9}{14}\right)\left(-\frac{28}{3}\right)$ **δ)** $\left(-\frac{5}{16}\right)\left(+\frac{32}{15}\right)\left(+\frac{9}{2}\right)$

2.24 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $A = 3(-2)(-1)(-3)$ **β)** $B = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{4}{5}\left(-\frac{5}{6}\right)(-6)$

2.25 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω αριθμοί είναι θετικοί ή αρνητικοί:

α) $A = (-1)(-11)(+111)(-1111)(-11.111)$

β) $B = (+2)(-22)(-222)(-2222)(+22.222)$

2.26 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\left(+\frac{4}{5}\right)\left(+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)$

β) $B = \left(-1-\frac{1}{2}\right)\left(-1-\frac{1}{3}\right)\left(-1-\frac{1}{4}\right)\left(-1-\frac{1}{5}\right)\left(-1-\frac{1}{6}\right)$

2.27 Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A = (-3) - (-2)(-4) - (-1)(+5)$

β) $B = (-4)(-1)(-2) - (-5)(+2) - (-3)(+1)(-1)$

γ) $\Gamma = (-10)(-2)(-3) - (-2)(-3)(-4) - (-3)(-4)(-5)$

2.28 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = -3 + (-7 + 5)(-2) + 4(-2)$

β) $B = -4(-2 + 5)(-7 + 4) - (-3)(-2) - (-1)(-9)(+2)$

γ) $\Gamma = (-4 + 3)(-5 + 4)(-8 + 7) - (-7 + 6)(-7 + 9)(-11 + 10)$

δ) $\Delta = -(-4 + 3)(-7 + 6) - (-9 + 6)(-10 + 12) - (+7 - 6)$

2.29 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = \frac{5}{6} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$ **β)** $B = \frac{7}{8} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{3} - \frac{1}{8}$

γ) $\Gamma = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3} + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}$ **δ)** $A = 5\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{9}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{24}$

2.30 Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις:

α) $(+9) : (+3)$ **β)** $(+9) : (-3)$ **γ)** $(-9) : (+3)$

δ) $(-9) : (-3)$ **ε)** $(+12) : (+6)$ **στ)** $(+36) : (-9)$

ζ) $(-24) : (+6)$ **η)** $(-25) : (+5)$

2.31 Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α) $\frac{12}{6}$ **β)** $\frac{24}{-4}$ **γ)** $\frac{-27}{9}$ **δ)** $\frac{-18}{-2}$

ε) $\frac{45}{15}$ **στ)** $\frac{-45}{5}$ **ζ)** $\frac{-36}{12}$ **η)** $\frac{-63}{-21}$

2.32 Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) $\left(+\frac{4}{3}\right):\left(+\frac{4}{9}\right)$ **β)** $\left(-\frac{5}{6}\right):\left(+\frac{15}{12}\right)$ **γ)** $\left(-\frac{25}{13}\right):\left(-\frac{50}{26}\right)$

δ) $\left(-\frac{4}{5}\right):\left(+\frac{8}{15}\right)$ **ε)** $\frac{15}{6}:\left(-\frac{10}{18}\right)$ **στ)** $\left(-\frac{7}{13}\right):\left(+\frac{14}{39}\right)$

2.33 Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) $(+2):\left(-\frac{1}{2}\right)$ **β)** $(+3):\left(+\frac{1}{4}\right)$ **γ)** $\left(-\frac{3}{2}\right):3$

δ) $\left(-\frac{4}{9}\right):\left(-\frac{1}{9}\right)$ **ε)** $\left(-\frac{12}{5}\right):\left(+\frac{1}{10}\right)$ **στ)** $(-5):\left(+\frac{15}{27}\right)$

2.34 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = (-3)(-2) + (-12) : (+6) - (-25) : (-5)$

β) $B = [2 : (-1)](-2) + [(-15) : (-3)] : (-5)$

γ) $\Gamma = (-14) : (+7) - (-2) - [(-16) : (-4)]\cdot 3$

δ) $\Delta = 12 : (-3) + (-27) : (+9) + (-36) : (-12) - (48) : (-12)$

2.35 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = [(-4) : (-2) - (-3)] : (-5) - [-3 - (-8) : (+4)]$

β) $B = -[(-9) : (+3) - (-2) : (+2)](-1) - [-(-3 - 3 : 3)]$

γ) $\Gamma = (-8) : (-4) - [-5 : (-4 - 1) - (-5) : 5] : (-1)$

2.36 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2} - 1\right) - 3\left(-\frac{7}{3}\right) - \frac{1}{2} : 3$

β) $B = \frac{5}{6} : \left(\frac{7}{2} - 2\right) - \frac{1}{2}\left(-3 + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{7}{6}\right) : (-6)$

2.37 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A = \left[\frac{13}{7} - \frac{13}{7} : (-39)\right]\cdot \frac{21}{50}$

β) $B = \left[\frac{12}{5} + \frac{1}{16} : \left(-\frac{25}{64}\right)\right]\left(-\frac{5}{14}\right)$

γ) $\Gamma = \left[-2 + 6\,\frac{2}{11} : (-11)\right] : \left(-\frac{310}{11}\right)$

2.38 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = 1 - 3\left[5 - (-2)(-3) - \frac{1}{2}\right] : \left(\frac{5}{2} - 2\right)$

β) $B = 1 + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{5}{3}\right) - \frac{4}{3} : \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{5}{2}\right)$

γ) $\Gamma = -\frac{5}{6} : \left(-3 + \frac{7}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[-3\left(\frac{1}{2} - 1\right) + 1\right] - \frac{1}{12}$

δ) $\Delta = \left[\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right] : (-5) + 3\left(-\frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{6}$

2.39 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(-3)x = 6$ **β)** $2x = -4$ **γ)** $(-4)x = -8$

δ) $(-2) : x = -1$ **ε)** $8 : x = -2$ **στ)** $(-9) : x = -3$

2.40 Αν $\alpha = -4$ και $\beta = -8$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \alpha : (-2) - \beta : (-4)$

β) $B = 2\alpha : \beta + \beta : \alpha$

γ) $\Gamma = (\alpha\beta) : (-16) + [\beta : (-2)]\alpha$

δ) $\Delta = (\beta + \alpha) : (\beta - \alpha)$

1ο Κριτήριο Αξιολόγησης

Θέμα 1ο

Α. α) Ποιοι αριθμοί ονομάζονται αντίστροφοι;

β) Ποιοι αριθμοί ονομάζονται αντίθετοι;

Β. Αν $\alpha + \beta > 0$ και $\alpha\beta < 0$, να βρείτε τα πρόσημα των αριθμών α και β.

Γ. Ποιος αριθμός δεν έχει αντίστροφο και γιατί;

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός. ☐

β) Το πηλίκο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός. ☐

γ) Το άθροισμα δύο ετερόσημων αριθμών είναι ίσο με το μηδέν. ☐

δ) Ο αντίστροφος του $\frac{1}{\alpha}$ είναι ο α. ☐

ε) Ο αντίθετος του $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ο $-\frac{\beta}{\alpha}$. ☐

στ) Αν $\alpha + \beta = 0$, τότε οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι. ☐

Θέμα 2ο

α) Να γράψετε τον αντίστροφο του αριθμού $\frac{\alpha}{\beta}$, με $\alpha, \beta \neq 0$.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \left(-1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{3}\right)\left(-2 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{4}\right)$$

γ) Να γράψετε τον αντίστροφο του αριθμού Α.

Θέμα 3ο

Δίνεται η παράσταση:

$$A = 4 - \frac{2 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} - (2 \cdot 6 - 4) : \frac{4}{5} - 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = -\dfrac{20}{3}$.

β) Να γράψετε τον αντίθετο και τον αντίστροφο του αριθμού A.

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $\left[A : \left(-\dfrac{40}{9}\right)\right] : \dfrac{3}{2}$.

Θέμα 4ο

Α. Αν $\alpha + \beta = -2$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A = 2(3\beta - \alpha) + 4(\alpha - \beta)$

β) $B = 5(\alpha - 3) + 2(\beta - \alpha) - (-4 - \beta)$

Β. Αν $A = -4$ και $B = -17$, τότε:

α) να γράψετε τον αντίστροφο του $\dfrac{A}{B}$,

β) να υπολογίσετε την παράσταση $\dfrac{1 + \dfrac{1}{A}}{1 + \dfrac{1}{B + 1}}$.

3 Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

Βασική θεωρία - Τι πρέπει να γνωρίζω

θ 1

α) Τι είναι οι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί;

β) Πότε ένας κλασματικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως περιοδικός δεκαδικός και πότε όχι;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί είναι αυτοί που τα δεκαδικά ψηφία τους είναι άπειρα και ύστερα από κάποια θέση, μετά την υποδιαστολή, ένα ψηφίο ή μια ομάδα ψηφίων επαναλαμβάνεται συνεχώς.

Για παράδειγμα οι παρακάτω δεκαδικοί αριθμοί είναι περιοδικοί:

- $2,7777... = 2,\overline{7}$, με περίοδο τον αριθμό 7,
- $3,252525... = 3,\overline{25}$, με περίοδο το 25,
- $-2,3424242... = -2,3\overline{42}$, με περίοδο το 42,
- $\frac{5}{3} = 1,666... = 1,\overline{6}$, με περίοδο 6.

Σχόλιο

Από το τελευταίο παράδειγμα βλέπουμε ότι:

- Ορισμένοι κλασματικοί αριθμοί γράφονται ως περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί.
- Όλοι οι περιοδικοί αριθμοί γράφονται ως κλασματικοί.

β) Αν σε έναν κλασματικό αριθμό $\frac{\alpha}{\beta}$ ο παρονομαστής β έχει πρώτους παράγοντες μόνο το 2 ή το 5, τότε αυτός, στη δεκαδική του μορφή, δεν είναι περιοδικός, διότι τα δεκαδικά του ψηφία τερματίζονται (δεν είναι δηλαδή άπειρα).

Αν όμως κάποιος παράγοντας είναι διαφορετικός από το 2 και το 5, τότε ο αριθμός $\frac{α}{β}$ στη δεκαδική του παράσταση, είναι περιοδικός.
Τονίζουμε ότι το κλάσμα $\frac{α}{β}$ πρέπει να είναι ανάγωγο.

Θ 2 **Πώς γράφουμε έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό στη μορφή κλάσματος;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ας δούμε την απάντηση με ένα παράδειγμα: Έστω $x = 2,7444... = 2,7\overline{4}$ ο περιοδικός αριθμός που θέλουμε να γράψουμε ως κλάσμα. Είναι:

$$x = 2,7\overline{4}$$
$$10x = 27,\overline{4}$$
$$100x = 274,44... = 274,\overline{4}$$

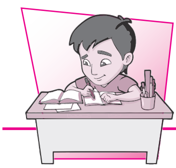
Αφαιρούμε από τη δεύτερη ισότητα την πρώτη:

$$100x - 10x = 274,\overline{4} - 27,\overline{4}$$
$$90x = 247$$
$$x = \frac{247}{90}$$

Πολλαπλασιάζουμε λοιπόν τον αριθμό με 10, 100, 1000 κ.λπ., ώστε τη μία φορά η υποδιαστολή να φτάσει ακριβώς πριν αρχίσει η περίοδος και την άλλη να φτάσει για πρώτη φορά μετά την περίοδο. Η περίπτωση αυτή φαίνεται και σε λυμένο θέμα που ακολουθεί.

Σχόλιο

Υπάρχουν κι άλλοι τρόποι για να μετατρέψουμε έναν περιοδικό σε κλασματικό.



Λυμένες ασκήσεις

Ρητοί - περιοδικοί αριθμοί

Υπενθυμίζουμε

- Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να πάρει τη μορφή **δεκαδικού** ή **περιοδικού δεκαδικού** αριθμού.

- Αν σε έναν περιοδικό αριθμό η περίοδος αρχίζει ακριβώς μετά την υποδιαστολή, τότε αυτός λέγεται **απλός δεκαδικός** αριθμός, διαφορετικά λέγεται **μικτός περιοδικός**.
- Αν σε ένα ανάγωγο κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ (που δεν απλοποιείται δηλαδή) ο παρονομαστής β έχει παράγοντες μόνο δυνάμεις του 2 ή του 5, τότε το $\frac{\alpha}{\beta}$ γράφεται ως δεκαδικός αλλά όχι ως περιοδικός αριθμός.

3.1 **Να γραφούν στην κλασματική τους μορφή οι αριθμοί:**

α) $2,\overline{3}$ **β)** $3,7\overline{42}$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x = 2,\overline{3}$. Τότε:

- $x = 2,\overline{3} = 2,333\ldots$
- $10x = 23,33\ldots = 23,\overline{3}$

Άρα:

- $10x - x = 23,\overline{3} - 2,\overline{3}$

$9x = 21$

$x = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

Άλλος τρόπος

- $x = 2,\overline{3} = 2,333\ldots = 2 + 0,333\ldots$

οπότε:

$0,333\ldots = x - 2 \qquad (1)$

- $10x = 23,33\ldots = 23 + 0,33$

$10x \overset{(1)}{=} 23 + x - 2$

$10x - x = 21$

$9x = 21$

$x = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

β) Έστω $x = 3,7\overline{42}$. Τότε:

- $x = 3,7\overline{42} = 3,74242\ldots$
- $10x = 37,4242\ldots = 37,\overline{42} =$
$= 37,4242\ldots$
- $1000x = 3742,\overline{42}$

Άρα:

- $1000x - 10x = 3742,\overline{42} - 37,\overline{42}$

$990x = 3705$

$x = \frac{3705}{990} = \frac{1235}{330}$

Άλλος τρόπος

- $x = 3,7\overline{42} = 3,74242\ldots$
- $10x = 37,4242\ldots = 37 + 0,4242\ldots$

οπότε:

$0,4242\ldots = 10x - 37 \qquad (1)$

- $1000x = 3742,42\ldots$

$1000x = 3742 + 0,4242\ldots$

$1000x \overset{(1)}{=} 3742 + (10x - 37)$

$1000x - 10x = 3742 - 37$

$990x = 3705$

$x = \frac{3705}{990} = \frac{1235}{330}$

Βλέπουμε στο ερώτημα (β) ότι αν ο περιοδικός δεν είναι απλός, τότε τον πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλη δύναμη του 10, ώστε το περιοδικό μέρος να αρχίζει ακριβώς μετά την υποδιαστολή. Στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως στο παράδειγμα (α).

3.2 **Να γραφούν στην κλασματική μορφή οι αριθμοί:**

α) $2,\overline{9}$ **β)** $3,3\overline{9}$

Λύση

α) Έστω $x = 2,\overline{9} = 2,999\ldots$ Τότε:

- $x = 2,999\ldots = 2 + 0,999\ldots$

  και έτσι:

  $$0,999\ldots = x - 2 \qquad (1)$$

- $10x = 29,99\ldots$

  $10x = 29 + 0,99\ldots$

  $10x \overset{(1)}{=} 29 + x - 2$

  $10x - x = 29 - 2$

  $9x = 27$

  $x = \dfrac{27}{9}$

  $x = 3$

Άρα $2,\overline{9} = 3$.

β) Έστω $x = 3,3\overline{9}$. Είναι:

- $x = 3,3\overline{9} = 3,3999\ldots$
- $10x = 33,999\ldots$

  $10x = 33 + 0,999\ldots$

  οπότε:

  $$0,999 = 10x - 33 \qquad (1)$$

- $100x = 339,99\ldots$

  $100x = 339 + 0,999\ldots$

  $100x \overset{(1)}{=} 339 + 10x - 33$

  $100x - 10x = 339 - 33$

  $90x = 306$

  $x = \dfrac{306}{90}$

  $x = \dfrac{34}{10}$ ή $x = 3,4$

Σχόλιο

Αν ένας δεκαδικός περιοδικός αριθμός έχει περίοδο το 9, τότε αυτός είναι δεκαδικός. Επομένως:

$$2,\overline{9} = 3, \quad 3,3\overline{9} = 3,40, \quad 5,7\overline{9} = 5,80$$

Μετατροπή δεκαδικού σε κλάσμα

Γενική Μέθοδος

Α. Αν με $\overline{\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu}$ συμβολίσουμε το δεκαδικό αριθμό με ακέραιο μέρος α_0 και δεκαδικά ψηφία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ τότε ο αριθμός αυτός μετατρέπεται σε κλασματικό με τον τύπο:

$$\overline{\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu} = \frac{\overline{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu}}{10^\nu}$$

Για παράδειγμα είναι:

$$2,3 = \frac{23}{10}, \quad 25,27 = \frac{2527}{10^2} = \frac{2527}{100}$$

Β. Αν με $\overline{\alpha_0,(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu)}$ συμβολίσουμε τον δεκαδικό αριθμό με ακέραιο μέρος α_0 και περιοδικό τμήμα τον αριθμό $\overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}$, τότε ο αριθμός αυτός μετατρέπεται σε κλασματικό με τον τύπο:

$$\overline{\alpha_0,(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu)} = \frac{\overline{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu} - \alpha_0}{\underbrace{999\ldots9}_{\nu \text{ ψηφία}}}$$

Για παράδειγμα είναι:

$$0,(3) = 0,\overline{3} = \frac{3}{9}, \quad 2,(15) = 2,\overline{15} = \frac{215-2}{99} = \frac{213}{99}$$

Ας αναφέρουμε στην πράξη ότι ο αριθμός $\overline{\alpha_0,(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu)}$ συμβολίζεται με:

$$\alpha_0,\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu}$$

Δηλαδή η γραμμή τίθεται πάνω από το περιοδικό μόνο μέρος του αριθμού.
Έτσι, αντί για $\overline{2,7(53)}$ γράφουμε $2,7\overline{53}$.

Γ. Αν με $\overline{\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu(\beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu)}$ συμβολίσουμε τον δεκαδικό περιοδικό αριθμό με ακέραιο μέρος α_0 και περίοδο $\overline{\beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu}$, τότε ο αριθμός αυτός μετατρέπεται σε κλασματικό σύμφωνα με τον τύπο:

$$\overline{\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu(\beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu)} = \frac{\overline{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu\beta_1\beta_2\ldots\beta_\nu} - \overline{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu}}{\underbrace{999\ldots9}_{\nu \text{ ψηφία}}\underbrace{000\ldots0}_{\mu \text{ ψηφία}}}$$

Θυμίζουμε ότι η γραμμή πάνω από όλο τον αριθμό δηλώνει ότι πρόκειται για αριθμό και όχι για το γινόμενο των ψηφίων α_1, α_2, …, α_μ, β_1, β_2, …, β_ν.
Επομένως μπορούμε απευθείας να γράφουμε:

- $2,(7) = \frac{27-2}{9} = \frac{25}{9}$, δηλαδή $2,\overline{7} = \frac{25}{9}$
- $0,2(51) = \frac{251-2}{990} = \frac{249}{990}$, δηλαδή $0,2\overline{51} = \frac{249}{990}$
- $1,23\overline{456} = \frac{123456-123}{99900} = \frac{123333}{99900}$, δηλαδή $1,23(456) = \frac{123333}{99900}$

Ασκήσεις για εξάσκηση

3.3 Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους επόμενους ρητούς αριθμούς:

α) $\frac{57}{10}$ **β)** $-\frac{625}{10}$ **γ)** $\frac{135}{100}$ **δ)** $-\frac{459}{100}$

ε) $\frac{2}{5}$ **στ)** $-\frac{4}{5}$ **ζ)** $\frac{5}{4}$ **η)** $-\frac{7}{8}$

3.4 Να γράψετε σε δεκαδική περιοδική μορφή τους παρακάτω ρητούς:

α) $\frac{1}{3}$ **β)** $-\frac{7}{3}$ **γ)** $\frac{13}{9}$ **δ)** $-\frac{33}{9}$

ε) $\frac{7}{11}$ **στ)** $-\frac{45}{11}$ **ζ)** $\frac{56}{15}$ **η)** $-\frac{83}{15}$

3.5 Να γράψετε σε κλασματική μορφή τους παρακάτω αριθμούς:

α) $0,\overline{5}$ **β)** $0,\overline{6}$ **γ)** $-1,\overline{7}$ **δ)** $-2,\overline{3}$

ε) $13,\overline{51}$ **στ)** $-14,\overline{65}$ **ζ)** $15,\overline{82}$ **η)** $-6,\overline{483}$

3.6 Να γράψετε σε κλασματική μορφή τους αριθμούς:

α) $1,4\overline{5}$ **β)** $-3,5\overline{6}$ **γ)** $17,4\overline{8}$ **δ)** $19,0\overline{4}$

ε) $-3,45\overline{8}$ **στ)** $4,5\overline{69}$ **ζ)** $-35,4\overline{58}$ **η)** $51,65\overline{733}$

3.7 Να βρείτε με ποιον δεκαδικό αριθμό είναι ίσοι οι επόμενοι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί:

α) $0,\overline{9}$ **β)** $9,\overline{9}$ **γ)** $19,\overline{9}$ **δ)** $99,\overline{9}$

3.8 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = 0,\overline{3} + 0,\overline{6} + 1,\overline{2}$ **β)** $B = 2 \cdot 0,\overline{7} + 3 \cdot 1,\overline{5} - 4,\overline{6}$

γ) $\Gamma = 3,\overline{6} \cdot \frac{18}{11} + 7,\overline{5} \cdot \frac{9}{17}$ **δ)** $\Delta = 6,\overline{45} \cdot 99 - 3,49\overline{1} \cdot 60$

ε) $E = \frac{0,4\overline{6}}{0,\overline{3}} + \frac{0,\overline{4}}{0,1\overline{6}} - \frac{7}{105}$ **στ)** $Z = (2 \cdot 7,\overline{61} - 6 \cdot 1,\overline{45}) : \frac{4}{99}$

3.9 Πόσα διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία χρειαζόμαστε για να γράψουμε σε δεκαδική μορφή το κλάσμα $\frac{20}{11}$;

3.10 Σε ένα ανάγωγο κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι $\beta = 12$. Πόσα ψηφία έχει η περίοδος αυτού του αριθμού, αν γραφεί ως δεκαδικός αριθμός;

3.11 Να βρείτε το ψηφίο x έτσι, ώστε να ισχύει η ισότητα $0,x\overline{30} = \frac{175}{330}$.

4 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

Βασική θεωρία - Τι πρέπει να γνωρίζω

θ 1 Τι ονομάζουμε δύναμη και πώς τη συμβολίζουμε;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δύναμη με **βάση** α και **εκθέτη** ν ονομάζουμε το γινόμενο:

$$\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

και τη συμβολίζουμε με α^ν. Είναι δηλαδή:

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

Ο αριθμός α λέγεται **βάση** και ο αριθμός ν λέγεται **εκθέτης** της δύναμης.

Για παράδειγμα είναι:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad (-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$$

- Στη δύναμη 2^3 η βάση είναι το 2 και ο εκθέτης το 3.
- Στη δύναμη $(-3)^4$ βάση είναι ο αριθμός -3 και εκθέτης ο αριθμός 4.

Σχόλια

- Αν $\nu = 1$, τότε γράφουμε $\alpha^1 = \alpha$.
- Η δύναμη α^ν λέγεται και **νιοστή δύναμη του** α.
- Η δύναμη α^2 λέγεται και **τετράγωνο του** α ή α **στο τετράγωνο**.
- Η δύναμη α^3 λέγεται **κύβος του** α ή α **στον κύβο**.

Θ 2 Πώς βρίσκουμε το πρόσημο μιας δύναμης $α^ν$;

Απαντηση

Έχουμε μέχρι τώρα μάθει ότι στη δύναμη $α^ν$ ο αριθμός (βάση) $α$ είναι ρητός και ο εκθέτης $ν$ είναι φυσικός. Για να βρίσκουμε το πρόσημο της δύναμης $α^ν$, δηλαδή για να αποφασίζουμε αν ο αριθμός $α^ν$ είναι θετικός ή αρνητικός, χρησιμοποιούμε τους παρακάτω κανόνες:

- **Αν η βάση $α$ είναι θετικός αριθμός**, τότε η δύναμη $α^ν$ είναι πάντα θετικός αριθμός:

  Αν $α > 0$, τότε $α^ν > 0$

- **Αν η βάση $α$ είναι αρνητικός αριθμός**, τότε κοιτάζουμε τον εκθέτη $ν$:

  - Αν ο εκθέτης $ν$ είναι άρτιος, τότε η δύναμη $α^ν$ είναι θετικός αριθμός.

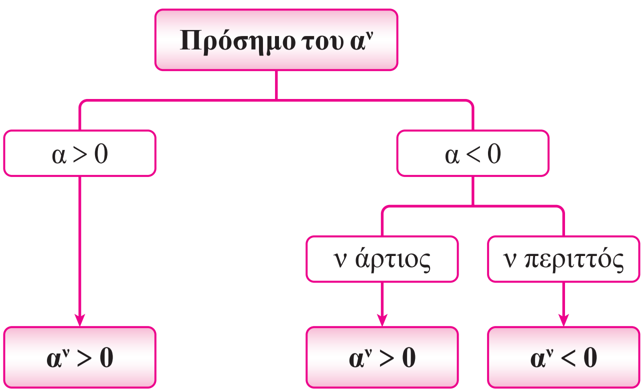
  Αν $α < 0$ και ο $ν$ είναι άρτιος, τότε $α^ν > 0$

  Για παράδειγμα είναι $(-2)^{100} > 0$ και $(-3)^{1000} > 0$, διότι οι εκθέτες 100 και 1000 είναι άρτιοι αριθμοί.

  - Αν ο εκθέτης $ν$ είναι περιττός, τότε η δύναμη $α^ν$ είναι αρνητικός αριθμός.

  Αν $α < 0$ και ο $ν$ είναι περιττός, τότε $α^ν < 0$

  Για παράδειγμα είναι $(-2)^{19} < 0$, διότι $-2 < 0$ και ο 19 είναι περιττός αριθμός.



Θυμίζουμε ότι:

- Αν $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha^0 = 1$.
- Αν $\nu \neq 0$, τότε $0^\nu = 0$.

Θ 3 **Να γράψετε τις ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό αριθμό.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Οι ιδιότητες των δυνάμεων είναι απλές, αλλά πολύ σημαντικές και θα τις συναντάμε σε κάθε βήμα, τόσο στο Γυμνάσιο όσο και στο Λύκειο. Οι ιδιότητες λοιπόν των δυνάμεων είναι οι παρακάτω. Τονίζουμε ότι στις ιδιότητες αυτές θεωρούμε ότι $\alpha, \beta \neq 0$ και πως οι εκθέτες είναι φυσικοί αριθμοί.

1. Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την **ίδια βάση**, αφήνουμε την ίδια βάση και προσθέτουμε τους εκθέτες:

$$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$$

Για παράδειγμα είναι $3^5 \cdot 3^8 = 3^{5+8} = 3^{13}$.

2. Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την **ίδια βάση** αφήνουμε την ίδια βάση και αφαιρούμε τους εκθέτες:

$$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}, \quad \frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$$

Για παράδειγμα είναι $2^{15} : 2^{12} = 2^{15-12} = 2^3 = 8$.

3. Για να υψώσουμε μια δύναμη σε εκθέτη αφήνουμε την ίδια βάση και πολλαπλασιάζουμε τους εκθέτες:

$$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$$

Για παράδειγμα είναι $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$.

4. Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε τον κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό:

$$(\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$$

Για παράδειγμα είναι $(2 \cdot 5)^8 = 2^8 \cdot 5^8$, $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4$.

5. Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε εκθέτη, υψώνουμε καθέναν από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτό:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$$

Για παράδειγμα είναι $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$, $\frac{10^5}{5^5} = \left(\frac{10}{5}\right)^5 = 2^5 = 32$.

Λυμένες ασκήσεις

4.1 **Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:**

α) $A = 2^5 : 4^2 - 3^4 : (-9)^2 + (2-1)^{2012}$

β) $B = (2^3 + 2^2 + 3) : (-15) - (-6)^2 : (3^3 + 3^2) + (7 - 2^3)^4$

Λύση

α) Είναι $2^5 = 32$, $4^2 = 16$, $3^4 = 81$, $(-9)^2 = 81$, $(2-1)^{2012} = 1^{2012} = 1$, οπότε:

$$A = 2^5 : 4^2 - 3^4 : (-9)^2 + (2-1)^{2012} = 32 : 16 - 81 : 81 + 1 =$$
$$= 2 - 1 + 1 = 2$$

β) Ακολουθώντας την προτεραιότητα των πράξεων και υπολογίζοντας τις δυνάμεις βρίσκουμε:

$$B = (2^3 + 2^2 + 3) : (-15) - (-6)^2 : (3^3 + 3^2) + (7 - 2^3)^4 =$$
$$= (8 + 4 + 3) : (-15) - (+36) : (27 + 9) + (7 - 8)^4 =$$
$$= 15 : (-15) - (+36) : (36) + (-1)^4 =$$
$$= -1 - 1 + 1 = -1$$

4.2 **Να υπολογιστούν οι δυνάμεις:**

α) $(-2)^4$	**β)** $(-3)^3$	**γ)** $(-5)^2$
δ) $(-3)^4$	**ε)** $(-2)^5$	**στ)** $(-1)^{2011}$

Λύση

Σε όλες αυτές τις δυνάμεις η βάση είναι αρνητικός αριθμός, οπότε εξετάζουμε αν ο εκθέτης είναι άρτιος ή περιττός. Αν ο εκθέτης είναι άρτιος, τότε η δύναμη είναι θετικός αριθμός, ενώ αν είναι αρνητικός, τότε η δύναμη είναι αρνητικός αριθμός.

α) $(-2)^4 = +2^4 = +16$

β) $(-3)^3 = -3^3 = -27$

γ) $(-5)^2 = +5^2 = 25$

δ) $(-3)^4 = +3^4 = 81$

ε) $(-2)^5 = -2^5 = -32$

στ) $(-1)^{2011} = -1^{2011} = -1$

Τονίζουμε ότι μόλις εξοικειωθούμε αρκετά με τις δυνάμεις που έχουν αρνητική βάση, θα γράφουμε κατευθείαν:

$$(-2)^4 = +16, \quad (-3)^3 = -27, \quad (-5)^2 = +25, \quad (-3)^4 = +81, \quad \text{κ.λπ.}$$

και θα παραλείπουμε το ενδιάμεσο βήμα που γράψαμε στη λύση.

4.3 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $\mathbf{A = \dfrac{-3^2}{(-3)^2} + \dfrac{-2^4}{(-2)^4} + \dfrac{-5^2}{(-5)^2}}$

β) $\mathbf{B = (-5^3) : (-5)^3 + (-3^4) : (-3)^4 - (-2^5) : (-2)^5}$

Λυση

α) Ο υπολογισμός του -3^2 θέλει προσοχή, διότι αποτελεί την πιο σημαντική παγίδα στις δυνάμεις. Το -3^2 δεν είναι δύναμη, αλλά ο αντίθετος της δύναμης 3^2. Με άλλα λόγια, το -3 δεν είναι βάση, οπότε δεν κοιτάζουμε τον εκθέτη.

Είναι λοιπόν $-3^2 = -9$ και όχι $+9$, όπως θα περίμενε κάποιος. Άρα $-3^2 \neq (-3)^2$. Όμοια είναι $-2^4 = -16$ και $-5^2 = -25$.

Επειδή $(-3)^2 = +9$, $(-2)^4 = +16$ και $(-5)^2 = 25$, παίρνουμε:

$$A = \frac{-3^2}{(-3)^2} + \frac{-2^4}{(-2)^4} + \frac{-5^2}{(-5)^2} = \frac{-9}{(+9)} + \frac{-16}{(+16)} + \frac{-25}{(+25)} =$$
$$= (-1) + (-1) + (-1) = -3$$

β) Προτιμάμε να υπολογίσουμε τις δυνάμεις:

$$B = (-5^3) : (-5)^3 + (-3^4) : (-3)^4 - (-2^5) : (-2)^5 =$$
$$= (-125) : (-125) + (-81) : (+81) - (-32) : (-32) =$$
$$= 1 + (-1) - 1 = 1 - 1 - 1 = -1$$

4.4 Με εφαρμογή των ιδιοτήτων των δυνάμεων να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $\mathbf{\dfrac{2^5 \cdot 2^{10}}{2^{13}}}$

β) $\mathbf{\dfrac{3^{20} : 3^{12}}{3^6}}$

γ) $\mathbf{\dfrac{(-2)^8(-2)^6}{(-2)^7(-2)^4}}$

δ) $\mathbf{\dfrac{(-5)^8(-5)^{13}(-5)^4}{(-5)^{11}(-5)^{12}}}$

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2^5 \cdot 2^{10} = 2^{5+10} = 2^{15}$, οπότε $\dfrac{2^5 \cdot 2^{10}}{2^{13}} = \dfrac{2^{15}}{2^{13}} = 2^{15-13} = 2^2 = 4$.

β) Είναι $3^{20} : 3^{12} = 3^{20-12} = 3^8$, οπότε $\dfrac{3^{20} : 3^{12}}{3^6} = \dfrac{3^8}{3^6} = 3^{8-6} = 3^2 = 9$.

γ) Είναι:

- $(-2)^8(-2)^6 = (-2)^{8+6} = (-2)^{14}$
- $(-2)^7(-2)^4 = (-2)^{7+4} = (-2)^{11}$

Επομένως έχουμε:

$$\frac{(-2)^8(-2)^6}{(-2)^7(-2)^4} = \frac{(-2)^{14}}{(-2)^{11}} = (-2)^{14-11} = (-2)^3 = -8$$

δ) Είναι:

- $(-5)^8(-5)^{13}(-5)^4 = (-5)^{8+13+4} = (-5)^{25}$
- $(-5)^{11}(-5)^{12} = (-5)^{11+12} = (-5)^{23}$

Επομένως βρίσκουμε:

$$\frac{(-5)^8(-5)^{13}(-5)^4}{(-5)^{11}(-5)^{12}} = \frac{(-5)^{25}}{(-5)^{23}} = (-5)^{25-23} = (-5)^2 = +25$$

4.5 **Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:**

α) $\mathbf{4^{10} : (2^6)^3}$ **β)** $\mathbf{27^5 : 9^6}$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή ο υπολογισμός των δυνάμεων είναι επίπονος, θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε ιδιότητες των δυνάμεων. Επειδή έχουμε διαίρεση, σκεφτόμαστε να μετατρέψουμε όλες τις δυνάμεις με τέτοιο τρόπο, ώστε να έχουν την ίδια βάση. Είναι όμως:

- $4^{10} = (2^2)^{10} = 2^{2 \cdot 10} = 2^{20}$
- $(2^6)^3 = 2^{6 \cdot 3} = 2^{18}$

Επομένως, σύμφωνα με την ιδιότητα $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$ παίρνουμε:

$$4^{10} : (2^6)^3 = 2^{20} : 2^{18} = 2^{20-18} = 2^2 = 4$$

β) Επειδή $27 = 3^3$ και $9 = 3^2$, παίρνουμε:

- $27^5 = (3^3)^5 = 3^{3 \cdot 5} = 3^{15}$
- $9^6 = (3^2)^6 = 3^{2 \cdot 6} = 3^{12}$

Άρα βρίσκουμε:

$$27^5 : 9^6 = 3^{15} : 3^{12} = 3^{15-12} = 3^3 = 27$$

4.6 **Να υπολογιστεί η παράσταση** $\mathbf{A = \dfrac{(-4)^{12}}{8^7} + \dfrac{(-81)^6}{27^8}}$.

Λύση

Γίνεται φανερό ότι δεν συμφέρει ο υπολογισμός καμιάς από τις δυνάμεις που παρουσιάζονται στην άσκηση. Για τον λόγο αυτό θα μετατρέψουμε τις δυνάμεις σε νέες δυνάμεις που να έχουν στο κάθε κλάσμα την ίδια βάση. Είναι λοιπόν:

- $(-4)^{12} = +4^{12} = 4^{12} = (2^2)^{12} = 2^{24}$
- $8^7 = (2^3)^7 = 2^{21}$
- $(-81)^6 = +81^6 = 81^6 = (3^4)^6 = 3^{24}$
- $27^8 = (3^3)^8 = 3^{24}$

Άρα η παράσταση Α γίνεται:

$$A = \frac{(-4)^{12}}{8^7} + \frac{(-81)^6}{27^8} = \frac{2^{24}}{2^{21}} + \frac{3^{24}}{3^{24}} = 2^{24-21} + 1 = 2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$$

4.7 Να διαταχθούν από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο οι αριθμοί:

$$\alpha = 2^{100}, \quad \beta = 3^{75}, \quad \gamma = 5^{50}$$

Λύση

Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τους τρεις αυτούς αριθμούς ως δυνάμεις, που να έχουν όμως τον ίδιο εκθέτη. Ένας κοινός διαιρέτης των αριθμών $100,\ 75,\ 50$ είναι ο 25, οπότε έχουμε:

- $\alpha = 2^{100} = 2^{4\cdot 25} = (2^4)^{25} = 16^{25}$
- $\beta = 3^{75} = 3^{3\cdot 25} = (3^3)^{25} = 27^{25}$
- $\gamma = 5^{50} = 5^{2\cdot 25} = (5^2)^{25} = 25^{25}$

Επειδή $16 < 25 < 27$ είναι $\alpha < \gamma < \beta$.

4.8 Σε πόσα μηδενικά τελειώνουν οι αριθμοί:

α) $A = 4^8 \cdot 6^4 \cdot 25^{10}$ **β)** $B = 15^7 \cdot 8^6 \cdot 6^8$

Λύση

α) Θα γράψουμε τον αριθμό αυτό στη μορφή $\alpha \cdot 10^\nu$, όπου α είναι φυσικός που δεν τελειώνει σε μηδέν. Είναι:

$$4^8 \cdot 6^4 \cdot 25^{10} = (2^2)^8(2\cdot 3)^4(5^2)^{10} = 2^{16}\cdot 2^4\cdot 3^4\cdot 5^{20} = 2^{16+4}\cdot 3^4\cdot 5^{20} = 2^{20}\cdot 3^4\cdot 5^{20} =$$
$$= (2^{20}\cdot 5^{20})\cdot 3^4 = (2\cdot 5)^{20}\cdot 3^4 = 81\cdot 10^{20}$$

Άρα ο αριθμός Α τελειώνει σε 20 μηδενικά.

β) Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο. Είναι:

$$B = 15^7\cdot 8^6\cdot 6^8 = (3\cdot 5)^7(2^3)^6(2\cdot 3)^8 = 3^7\cdot 5^7\cdot 2^{18}\cdot 2^8\cdot 3^8 = (3^7\cdot 3^8)\cdot 5^7\cdot (2^{18}\cdot 2^8) =$$
$$= 3^{15}\cdot 5^7\cdot 2^{26} = 3^{15}\cdot 5^7\cdot 2^7\cdot 2^{19} = 3^{15}\cdot 2^{19}(5\cdot 2)^7 = 3^{15}\cdot 2^{19}\cdot 10^7$$

Άρα ο αριθμός Β τελειώνει σε 7 μηδενικά.

4.9 **Αν διαιρέσουμε τον αριθμό 7^{2011} με τον 100, ποιο θα είναι το υπόλοιπο της Ευκλείδειας αυτής διαίρεσης;**

Λύση

Παρατηρούμε ότι:

$$7^2 = 49,\ \ 7^3 = 343,\ \ 7^4 = 2401$$

Κάθε λοιπόν δύναμη του 7^4 θα τελειώνει σε 01.

Είναι όμως:

$$7^{2011} = 7^{2008} \cdot 7^3 = 7^{4 \cdot 502} \cdot 7^3 = (7^4)^{502} \cdot 343 = (\ldots 01) \cdot 343 = \ldots 43$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης $7^{2011} : 100$ είναι $υ = 43$.

Ερωτήσεις κατανόησης

4.10 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις.

α) Είναι $\underbrace{α \cdot α \cdot \ldots \cdot α}_{ν \text{ παράγοντες}} = \ldots\ldots,\ \ α^1 = \ldots$ και $α^0 = \ldots,$ όπου $α \neq 0$.

β) Ισχύει ότι $α^μ \cdot α^ν = \ldots\ldots\ldots\ldots,\ \ α^μ : α^ν = \ldots\ldots\ldots\ldots,\ \ (α \cdot β)^μ = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$ $(α^μ)^ν = \ldots\ldots\ldots$ και $\left(\frac{α}{β}\right)^ν = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

γ) Αν ο $ν$ είναι άρτιος αριθμός και $α < 0$, τότε η δύναμη $α^ν$ είναι πάντοτε ………………… αριθμός.

δ) Αν ο $ν$ είναι περιττός αριθμός και $α < 0$, τότε η δύναμη $α^ν$ είναι πάντοτε ……………………… αριθμός.

4.11 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) Ισχύει ότι $α^μ \cdot α^ν = α^{μν}$ και $α^μ : α^ν = α^{μ : ν}$. ☐

β) Ισχύει ότι $(α^μ)^ν = α^{μν}$ και $(αβ)^ν = α^ν \cdot β^ν$. ☐

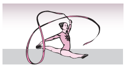
γ) Αν ο $α$ είναι αρνητικός και ο $ν$ είναι άρτιος, τότε ο $α^ν$ είναι θετικός αριθμός. ☐

δ) Αν ο $ν$ είναι άρτιος, τότε $-α^ν = (-α)^ν$. ☐

ε) Αν ο $ν$ είναι περιττός αριθμός, τότε $(-α)^ν = -α^ν$. ☐

στ) Είναι $-2^4 = 16$ και $-1^{2012} = 1$. ☐

Ασκήσεις για εξάσκηση



Υπολογισμός δυνάμεων

4.12 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) 2^3 **β)** -2^3 **γ)** $(-2)^3$ **δ)** $(-2)^4$

ε) $-(-2)^4$ **στ)** $-(-2)^3$ **ζ)** $-(-2^2)$ **η)** $-(-2^3)$

4.13 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) $(-1)^3$ **β)** $(-1)^4$ **γ)** $-(-1)^5$ **δ)** $-(-1)^6$

ε) $(-2)^4$ **στ)** $-(-2)^5$ **ζ)** $-(-2)^6$ **η)** $-(-2^3)$

θ) $-(-3^2)$ **ι)** $-(-3^3)$ **κ)** $-(-3)^4$ **λ)** $[-(-3)]^3$

4.14 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ **β)** $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$ **γ)** $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ **δ)** $-\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

ε) $-\left(-\frac{4}{3}\right)^2$ **στ)** $\left[-\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right]^2$

4.15 Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω αριθμών:

α) $(-3)^6$ **β)** $(-2)^5$ **γ)** -3^6 **δ)** -2^5

ε) $-(-2^5)$ **στ)** $-(-3)^6$

4.16 Να κάνετε τις επόμενες πράξεις:

α) $(2-3)^3$ **β)** $(5-3)^4$ **γ)** $(10-12)^5$

δ) $(17-14)^3$ **ε)** $(-1)^7-(-2)^3$ **στ)** $(-3)^3+(-2)^6$

ζ) $(-4)^3+(-3)^4$ **η)** $(-5)^2-(-3)^4$

4.17 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A=(-1)^4+(-2)^3+(-3)^2$

β) $B=(-5)^2-(-5)^3-5^3$

γ) $\Gamma=(-3)^2+(-4)^2-(-3)^3+(-1)^{2009}$

δ) $\Delta=(-4)^3-(-3)^3-(-2)^5+(-2)^6$

4.18 Να υπολογίσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A=(-2)^3+(-5)^2+(-1)^3+(-6)^2+(-3)^3$

β) $B=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)-(-3)^2+(-1)^2$

γ) $\Gamma=(-2)^4\cdot 3-2^4+(-5)^2+[4-(-1)]^2-(-3)^4$

δ) $\Delta=(3^4-4^3)-6^2:(2\cdot 3^2)-(-8+5)^3(-4+3)^5$

ε) $E = (-3)^3 + 2(-2)^2 - (3 - 2^2) + 6(-2)^2$

στ) $Z = 2\left[3 - (-3) - 4(-3)^2\right] + 2{,}5(-2)^2$

4.19 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = [(-3)^3 : 3 - (-2)^4 : (-2^3)] : \left(-\dfrac{1}{2^3}\right)$

β) $B = \dfrac{(-1)^7 + (-3)^3}{(-5)^1} - \dfrac{(-1)^{16} + (-2)^3 + (-1)^9}{-2^6 : 4^2} + (2^3 - 1) : 5$

γ) $\Gamma = \dfrac{(-2)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)^2 : \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{-(-2-7)^2 - 7(-8)} + \left(-\dfrac{1}{10}\right)^2$

δ) $\Delta = \dfrac{(2^5 : 2^4 + 3^4 : 3^3)^2 : (25^2 : 5^3)}{(5^2 - 3^2) : (2^2 - 3) - (6^2 + 3 \cdot 2^2) : (-2)^2}$

4.20 Αν $x = -2$ και $y = +3$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = x^3 + 2xy^2 + y^3$

β) $B = \dfrac{x^2 - xy^2 - 5y}{2x^2y - 7y} + \dfrac{2x}{y}$

Ιδιότητες των δυνάμεων

4.21 Να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $2^7 \cdot 2^6$ **β)** $3^8 \cdot 3^9$ **γ)** $5^6 \cdot 5^4 \cdot 5^3$

δ) $7^{19} \cdot 7^{21} \cdot 7^{10}$ **ε)** $(-2)^5(-2)^6(-2)^4$ **στ)** $(-3)^4(-3)^3(-3)^7$

4.22 Να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $3^{10} : 3^5$ **β)** $2^{15} : 2^9$ **γ)** $(-3)^8 : (-3)^2$

δ) $(-4)^{10} : (-4)^7$ **ε)** $\dfrac{7^{15}}{7^4}$ **στ)** $\dfrac{6^{19}}{6^{13}}$

ζ) $\dfrac{(-7)^{19}}{(-7)^{12}}$ **η)** $\dfrac{(-8)^{24}}{(-8)^{18}}$

4.23 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) $2^3 \cdot 2^2$ **β)** $3^3 \cdot 3$ **γ)** $5^2 \cdot 5^2$

δ) $2^{10} : 2^6$ **ε)** $3^{20} : 3^{17}$ **στ)** $5^6 : 5^3$

4.24 Να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $3^5 \cdot 5^5$ **β)** $(-2)^6(-5)^6$ **γ)** $3^7(-4)^7$

δ) $(-7)^6(-2)^6$ **ε)** $(-2)^5 \cdot 2^5(-3)^5$ **στ)** $(-4)^{11}(-2)^{11}(-3)^{11}$

4.25 Να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης τις παραστάσεις:

α) $12^5 : 3^5$ **β)** $18^7 : 3^7$ **γ)** $(-16)^{10} : 4^{10}$

δ) $(-35)^{13} : (-7)^{13}$ **ε)** $\dfrac{(-64)^{19}}{4^{19}}$ **στ)** $\dfrac{27^{21}}{(-9)^{21}}$

4.26 Να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης τις παραστάσεις:

α) $(2^3)^5$ **β)** $[(-3)^6]^2$ **γ)** $[(-2)^4]^3$ **δ)** $[(-5)^5]^3$

4.27 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) $[(-2)^3]^3$ **β)** $[(-3)^2]^2$ **γ)** $[-(-3)^2]^2$

δ) $[-(-2)^5]^2$ **ε)** $[-(-3)^2]^3$ **στ)** $[-(-2)^4]^2$

4.28 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) $(2^2)^3$ **β)** $(3^2)^2$ **γ)** $(5^2)^2$

δ) $(3^4)^3 : 3^8$ **ε)** $5^{22} : (5^2)^{10}$ **στ)** $(3^3)^5 : (3^5)^3$

4.29 Να γράψετε με τη μορφή δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $(2^3)^4 : 4^2$ **β)** $(3^4)^6 : 81$ **γ)** $(3^4 \cdot 3^5)^3 : 3^{25}$

δ) $(5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^5)^2 : 5^{14}$ **ε)** $(5^3 \cdot 125) : 625$ **στ)** $(256 \cdot 512) : 1024$

4.30 Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μιας δύναμης:

α) $A = [(3^2)^3 : 3^5](3^3)^2$ **β)** $B = [(2^3)^7 : (2^4)^2] : 2^3$

γ) $\Gamma = (2^3 \cdot 2^5)^4 : (2^4 \cdot 2^2)^3$ **δ)** $\Delta = [(3^4)^2 (3^5)^2]^2 : (3^4)^5$

4.31 Να γράψετε ως μια δύναμη τις παραστάσεις:

α) $25 \cdot 5^4$ **β)** $\dfrac{2^8}{32}$ **γ)** $\dfrac{24^3}{27}$

δ) $\dfrac{3^5 \cdot 9}{3^4}$ **ε)** $\dfrac{64 \cdot 2^4}{256}$ **στ)** $\dfrac{(-3)^3[(-3)^2]^4}{-81}$

4.32 Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη:

α) $\dfrac{\alpha^5}{32}$ **β)** $81x^4$ **γ)** $125x^3$

δ) $256\alpha^8$ **ε)** $\dfrac{\alpha^4}{625}$ **στ)** $\dfrac{x^5}{243}$

4.33 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

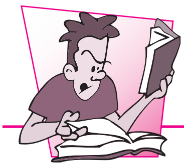
α) $A = \dfrac{3^7}{3^5} - \dfrac{6^5}{3^5} - (-2^2)^3$

β) $B = \dfrac{(-6)^4}{81} - \dfrac{(2^3)^3}{(-4)^3} + \dfrac{10^4}{5^4}$

γ) $\Gamma = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^3 - 3[(-2)^7 + (-10)^2 - (-3)^3]^{2012} : (-2)^3$

δ) $\Delta = (-2)^3\left[-\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^3 + \left(-\dfrac{3}{2}\right)^5 : \left(-\dfrac{3}{2}\right)^3\right]$

5 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο



Βασική θεωρία - Τι πρέπει να γνωρίζω

Πώς υπολογίζουμε μια δύναμη, στην οποία ο εκθέτης είναι αρνητικός;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να υπολογίσουμε μια δύναμη με αρνητικό εκθέτη, στηριζόμαστε στην παρακάτω ισότητα:

$$a^{-\nu} = \frac{1}{a^{\nu}}$$

Σύμφωνα λοιπόν με αυτή την ισότητα, μπορούμε να διατυπώσουμε τον εξής κανόνα:

Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός, με εκθέτη αρνητικό είναι ίση με ένα κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη.

Για παράδειγμα είναι:

- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ και $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$, $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$
- $(-1)^{-10} = \frac{1}{(-1)^{10}} = \frac{1}{1} = 1$, $(-1)^{-7} = \frac{1}{(-1)^7} = \frac{1}{(-1)} = -1$

Κάθε φορά λοιπόν που θέλουμε να υπολογίσουμε δύναμη με αρνητικό εκθέτη, εργαζόμαστε όπως παραπάνω.

Για τον υπολογισμό δύναμης με βάση κλάσμα και εκθέτη αρνητικό αριθμό, χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$$

Για παράδειγμα είναι:

- $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{2}\right)^{2} = +\frac{25}{4}$, διότι $5^2 = 25$ και $2^2 = 4$.
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{3} = -\frac{27}{8}$, διότι $3^3 = 27$ και $2^3 = 8$.

Θ 2 **Να γραφούν οι ιδιότητες των δυνάμεων με βάση ρητό αριθμό και εκθέτη ακέραιο.**

Απαντηση

Οι ιδιότητες των δυνάμεων με βάση ρητό αριθμό και εκθέτη ακέραιο, συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$	$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$	$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$
$(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$	$\alpha^{0} = 1,\ \alpha \neq 0$
$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$	

Για παράδειγμα είναι:

- $2^4 \cdot 2^{-3} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$, $\quad 3^{-10} : 3^{-12} = 3^{-10-(-12)} = 3^{-10+12} = 3^2 = 9$
- $(2^{-3})^{-4} : (2^{-2})^{-7} = 2^{12} : 2^{14} = 2^{12-14} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
- $3^{-5} \cdot 3^{-4} \cdot 3^{7} = 3^{-5-4+7} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Λυμένες ασκήσεις

5.1 **Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:**

α) $\mathbf{A = (-4)^2 \cdot 2^{-3} + (-9)^2(-3)^{-3}}$

β) $\mathbf{B = (-2)^4(-3)^2(-6)^{-2} + (-5)^2(-2)^5(-10)^{-2}}$

Λυση

α) Επειδή $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$, είναι:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad \text{και} \quad (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$$

Επομένως παίρνουμε:

$$A = (-4)^2 \cdot 2^{-3} + (-9)^2(-3)^{-3} = 16 \cdot \frac{1}{8} + 81\left(-\frac{1}{27}\right) = \frac{16}{8} - \frac{81}{27} = 2 - 3 = -1$$

β) Ας υπολογίσουμε πρώτα μία μία τις δυνάμεις:

- $(-2)^4 = +16, \quad (-3)^2 = +9, \quad (-6)^{-2} = \frac{1}{(-6)^2} = +\frac{1}{36}$
- $(-5)^2 = +25, \quad (-2)^5 = -32, \quad (-10)^{-2} = \frac{1}{(-10)^2} = \frac{1}{100}$

Επομένως παίρνουμε:

$$B = (-2)^4(-3)^2(-6)^{-2} + (-5)^2(-2)^5(-10)^{-2} = 16 \cdot 9 \cdot \frac{1}{36} + 25(-32) \cdot \frac{1}{100} =$$

$$= \frac{16 \cdot \overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{36}}} - \frac{\overset{1}{\cancel{25}} \cdot 32}{\underset{4}{\cancel{100}}} = \frac{16}{4} - \frac{32}{4} = 4 - 8 = -4$$

5.2 Να γραφούν ως δύναμη με ακέραιο εκθέτη οι αριθμοί:

α) 0,0001 **β) 0,000049**

Λυση

Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις στη θεωρία είναι:

α) $0{,}0001 = 10^{-4}$

β) $0{,}000049 = 49 \cdot 10^{-6} = 7^2(10^{-3})^2 = (7 \cdot 10^{-3})^2 = \left(\frac{7}{1000}\right)^2$

Στο ερώτημα αυτό χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha\beta)^{\nu}$.

Σχόλιο

Στο ερώτημα (α) μπορούμε επίσης να γράψουμε:

$$0{,}0001 = \frac{1}{10.000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

5.3 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $A = 10^{-2} \cdot \frac{10^{-7}(-10)^4}{10^{-6}} + 10^{-11}\frac{(-10)^8 \cdot 10^{-3}}{-10^{-7}}$

β) $B = \frac{(-10)^{-3} \cdot 10^8}{10^{-4}(-10)^9} + \frac{10^{-6}(-10)^{10}}{10^{-3}(-10)^7}$

Λυση

α) Παρατηρούμε ότι όλες οι δυνάμεις έχουν βάση το 10. Είναι λοιπόν:

$$\mathrm{A} = 10^{-2}\frac{10^{-7}(-10)^4}{10^{-6}} + 10^{-11}\frac{(-10)^8 \cdot 10^{-3}}{-10^{-7}} =$$

$$= 10^{-2}\frac{10^{-7}\cdot 10^4}{10^{-6}} - 10^{-11}\frac{10^8 \cdot 10^{-3}}{10^{-7}} \qquad (1)$$

Η συνέχεια μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους, ανάλογα με ποιες ιδιότητες των δυνάμεων θα προτιμήσουμε.

Ένας απλός τρόπος είναι να μετακινήσουμε τους παρονομαστές 10^{-6} και 10^{-7} στον αριθμητή του κάθε κλάσματος, αλλάζοντας όμως συγχρόνως το πρόσημο των εκθετών. Παίρνουμε λοιπόν:

$$\mathrm{A} = 10^{-2}\cdot 10^{-7}\cdot 10^{4}\cdot 10^{+6} - 10^{-11}\cdot 10^{8}\cdot 10^{-3}\cdot 10^{7} =$$

$$= 10^{-2-7+4+6} - 10^{-11+8-3+7} =$$

$$= 10^1 - 10^1 = 10 - 10 = 0$$

Άλλος τρόπος

Από τη θέση (1) μπορούμε να συνεχίσουμε και ως εξής:

$$\mathrm{A} = 10^{-2}\frac{10^{-7}\cdot 10^4}{10^{-6}} - 10^{-11}\frac{10^8\cdot 10^{-3}}{10^{-7}} = 10^{-2}\frac{10^{-7+4}}{10^{-6}} - 10^{-11}\frac{10^{8-3}}{10^{-7}} =$$

$$= 10^{-2}\frac{10^{-3}}{10^{-6}} - 10^{-11}\frac{10^5}{10^{-7}} = 10^{-2}\cdot 10^{-3-(-6)} - 10^{-11}\cdot 10^{5-(-7)} =$$

$$= 10^{-2}\cdot 10^{-3+6} - 10^{-11}\cdot 10^{5+7} = 10^{-2}\cdot 10^{3} - 10^{-11}\cdot 10^{12} =$$

$$= 10^{-2+3} - 10^{-11+12} = 10^1 - 10^1 = 0$$

β) Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των δυνάμεων βρίσκουμε:

$$\mathrm{B} = \frac{(-10)^{-3}\cdot 10^8}{10^{-4}(-10)^9} + \frac{10^{-6}(-10)^{10}}{10^{-3}(-10)^7} = \frac{-10^{-3}\cdot 10^8}{10^{-4}(-10^9)} + \frac{10^{-6}\cdot 10^{10}}{10^{-3}(-10^7)} =$$

$$= +\frac{10^{-3+8}}{10^{-4+9}} - \frac{10^{-6+10}}{10^{-3+7}} = \frac{10^5}{10^5} - \frac{10^4}{10^4} = 1 - 1 = 0$$

Τονίζουμε ότι για παράδειγμα $(-10)^{-3} = -10^{-3}$, διότι η βάση -10 είναι αρνητικός και επειδή ο εκθέτης -3 είναι περιττός, η δύναμη είναι αρνητικός αριθμός, δηλαδή:

$$(-10)^{-3} = -10^{-3}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι δεν υπολογίσαμε τη δύναμη $10^{-3} = \frac{1}{1000}$, διότι αυτό δεν αποτελεί την καλύτερη επιλογή στην άσκησή μας.

Ας σημειώσουμε επίσης ότι απλή λύση προκύπτει αν ανεβάσουμε στον αριθμητή όλες τις δυνάμεις, μιας και στους αριθμητές έχουμε γινόμενα:

$$\begin{aligned}B &= (-10)^{-3}\cdot 10^{8}\cdot 10^{+4}(-10)^{-9} + 10^{-6}(-10)^{10}\cdot 10^{+3}(-10)^{-7} =\\ &= (-10^{-3})\cdot 10^{8}\cdot 10^{4}(-10^{-9}) + 10^{-6}\cdot 10^{10}\cdot 10^{3}(-10^{-7}) =\\ &= +10^{-3+8+4-9} - 10^{-6+10+3-7} =\\ &= 10^{0} - 10^{0} = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

5.4 **Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:**

α) $A = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\left(-\frac{3}{2}\right)^{4}\left(-\frac{9}{4}\right)^{-4}(-2^{-1})^{-2}$

β) $B = \dfrac{(-2^{-3})^{-4} : (-2)^{10} + [(-3)^{-5}]^{-4} : [(-3)^{-3}]^{-6}}{[(-1)^{-12}]^{-5} + (3^{-1})^{-1}(-2^{-1})^{-2}}$

Λύση

Οι ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν και για αρνητικούς εκθέτες. Για τον λόγο αυτό, ορισμένες φορές είναι προτιμότερο να εφαρμόσουμε τις ιδιότητες, παρά να υπολογίσουμε τις δυνάμεις, έστω και αν έχουν αρνητικό εκθέτη.

α) Παρατηρούμε ότι:

- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5}$, $\left(-\frac{3}{2}\right)^{4} = +\left(\frac{3}{2}\right)^{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4}$
- $\left(-\frac{9}{4}\right)^{-4} = \left(+\frac{9}{4}\right)^{-4} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-8}$
- $(-2^{-1})^{-2} = +2^{(-1)(-2)} = 2^{2} = 4$

Επομένως είναι:

$$A = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\left(-\frac{3}{2}\right)^{4}\left(-\frac{9}{4}\right)^{-4}\cdot 4 = \left(\frac{3}{2}\right)^{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{-8}\cdot 4 = \left(\frac{3}{2}\right)^{5+4-8}\cdot 4 = \frac{3}{2}\cdot 4 = 6$$

β) Παρατηρούμε ότι:

$$(-2^{-3})^{-4} = (+2^{-3})^{-4} = 2^{(-3)(-4)} = 2^{12}$$

Θα μπορούσαμε ωστόσο να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα και ως εξής, με βάση την ιδιότητα $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$ και $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$:

$$(-2^{-3})^{-4} = \left(-\frac{1}{2^{3}}\right)^{-4} = \left(-\frac{2^{3}}{1}\right)^{4} = (-2^{3})^{4} = +2^{3\cdot 4} = 2^{12}$$

Είναι φανερό ότι είναι προτιμότερος ο πρώτος τρόπος.

- $[(-3)^{-5}]^{-4} = (-3)^{(-5)(-4)} = (-3)^{20} = 3^{20}$
- $[(-3)^{-3}]^{-6} = (-3)^{(-3)(-6)} = (-3)^{18} = 3^{18}$
- $[(-1)^{-12}]^{-5} = (-1)^{+60} = +1$
- $(3^{-1})^{-1} = 3^{(-1)(-1)} = 3$, $(-2^{-1})^{-2} = +2^{(-1)(-2)} = 2^{2} = 4$

Είναι επομένως:

$$\mathrm{B} = \frac{2^{12} : 2^{10} + 3^{20} : 3^{18}}{1 + 3 \cdot 4} = \frac{2^{12-10} + 3^{20-18}}{1 + 12} = \frac{2^2 + 3^2}{13} = \frac{4 + 9}{13} = \frac{13}{13} = 1$$

5.5 **Να συγκριθούν οι αριθμοί:**

α) 5^{22} **και** 3^{33} **β)** 2^{99} **και** 3^{66}

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι τόσο οι βάσεις των δύο δυνάμεων όσο και οι εκθέτες είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\alpha^{\mu\nu} = (\alpha^{\mu})^{\nu}$, θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τις δύο δυνάμεις με τέτοιο τρόπο, ώστε να έχουν τον ίδιο εκθέτη. Έχουμε όμως:

- $5^{22} = 5^{2 \cdot 11} = (5^2)^{11} = 25^{11}$
- $3^{33} = 3^{3 \cdot 11} = (3^3)^{11} = 27^{11}$

Επειδή λοιπόν $25 < 27$, θα είναι $25^{11} < 27^{11}$, δηλαδή τελικά είναι $5^{22} < 3^{33}$.

β) Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τις δυνάμεις με άλλη μορφή, ώστε να έχουν τον ίδιο εκθέτη. Είναι:

- $2^{99} = 2^{3 \cdot 33} = (2^3)^{33} = 8^{33}$
- $3^{66} = 3^{2 \cdot 33} = (3^2)^{33} = 9^{33}$

Επειδή $8 < 9$, θα είναι $8^{33} < 9^{33}$, δηλαδή $2^{99} < 3^{66}$.

Ασκήσεις για εξάσκηση

Υπολογισμός δύναμης με αρνητικό εκθέτη

5.6 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) 2^2 **β)** 2^{-2} **γ)** 3^3 **δ)** 3^{-3}

ε) $(-2)^4$ **στ)** $(-2)^{-4}$ **ζ)** $(-3)^3$ **η)** $(-3)^{-3}$

θ) -2^4 **ι)** $-(-2)^3$ **κ)** -2^{-3} **λ)** $-(-2)^{-3}$

5.7 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) $(-1)^6$ **β)** $(-1)^9$ **γ)** $-(-1)^8$ **δ)** $-(-1)^{11}$

ε) 1^{-5} **στ)** $(-1)^{-4}$ **ζ)** $(-1)^{-7}$ **η)** $-(-1)^{-10}$

θ) 1^{0} **ι)** $(-1)^{0}$ **κ)** $-(-1)^{0}$ **λ)** $-(-1^{11})$

5.8 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **β)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$ **γ)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ **δ)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$

ε) $-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}$ **στ)** $-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-3}$ **ζ)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ **η)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$

θ) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ **ι)** $\left(\frac{4}{9}\right)^{0}$ **κ)** $\left(-\frac{7}{6}\right)^{0}$ **λ)** $-\left(-\frac{7}{9}\right)^{0}$

5.9 Να υπολογίσετε τις επόμενες δυνάμεις:

α) $(-2)^{3}$ **β)** $-(-2)^{3}$ **γ)** $(-2)^{-2}$ **δ)** $(-2)^{-3}$

ε) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$ **στ)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **ζ)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ **η)** $-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$

θ) 5^{0} **ι)** $(-5)^{0}$ **κ)** $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}$ **λ)** $-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

5.10 Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω αριθμών:

α) $\left(-\frac{4}{9}\right)^{5}$ **β)** $\left(-\frac{4}{9}\right)^{-7}$ **γ)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{4}$ **δ)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-8}$

ε) $-\left(-\frac{5}{8}\right)^{7}$ **στ)** $-\left(-\frac{5}{9}\right)^{-9}$ **ζ)** $-\left(-\frac{4}{7}\right)^{10}$ **η)** $-\left(-\frac{6}{7}\right)^{-16}$

θ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{0}$ **ι)** $-\left(-\frac{4}{3}\right)^{0}$ **κ)** $-\left(-\frac{1}{10}\right)^{10}$ **λ)** $-\left(-\frac{1}{10}\right)^{-10}$

5.11 Να συγκρίνετε τα παρακάτω ζεύγη αριθμών:

α) $2^{3},\ 2^{-3}$ **β)** $(-2)^{3},\ (-2)^{-3}$ **γ)** $-2^{3},\ (-2)^{3}$

δ) $-2^{-3},\ (-2)^{-3}$ **ε)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{2},\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{2}$ **στ)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2},\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

ζ) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3},\ \left(-\frac{1}{3}\right)^{3}$ **η)** $-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2},\ -\left(-\frac{1}{4}\right)^{2}$ **θ)** $(-15)^{0},\ 15^{0}$

5.12 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = 2^{3} + (-4)^{2} - (-3)^{2} - (-10)^{1}$

β) $B = (-2)^{2} + (-3)^{3} + (-1)^{2} - (-1)^{3}$

γ) $\Gamma = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2} - \left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$

δ) $\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + (5^{2})^{0}$

Δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο - Ιδιότητες

5.13 Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $3^4 \cdot 3^{-2}$ **β)** $4^7 \cdot 4^{-8}$ **γ)** $5^4 \cdot 5^{-7} \cdot 5^9$

δ) $8^{-2} \cdot 8^{-6} \cdot 8^{10}$ **ε)** $6^{-5} \cdot 6^{10} \cdot 6^{-9}$ **στ)** $7^{-10} \cdot 7^{11} \cdot 7^{-20} \cdot 7^4$

5.14 Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $7^6 : 7^4$ **β)** $4^{-10} : 4^{-12}$ **γ)** $6^5 : 6^{-3}$

δ) $5^9 : 5^{-3}$ **ε)** $8^{-7} : 8^7$ **στ)** $9^{-6} : 9^3$

ζ) $10^{-10} : 10^{-8}$ **η)** $10^{-11} : 10^{-15}$ **θ)** $\dfrac{3^{-5}}{3^{-9}}$

ι) $\dfrac{2^{-10}}{2^{-12}}$ **κ)** $\dfrac{11^{-7}}{11^{-3}}$ **λ)** $\dfrac{13^{11}}{13^{14}}$

5.15 Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παραστάσεις:

α) $3^{-5} \cdot 2^{-5}$ **β)** $(-6)^{-9}(-5)^{-9}$ **γ)** $(-0{,}2)^{-10}(-50)^{-10}$

δ) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-6} \cdot 4^{-6}$ **ε)** $\left(\dfrac{16}{5}\right)^{-7}\left(\dfrac{15}{8}\right)^{-7}$ **στ)** $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{-6}\left(\dfrac{100}{9}\right)^{-6}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-6}$

5.16 Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παραστάσεις:

α) $9^{-5} : 3^{-5}$ **β)** $8^{-4} : 4^{-4}$ **γ)** $4^{-7} : 2^{-7}$

δ) $6^{-8} : 3^{-8}$ **ε)** $\dfrac{25^{-9}}{5^{-9}}$ **στ)** $\dfrac{45^{-6}}{15^{-6}}$

ζ) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-7} : \left(\dfrac{9}{16}\right)^{-7}$ **η)** $\left(\dfrac{25}{4}\right)^{-10} : \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-10}$ **θ)** $\left(\dfrac{35}{3}\right)^{-11} : \left(\dfrac{7}{6}\right)^{-11}$

5.17 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $24^7 : (-12)^7$ **β)** $(-46)^8 : (-23)^8$ **γ)** $88^4 : (-22)^4$

δ) $45^4 : (-15)^4$ **ε)** $(-17)^{-4} : (-34)^{-4}$ **στ)** $(-6)^{-2} : (-24)^{-2}$

5.18 Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παραστάσεις:

α) $(2^3)^4$ **β)** $(-2^4)^3$ **γ)** $(-3^3)^6$ **δ)** $(2^{-2})^3$

ε) $(3^{-4})^4$ **στ)** $(-3^{-5})^5$ **ζ)** $\left[(-4)^5\right]^{-2}$ **η)** $\left[(-3)^{-5}\right]^{-2}$

5.19 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις σύμφωνα με το παράδειγμα:

$$(2^{-3})^{-2} = 2^{(-3)(-2)} = 2^6 = 64$$

α) $(2^{-2})^{-2}$ **β)** $(2^{-2})^3$ **γ)** $(-3^2)^{-1}$ **δ)** $(-3^{-2})^{-2}$

5.20 Να γράψετε με τη μορφή μίας δύναμης τις παραστάσεις:

α) $A = (-3)^4 \cdot 3^5 \cdot 3^{-4}$ **β)** $B = (-3)^9(-3)^5(-3)^{-7}$

γ) $\Gamma = (-2)^7(-2^5)(-2)^{-4}$ **δ)** $\Delta = (-2^{-5})(-2)^{-7}(-2)^{-6}$

ε) $E = \dfrac{2^5}{(2^3)^4}$ **στ)** $Z = \dfrac{(3^8)^2}{(3^4)^{-2}}$

ζ) $H = \dfrac{(4^{-4})^2}{(4^5)^{-3}}$ **η)** $\Theta = \dfrac{-(7^{-2})^{10}}{(-7^3)^9}$

5.21 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = \left(\frac{1}{3}\right)^{-5}\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}\left(\frac{1}{3}\right)^{9}$ **β)** $B = \left(-\frac{5}{4}\right)^{10}\left(\frac{5}{4}\right)^{-5}\left(\frac{5}{4}\right)^{-3}$

γ) $\Gamma = \left(\frac{3}{4}\right)^{-7}\left(\frac{4}{3}\right)^{6}\left(-\frac{4}{3}\right)^{-12}$ **δ)** $\Delta = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-6}\left(\frac{3}{2}\right)^{-7}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$

5.22 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{4^3(4^{-5})^{-2}}{4^2 \cdot 4^{11}}$ **β)** $B = \dfrac{(-2)^5(-2)^6}{(-2)^4 \cdot 2^{-3} \cdot 2^3}$

γ) $\Gamma = \dfrac{(5^{-3})^{-4} \cdot 5^{-11}}{5^5(5^{-2})^{-4} \cdot 5^{-12}}$ **δ)** $\Delta = \dfrac{(3^6)^2(3^2)^6 \cdot 3^{-20}}{(-3)^2(-3)^3(-3)^{-6}}$

ε) $E = \dfrac{4^{-3}}{12^{-3}} + \dfrac{5^{-2}}{25^{-2}}$ **στ)** $Z = \dfrac{6^{-2}}{36^{-2}} + \dfrac{15^{-5}}{30^{-5}}$

Υπολογισμός παραστάσεων

5.23 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = 0,004(-10)^3 + \dfrac{24}{0,6} : 10 + [5 + (-1)^7] \cdot 2^{-1}$

β) $B = \left\{\left(-\frac{2}{5}\right)^7 : \left[\left(-\frac{2}{5}\right)^3\left(-\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]\right\} : \left[\left(\frac{3}{5} - 1\right)^3(1 - 2^{-1})\right]$

5.24 Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = A = (-\,2^{3^0}) : (-\,2)^{-1} + (-\,3^{2012^0}) : (-\,3)^{-1}$

β) $B = B = \dfrac{(-\,2^0)^{-2013} - (-\,3)^{2014^0} : (-\,3)}{(-\,5^0)^{-100} + (-\,7)^{200^0} : (-\,7)}$

5.25 Να υπολογίσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A = A = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + 4^{-1} - \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

β) $B = B = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2^2}\right)^{-1} - \frac{1}{5^{-1}}$

γ) $\Gamma = \Gamma = \frac{2}{24}\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} + \frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} - \frac{1}{4^2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}$

δ) $\Delta = \left[\dfrac{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{2\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + 2^{-1}} \right]^2 + \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2}$

ε) $E = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} - 3 : (-2)^{-3} + \dfrac{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{-1}} \cdot 2^6 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}$

στ) $Z = 2^{-3} - [(-7+2)(-4) - 5^2] - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\dfrac{9}{25}\right)^8 : \left(\dfrac{3}{5}\right)^{15} - \dfrac{(3 \cdot 2^{-1})^2}{10}$

5.26 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = 2^3 + 3(-1)^{2010} + \left[(-2)^2 : 2^{-1}\right] \cdot 2^3$

β) $B = (-4)^2 : (-2)^3 - 5^2 + \left[(-2)^6 : 8 - 4\right] : (-2)^2$

γ) $\Gamma = \left[2^3 \cdot 2^4 (-2)^{-1}\right] : \left[2^2 \cdot 8(-2)^2 \cdot 2010^0\right]$

δ) $\Delta = \left(-\dfrac{3}{4}\right)^6 : \left(-\dfrac{3}{4}\right)^4 - \left(-2 + \dfrac{1}{2}\right)^5 : \left(2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{4}\right)^2$

ε) $E = \left\{\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{10} : \left(-\dfrac{1}{3}\right)^8 \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}\right]^{-2} : \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}\right\} : \left(-\dfrac{1}{3}\right)^5$

στ) $Z = 3^{-1} : \left[2^{-1} : \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2\right] + (-0,1)^3 (0,1)^{-1} + 10^{-2}$

5.27 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + (-2)^{-4}$

β) $B = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-4} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2} + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$

γ) $\Gamma = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2 \cdot 2^{-4}$

δ) $\Delta = \dfrac{1}{2} - 2^{-2} + \dfrac{1}{2^3} - 2^{-4} + \dfrac{3}{2^4}$

ε) $E = (-2)^3 \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\right) + 2^{-2}$

στ) $Z = -2^3 \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 \cdot \dfrac{1}{2^{-3}} + (-9)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3 (-3)$

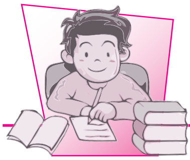
5.28 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = 2^{x-4} - 6 \cdot 4^{x-3} + 1^{x-3} - 7^{x-1}$, όταν $x = 1$

β) $B = 2x^{-2} - 2^{-x} + x^x - 3(-1)^{-2009}$, όταν $x = -2$

γ) $\Gamma = (x+2)^{x-2} - 3 \cdot 3^{x+2} + 6 \cdot 3^{x-2} - (-3)^{x+3}$, όταν $x = 0$

δ) $\Delta = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{x-3} + \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{x-2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} + (-x)^{-x}$, όταν $x = 1$



1η Επανάληψη

Ρητοί αριθμοί

Α. Πράξεις με ρητούς αριθμούς

Ε1.1 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = (-5 + 2) + (7 - 10) - (8 - 6) + (-7 - 2) - (-3 + 4)$

β) $B = -[(-3 + 8 - 4) - (-2 + 1)] - [-(-3 + 7 - 5) - (-2)]$

γ) $\Gamma = (-3)(+5) + (-4)(-6) - (-2)(-5)$

δ) $\Delta = (-1)(+2)(-3) - (-2)(+3)(-4) + (-3)(-8)$

ε) $E = -3 + (-7 + 5)(-2) + 4(-2)$

στ) $Z = -4(-2 + 5)(-7 + 4) - (-3)(-2)$

Ε1.2 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \left(-\frac{9}{2}\right) + \left(-\frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{11}{8}\right) - \left(-\frac{3}{8}\right)$

β) $B = \frac{5}{6} + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}$

γ) $\Gamma = -\left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right) + \left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{5}{9}\right)$

δ) $\Delta = \left(-1-\frac{1}{2}\right)\left(-1-\frac{1}{3}\right)\left(-1-\frac{1}{4}\right)\left(-1-\frac{1}{5}\right)\left(-1-\frac{1}{6}\right)(-2)$

ε) $E = -5\left(-\frac{1}{6}\right)\left(+\frac{1}{4}\right) - \left(+\frac{5}{9}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{24}\right)$

στ) $Z = (-2)\left[-\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{6}{5}\right)\right] - (-2)\frac{1}{5}$

Ε1.3 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = (-8) : (-2) - (-16) : (+8) - (+3) : (-1)$

β) $B = (-14) : (+7) - (-2) - [(-16) : (-4)](+3)$

γ) $\Gamma = (-8) : (-4) - [-5 : (-4 - 1) - (-5) : 5] : (-1)$

δ) $\Delta = [(-3)(+2)] : (-1) + [(+12) : (-1)] : (+6) - (-25) : (-5)$

Ε1.4 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{(-4)(-2) - (-8) : (+4)}{(-3) : (-1) - (-10) : (-2)}$

β) $B = \dfrac{(-2)(+3) + (-15) : (-3) + (-3)(-5 - 2)}{(+20) : (-4) - (-5)(-2) - 5(-3 + 4)}$

γ) $\Gamma = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2} - 1\right) - \left(-\frac{7}{3}\right) : \frac{1}{3} - \frac{1}{2} : (+3)$

δ) $\Delta = \frac{5}{6} : \left(\frac{7}{2} - 2\right) - \frac{1}{2}\left(-3 + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{7}{6}\right) : 6$

ε) $E = -\frac{5}{6} : \left(-3 + \frac{7}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[-3\left(\frac{1}{2} - 1\right) + 1\right] - (-1) : (-12)$

στ) $Z = (-2)\left[-\left(-\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right) : \left(+\frac{2}{5}\right)\right] - \left[-\frac{2}{5} + \left(-\frac{8}{5}\right) : \left(-\frac{4}{5}\right)\right]$

Ε1.5 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{(-14 + 17) : (-3) + \left(\frac{9}{2} - 3\right) : \left(-\frac{3}{2}\right) + (-2)}{\left[\left(-2 + \frac{3}{4}\right) : \frac{5}{2}\right](-2) - (-5 + 2) : (+3)}$

β) $B = \left(1 - \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \dfrac{\frac{3}{4} : \left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right)} - \left(-\frac{1}{10}\right)$

γ) $\Gamma = \dfrac{\dfrac{1}{7} + \dfrac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}{1-\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}}$

δ) $\Delta = \left[\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}\right):\left(1-\dfrac{1}{10}\right)+\dfrac{1}{8}\right]:\left(1-\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{10}}\cdot\dfrac{1}{8}\right)$

E1.6 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):(-2)-\left(3+\frac{3}{4}\right):\left(-3+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\frac{5}{2}}{6}\right)$$

$$B = \frac{\frac{3}{2}-1}{1+\frac{3}{2}}-\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right):(-3)}{\left(\frac{1}{3}+1\right):(-4)}+\left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$\Gamma = \left(1-\frac{1}{4}\right):\left(\frac{1}{2}-1\right)-\frac{\frac{3}{4}:\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)}-\left(-\frac{1}{10}\right)$$

Να υπολογίσετε:

α) τις παραστάσεις Α, Β, Γ,

β) $AB + \Gamma^A$,

γ) $(AB\Gamma)^{10}$.

E1.7 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2-\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, \quad B = 2+\frac{1}{2-\frac{1}{2}}$$

α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις Α, Β.

β) Έστω $A = \dfrac{8}{5}$ και $B = \dfrac{8}{3}$. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $\Gamma = (A:B)\cdot\dfrac{5^2}{3^3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

ii) $\Delta = \left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)^5(-2)^7(-1)^{2021}$

E1.8 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \left(2+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{7}{3+\frac{4}{5}}-\dfrac{1+\frac{2}{3}}{2+\frac{1}{2}}\right):\left(1+\dfrac{77}{228}\right)$

β) $B = 3+5+7+9+\ldots+2003-$
$-2-4-6-8-\ldots-2002$

γ) $\Gamma = (200+196+192+\ldots+8+4)-$
$-(198+194+\ldots+6+2)$

δ) $\Delta = \left(1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{4}+\ldots+\dfrac{21}{20}\right)-$
$-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{20}\right)$

E1.9 **α)** Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2}{3}$, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{3\alpha+8\beta}{9\alpha+4\beta}$$

β) Αν οι αριθμοί αβ και γδ είναι αντίστροφοι, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \frac{\alpha\beta+\frac{1}{\gamma\delta}}{\alpha+\frac{1}{\beta\gamma\delta}}$$

Β. Δυνάμεις ρητών αριθμών

Β1. Η έννοια της δύναμης

E1.10 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = (-3)^2+(-4)^2-(-3)^3+(-1)^{2021}+(-2)^5$

β) $B = (-2)^4\cdot 3-(-2)^4+(-5)^2+[4-(-1)]^2-(-3)^4$

γ) $\Gamma = [(-3)^4+(-4)^3]:(-1)^8-(-6)^2:[2(-3)^2]-$
$-(-2^3+5)^3(-2^2+3)^7$

δ) $\Delta = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2^2}\right)-(-3)^2+(-1)^{2022}-(-1)^{2021}$

ε) $E = (15-3^2)^2-3\cdot 2^3-(-2)^5:2^2+$
$+(-2^2)^2:(-2)+(-5)^0$

στ) $Z = (3^3\cdot 2-2^4\cdot 3):(-2)+$
$+[(2\cdot 5^2-6\cdot 2^3)^3\cdot(2^3-3^2)]:(-1)^5$

E1.11 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) 2^3 β) 2^5 γ) 3^2 δ) 3^4
ε) $(-4)^2$ στ) $(-3)^3$ ζ) $(-2)^5$ η) 3^0
θ) 3^{-3} ι) 2^{-4}

Ε1.12 Να υπολογίσετε τις παρακάτω δυνάμεις:

α) -3^2 **β)** $(-3)^2$ **γ)** -2^3

δ) $(-2)^3$ **ε)** $-(-2)^4$ **στ)** $-(-2)^5$

ζ) $-(-3)^0$ **η)** $(-2)^{-2}$ **θ)** $-(-3)^{-2}$

ι) $-(-2)^{-5}$

Ε1.13 Να συγκρίνετε τα παρακάτω ζεύγη αριθμών:

α) $(-3)^4,\ -3^4$ **β)** $(-3)^3,\ -3^3$

γ) $(-3)^{11},\ 0$ **δ)** $(-3)^{12},\ 0$

ε) $-(-2)^4,\ 2^4$ **στ)** $-(-2)^5,\ 2^5$

ζ) $-(-2)^6,\ 0$ **η)** $-(-2)^3,\ 0$

Ε1.14 Να γράψετε ως μία δύναμη με βάση ρητό καθέναν από τους παρακάτω αριθμούς:

α) 16 **β)** 27 **γ)** $\frac{1}{8}$ **δ)** $\frac{1}{9}$

ε) $\frac{1}{32}$ **στ)** $\frac{1}{27}$ **ζ)** $\frac{1}{64}$ **η)** $\frac{1}{81}$

θ) $\frac{4}{9}$ **ι)** $\frac{8}{27}$ **ια)** $\frac{25}{16}$ **ιβ)** $\frac{125}{64}$

Ε1.15 Να γράψετε με τη μορφή δύναμης τους παρακάτω αριθμούς:

α) 4, 9, 16, 27, 64, 128, 81, 125, 512

β) 25, 32, 49, 100, 243, 1000, 1024

γ) 400, 289, 225, 169, 196, 256, 144, 361, 441, 625, 576

Β2. Ιδιότητες των δυνάμεων

Ε1.16 Να γράψετε με μορφή δύναμης:

α) $3^5\cdot 3^3$ **β)** $2^4 2^{-5}$ **γ)** $3^4\cdot 3\cdot 3^5$

δ) $3^{-5}3^{-6}\cdot 3^{20}$ **ε)** $4^{-2}\cdot 4^3\cdot 4^{-12}$ **στ)** $5^3 5^{-5} 5^0$

Ε1.17 Να γράψετε ως μία δύναμη:

α) $5^6 : 5^3$ **β)** $6^7 : 6^4$ **γ)** $6^3 : 6^{-2}$

δ) $5^7 : 5^{-1}$ **ε)** $5^{-3} : 5^{-10}$ **στ)** $5^{-7} : 5^{-2}$

Ε1.18 Να κάνετε τις επόμενες πράξεις:

α) $2^5\cdot 2^3$ **β)** $2^7\cdot 2^{-3}$ **γ)** $2^5\cdot 2^3\cdot 2^{-7}$

δ) $5^2\cdot 5^6 5^{-8}$ **ε)** $2^7 : 2^3$ **στ)** $\frac{2^2}{2^{-3}}$

ζ) $3^5 : 3^6$ **η)** $\frac{3^7\cdot 3^4}{3^8}$

Ε1.19 Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως δύναμη με βάση έναν ακέραιο αριθμό.

α) $5^3\cdot 5^4$ **β)** $5^4 : 5^2$ **γ)** $\frac{5^{10}}{5^4}$

δ) $3^5\cdot 3^{-7}$ **ε)** $3^5 : 3^8$ **στ)** $\frac{3^{10}}{3^{15}}$

ζ) $7^5\cdot 7^6 7^{-15}$ **η)** $\frac{7^3\cdot 7^7}{7^5}$ **θ)** $\frac{4^{-5}\cdot 4^{10}}{4^3}$

Ε1.20 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $2^4\cdot 5^4$ **β)** $2^3(-5)^3$

γ) $(-4)^5(0{,}25)^5$ **δ)** $4^3\cdot(-0{,}75)^3$

ε) $(-8)^{10}(-1{,}25)^{10}$ **στ)** $(-5)^5(-2)^5$

Ε1.21 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $10^5 : 5^5$ **β)** $15^4 : 5^4$

γ) $20^{-3} : 10^{-3}$ **δ)** $125^3 : (-25)^3$

ε) $(-18)^5 : (-9)^5$ **στ)** $(-25)^4 : 5^4$

Ε1.22 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2^3\cdot 5^3$ **β)** $5^6\cdot(0{,}2)^6$ **γ)** $(-0{,}4)^5\cdot 5^5$

δ) $\frac{14^7}{7^7}$ **ε)** $\frac{32^4}{16^4}$ **στ)** $\frac{(-25)^3}{(-5)^3}$

ζ) $\frac{(-22)^8}{11^8}$

Ε1.23 Να γράψετε, ως μία δύναμη, με βάση το 2 καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $2^4\cdot 8$ **β)** $2^3\cdot 32\cdot 64$ **γ)** $2^5\cdot\frac{1}{16}$

δ) $\frac{64\cdot 128}{2^4}$ **ε)** $2^{-5}\cdot 16\cdot\frac{1}{2^3}$ **στ)** $\frac{1}{2^{-5}}\cdot 64\cdot\frac{1}{2^7}$

Ε1.24 Να γράψετε, ως μία δύναμη, με βάση το 3 καθεμία από τις επόμενες παραστάσεις:

α) $3^5 \cdot 27$ **β)** $3^4 \cdot 27 \cdot 81$ **γ)** $\dfrac{81 \cdot 9}{3^{-1}}$

δ) $\dfrac{27 \cdot 9}{3^8}$ **ε)** $3^{-6} \cdot 81 \cdot \dfrac{1}{3^5}$ **στ)** $\dfrac{1}{3^{-5}} \cdot 243 \cdot \dfrac{1}{3^8}$

E1.25 Να γράψετε ως δυνάμεις με βάση το 3 τους παρακάτω αριθμούς:

α) 9 **β)** 81 **γ)** 1 **δ)** $\dfrac{1}{27}$

ε) $\dfrac{1}{81}$ **στ)** $(27)^3$ **ζ)** $(-81)^4$ **η)** $\left(\dfrac{1}{27}\right)^5$

E1.26 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(2^3)^2$ **β)** $[(-2)^2]^3$ **γ)** $[(-3)^2]^2$

δ) $[(-1)^4]^5$ **ε)** $[(-1)^3]^5$ **στ)** $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right]^{-2}$

ζ) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}\right]^2$ **η)** $\left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3\right]^{-2}$

E1.27 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(-2)^5 \cdot 5^5$ **β)** $(-0{,}4)^5 \cdot 5^5$

γ) $(2^3)^5 : 2^9$ **δ)** $\dfrac{(2^5)^5 : (2^7)^2}{(2^3)^2}$

ε) $\dfrac{3^{15} : (3^3)^2}{(3^3)^3}$ **στ)** $\dfrac{(5^2 \cdot 5^{-4})^4}{5^6 : 5^3} : 5^{-13}$

E1.28 Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως δυνάμεις με βάση το 10:

α) $10^3 \cdot 10^5$ **β)** $10^{-5} \cdot 10^6 \cdot 10^{-7}$

γ) $10^5 : 10^3$ **δ)** $10^6 : 10^7$

ε) $(10^{-2})^4 : (10^2)^{-5}$ **στ)** $(10^4)^{-2} : (10^{-1})^{-3}$

ζ) $10^3 \cdot 100.000$ **η)** $10^4 \cdot 0{,}00001$

θ) $10^3 : 100.000$ **ι)** $10^{-5} : 0{,}000001$

Γ. Υπολογισμός παραστάσεων

E1.29 Να υπολογίσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $A = 2^{-1} + 2^{-2}$ **β)** $B = 2^{-1} + 5 \cdot 2^{-2} + 10 \cdot 2^{-3}$

γ) $\Gamma = \dfrac{1}{2^{-1}} + \dfrac{1}{2^{-2}} + \dfrac{1}{2^{-3}}$ **δ)** $\Delta = \dfrac{1}{3^{-3}} - \dfrac{1}{3^{-2}} - \dfrac{6}{3^{-1}}$

E1.30 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = (-4)^2 2^{-3} + (-9)^2(-3)^{-3}$

β) $B = (-2)^4(-3)^2(-6)^{-2} + (-5)^2(-2)^5(-10)^{-2}$

γ) $\Gamma = [(4^2)^3 : 4]^3[(4^{-2})^{-6}(4^5)^{-3})]^4$

δ) $\Delta = \left[\left(\dfrac{1}{5^{-3}}\right)^{-4}(5^{-3} : 5^{-8})^2\right]^{-3} : (5^{-4})^{-2}$

ε) $E = \left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3} + 3 \cdot 2^{-3} + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\right] :$

$: \left[(-2)^2 + (-2)^3 - (-2)^4 + \dfrac{1}{3^{-1}}\right]$

στ) $Z = \left(\dfrac{3}{3 - 3^{-1}} - \dfrac{4 + 4^{-1}}{4}\right) : (2^{-1} - 4^{-1})^2$

E1.31 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = 3^4 + 3^5 \cdot 3^{-3} + 3^{-6} : 3^{-7} + 2017^0$

β) $B = 4^5(4^6 : 4^8) + \dfrac{1}{4^{-3}} - \dfrac{1}{2^{-7}}$

γ) $\Gamma = 2^4 + 4\left(\dfrac{1}{5}\right)^0 - 2^{-3} \cdot 8 + \left[(-2)^2 : \dfrac{1}{2}\right] : 8$

δ) $\Delta = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-1} - \left(\dfrac{4}{5^{-1}}\right)^0 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \cdot 2^3 + 2^{-1}$

ε) $E = [(-3)^2 : 3 - (-2)^4 : (-2)^3] : \dfrac{1}{(-2)^3} + \left(-\dfrac{1}{7}\right)^{-2}$

στ) $Z = (-2)^3 \cdot \dfrac{1}{3^{-1}} - (-2)^5 : 4 + (-2^2)^2 : \left(-\dfrac{1}{2^{-1}}\right) + \dfrac{1}{2^{-5}}$

E1.32 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \left(-\dfrac{3}{5}\right)^{-6}\left(-\dfrac{100}{9}\right)^{-6}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-6}$

β) $B = \dfrac{6^{-2}}{36^{-2}} - \dfrac{15^{-5}}{30^{-5}} - \dfrac{6^{-3}}{12^{-3}}$

γ) $\Gamma = \left(2^4 : \dfrac{1}{8^3}\right)16^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}$

δ) $\Delta = \dfrac{(-0,5)^{-20}}{(2^{16}\cdot 8^{-4})^{6}}$

ε) $E = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-5}\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{4}\left(-\dfrac{9}{4}\right)^{-4}(-2^{-1})^{-2}$

Ε1.33 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = (0,25)^{30}\cdot 8^{20}$

β) $B = 12^{2000}(1,5)^{1000}\cdot 6^{-3000}$

Ε1.34 Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη.

α) $A = (-0,25)^{15}[(-2)^{3}]^{13}$

β) $B = (-4)^{60}\cdot(-1,25)^{40}$

γ) $\Gamma = (9\cdot 15^{19})^{2} + (12\cdot 15^{19})^{2}$

Ε1.35 Να βρείτε σε πόσα μηδενικά τελειώνουν οι παρακάτω αριθμοί:

α) $7\cdot 10^{8}$ **β)** $2^{20}\cdot 3^{30}\cdot 10^{40}$

γ) $8^{4}\cdot 25^{8}$ **δ)** $50^{40}\cdot 40^{50}$

Ε1.36 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{55^{5}\cdot 33^{11}\cdot 15^{10}\cdot 4^{20}}{18^{10}\cdot 10^{15}\cdot 22^{16}}$

β) $B = \dfrac{527\cdot 10^{2} - 3,27\cdot 10^{14}}{5\cdot 10^{12} + 4,5\cdot 10^{13}}$

γ) $\Gamma = \dfrac{125^{20}\cdot 25^{15}\cdot 5^{10}}{(5^{3})^{32} + (5^{24})^{4} + 3(5^{16})^{6}}$

Ε1.37 Να γράψετε ως μια δύναμη τις παραστάσεις:

α) $A = 2^{10} + 2^{10} + 2^{10} + 2^{10}$

β) $B = 2^{15} - 2^{14} - 2^{13} - 2^{12}$

Ε1.38 Έστω ν φυσικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha = 3^{\nu} - 2^{2}\cdot 3^{\nu+1} + 3^{\nu+3}$ είναι πολλαπλάσιο του 16 και ο αριθμός $\beta = 5^{\nu+2} - 5^{\nu+1} - 5^{\nu}$ πολλαπλάσιο του 19.

Ε1.39 Δίνεται η παράσταση:

$$A = [(x^{2}y^{3})^{-2}(xy^{3})^{4}] : (x^{3} : y^{-1})^{-3}$$

Να υπολογίσετε την παράσταση αν:

$$x = 2021 \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{2021}$$

Δ. Θέματα για διαγωνισμούς

Τα θέματα που ακολουθούν απευθύνονται σε μαθητές που επιθυμούν να συμμετάσχουν σε μαθηματικούς διαγωνισμούς, όπως για παράδειγμα ο διαγωνισμός «Θαλής» της ΕΜΕ.

Ε1.40 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3\cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9}$$

Ε1.41 Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = \left\{111 - \left[264 - \left(15 + \frac{54}{6}\right)\cdot|-5|\right] : 12\right\} : 11 + 1$$

Ε1.42 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{2}{7} + 1 - \frac{1}{14}\right) : \frac{17}{2} - \frac{1}{7} + 5\frac{1}{6} - \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{3}\cdot 2 - 1\right)$$

Ε1.43 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(18 - \frac{2}{5}\right) : \frac{44}{5} - \frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3 + \frac{6}{11}}\right)$$

Ε1.44 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2415 - 4\cdot 10^{2} + 2003^{0} - 2\cdot 3^{2} + 2$$

(Θαλής)

Ε1.45 Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = [(-1)^{10} + (-1)^{11}]\cdot(2^{4} - 3^{2}) + 5^{12} : 5^{10} - 20$$

(Ευκλείδης)

Ε1.46 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4^{2}\cdot 25^{2} + 2008 : 4 + (3^{3} - 5^{2})\cdot 249 - 10^{4}$$

Ε1.47 Έστω:

$$x = 3^{2} - 4\cdot 2^{3} : 4 + 2^{5} \quad \text{και} \quad y = 4\cdot 5^{2} - 4^{3} + 7\cdot 3^{2}$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς x και y.

β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο Α, του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

Ε1.48 Να γράψετε την παράσταση:

$$A = 3\cdot 2^{18}\cdot[1-(-1)^3] - 2^6\cdot(3^2-1)(3^3-11)(3^4-17)$$

ως δύναμη με βάση το 2. *(Ευκλείδης)*

Ε1.49 Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$A = \frac{1}{8^2}\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right) \quad \text{και} \quad B = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}$$

Ε1.50 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 5^2 - 2^4 : 2^3 + 1 \quad \text{και} \quad B = (5^2-2^4):(2^3+1)$$

α) Να βρείτε τις παραστάσεις Α, Β.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\dfrac{A}{20B}$ και $\dfrac{23B}{A}$.

(Θαλής)

Ε1.51 Αν $\alpha = 4-2\frac{1}{5}$ και $\beta = 5+\dfrac{-3}{2}-\dfrac{-5}{-2}$, να αποδείξετε ότι $\alpha:\beta^{2009}-\beta-\dfrac{1}{5\alpha}<1$.

Ε1.52 Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11},$$

$$B = (2^5+112):3^2-1+\frac{5}{7}$$

και να τις συγκρίνετε.

Ε1.53 Δίνονται οι παραστάσεις:

- $A = 2+\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{4}+\ldots+\dfrac{2001}{2000}$
- $B = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2000}$

Να βρείτε τον αριθμό $A-B$.

Ε1.54 Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1998}+\frac{1}{1999}$$

$$\beta = 1+\frac{2}{4}+\frac{4}{6}+\frac{6}{8}+\ldots+\frac{3994}{3996}+\frac{3996}{3998}$$

Να υπολογίσετε τον αριθμό $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, δηλαδή τον μέσο όρο των αριθμών α και β.

Ε1.55 Αν $\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{4}{\beta}+\dfrac{\gamma}{6}=\dfrac{1}{6}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}$$

Ε1.56 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8$$

Ε1.57 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\alpha-1}{\alpha-3}\cdot\frac{1}{33}+\alpha^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}, \quad \text{αν} \quad \alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$$

Ε1.58 Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}$$

Ε1.59 Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-8)^3}{2^3}+\frac{(-12)^3}{(-3)^3}+10\right)\cdot\left(\frac{(-8)^2}{2^2}+\frac{(-12)^2}{(-3)^2}-22\right)$$

Ε1.60 Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^2 + \left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200$$

Ε1.61 Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5}+\frac{(-12)^5}{6^5}+1\right)\cdot\left(\frac{(-16)^3}{8^3}+\frac{(-12)^3}{(-6)^3}+2019\right)$$

Ε1.62 Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9}+\frac{(-16)^9}{(-2)^9}\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot \left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-10}+100\right)$$

E1.63 Αν είναι:

$$\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}, \quad \beta = 10^{-5} : 10^{-7} \quad \text{και}$$

$$\gamma = 10^{-1} \cdot 1000$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}\right)^{-2}$$

E1.64 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{x^2 \cdot y^4 \cdot z^6 \cdot 2^{182}}{3 \cdot (13 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 4^2 \cdot 9^3)^{-1}}$$

αν είναι $x = 2^{-10}$, $y = 4^{-8}$, $z = 8^{-6}$ και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

E1.65 Αν είναι:

$$x + y = 3 \cdot (-2)^2 \quad \text{και}$$

$$y - w = \left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6 \cdot \left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 7x + 10y - 3w - 87$$

E1.66 Αν είναι $\alpha = \dfrac{12^\nu}{3^\nu} : 2^{2\nu-1}$ και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^\nu$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(\alpha^3 - \beta)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$$

E1.67 Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = (-2)^{1000} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{500} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{998} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{499}$$

$$\text{και} \quad B = 2^\nu \cdot 3^{\nu+1}$$

όπου ν είναι άρτιος φυσικός αριθμός. Να συγκρίνεται τους αριθμούς $3A^\nu$ και B.

E1.68 Αν ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 4 \cdot (-1)^\nu + 2 \cdot \frac{(-1)^{2\nu+1}}{5} - 7 \cdot \frac{(-1)^{3\nu}}{5}$$

Όλες οι απαντήσεις και οι λύσεις των ασκήσεων βρίσκονται στο τέλος του βιβλίου.