Μαθηματικά ομάδων Προσανατολισμού θετικών σπουδών & σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής

πανελλαδικές εξετάσεις 2022

θέματα και ενδεικτικές λύσεις

Επιμέλεια Λύσεων: Χρήστος Κ. Ποΐμος

www.liveyourmaths.com/

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c ,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c ,$$

με $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο

$R_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=1$.

ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^4-2x^2+1$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

Μονάδες 6

Β2. Αν $h(x)=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1–1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

Μονάδες 9

Β3. Έστω $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$.

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$. (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$, όπου $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & , \quad x<-1\\ 3x^2-1 & , \quad x>-1\end{cases}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}-2x-2 & , \quad x\le -1\\ x^3-x & , \quad x>-1\end{cases}$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0,f(x_0))$ με $x_0>-1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2.

Μονάδες 5

Γ3. Έστω $y=2x-2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x,y)$ με $x>2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ, όπου Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες (2,0). Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο Β(3,4) ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε τη χρονική στιγμή t_0.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x-\ln(3x)$$

Δ1. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2, με $x_1<1<x_2$. (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) \ .$$

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2 - x_1) < 0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ - ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ 2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 186

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 142

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 161

Α4.
α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^4-2x^2+1$ και $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\sqrt{x}$.

Πρωτίστως, πρέπει $D_{f\circ g}\neq\varnothing$. Είναι:

$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g \text{ και } g(x)\in D_f\}=\{x\geq 0 \text{ και } \sqrt{x}\leq 1\}=\{x\geq 0 \text{ και } x\leq 1\}=[0,1]\neq\varnothing$$

Άρα:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\left(\sqrt{x}\right)^4-2\left(\sqrt{x}\right)^2+1=x^2-2x+1=(x-1)^2,\ x\in[0,1]$$

Επομένως, είναι:

$$h(x)=(f\circ g)(x)=(x-1)^2,\ x\in[0,1].$$

Β2.

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση h είναι "1 – 1"

<u>α' τρόπος</u>

Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in[0,1]$ με $h(x_1)=h(x_2)$ ισχύει:

$$h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow(x_1-1)^2=(x_2-1)^2\Rightarrow|x_1-1|=|x_2-1|\overset{0\leq x_1,x_2\leq 1}{\underset{\substack{x_1-1\leq 0\\ x_2-1\leq 0}}{\Rightarrow}}-(x_1-1)=-(x_2-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow h \text{ "1-1"}$$

β' τρόπος

Η συνάρτηση $h(x)=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$h'(x)=\left[(x-1)^2\right]'=2(x-1)(x-1)'=2(x-1),\text{ για κάθε } x\in(0,1).$$

Συνεπώς,

$$h'(x)=2(x-1)<0\Rightarrow h\searrow \text{ στο } [0,1]\Rightarrow h \text{ "1-1"}$$

Θα βρούμε, τώρα, την αντίστροφη της h. Θέτουμε $y=h(x)$ και έχουμε:

$$y=h(x)\Leftrightarrow y=(x-1)^2\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}y=(x-1)^2\\ y\geq 0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}|x-1|=\sqrt{y}\\ y\geq 0\end{Bmatrix}$$

Αλλά, $0\leq x\leq 1\Rightarrow x-1\leq 0$, οπότε $|x-1|=-(x-1)$ και τελικά:

$$\begin{Bmatrix}-(x-1)=\sqrt{y}\\ y\geq 0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}1-x=\sqrt{y}\\ y\geq 0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}x=1-\sqrt{y}\\ y\geq 0\end{Bmatrix}$$

Επίσης, πρέπει $0\leq 1-\sqrt{y}\leq 1\Leftrightarrow -1\leq -\sqrt{y}\leq 0\Leftrightarrow 0\leq \sqrt{y}\leq 1\Leftrightarrow 0\leq y\leq 1$

Άρα, $h^{-1}(y)=1-\sqrt{y}$, $0\leq y\leq 1$ και, αντικαθιστώντας το y με x, είναι:

$$h^{-1}(x)=1-\sqrt{x},\ x\in[0,1]$$

B3. Έχουμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\cancel{1-\sqrt{x}}}{\cancel{\left(1-\sqrt{x}\right)}\left(1+\sqrt{x}\right)}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$$

(i) Αρκεί να δείξουμε ότι η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $\varphi(0)\neq\varphi(1)$.

Πράγματι, η φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης:

$$\lim_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}=\varphi(1)$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)=\varphi(1)$, και άρα η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Επίσης:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(0) &= \frac{1-\sqrt{0}}{1-0} = 1 \\ \varphi(1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} = \varphi(0) \neq \varphi(1)$$

Επομένως, ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών** για τη συνάρτηση φ στο διάστημα $[0,1]$.

(ii) Είναι:

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \underset{\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]}{\overset{\eta\mu \nearrow}{\Rightarrow}} \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1 \Rightarrow \varphi(1) < \eta\mu\alpha < \varphi(0)$$

Με εφαρμογή του **Θ.Ε.Τ.** από ερώτημα **(i)**, υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$, $\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \frac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ 3x^2 - 1, & x > -1 \end{cases}$$

- Για $x \in (-\infty, -1)$ είναι:

$$f'(x) = -2 \Rightarrow f'(x) = (-2x)' \underset{\text{Θ.Μ.Τ.}}{\overset{\text{Συνέπειες}}{\Rightarrow}} f'(x) = -2x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} \text{ με } x < -1$$

- Για $x \in (-1, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = (x^3 - x)' \underset{\text{Θ.Μ.Τ.}}{\overset{\text{Συνέπειες}}{\Rightarrow}} f(x) = x^3 - x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x > -1$$

Αλλά η f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή $f(0) = 0$ και επειδή $0 > -1$, θα είναι:

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow 0^3 - 0 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

Συνεπώς:

$$f(x) = x^3 - x,\ x > -1$$

Επίσης, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε και στο $x_0 = -1$, δηλαδή:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1^-}(-2x + c_1) = \lim_{x\to -1^+}(x^3 - x) \Leftrightarrow c_1 + 2 = (-1)^3 - (-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c_1 + 2 = -1 + 1 \Leftrightarrow c_1 = -2$$

Τελικά, είναι:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\le -1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$$

Γ2. Έστω $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ το σημείο επαφής εφαπτομένης και καμπύλης. Η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τη σχέση:

$$(\varepsilon): y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\cdot\left(x-x_0\right),\ x_0>-1$$

Όμως:

$$f\left(x_0\right)\overset{x_0>-1}{=}x_0^3-x_0 \text{ και } f'\left(x_0\right)\overset{x_0>-1}{=}3x_0^2-1$$

Άρα:

$$y-\left(x_0^3-x_0\right)=\left(3x_0^2-1\right)\cdot\left(x-x_0\right)\ (1)$$

Αφού η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0,-2)$, τότε θέτουμε στην (1) $x=0$ και $y=-2$ και έχουμε:

$$-2-\left(x_0^3-x_0\right)=\left(3x_0^2-1\right)\cdot\left(0-x_0\right)\Leftrightarrow -2-x_0^3+\cancel{x_0}=-3x_0^3+\cancel{x_0}\Leftrightarrow 2x_0^3=2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_0^3=1\Leftrightarrow x_0=1$$

Τελικά, η (1) για $x_0=1$ γίνεται:

$$y-\left(1^3-1\right)=\left(3\cdot 1^2-1\right)\cdot\left(x-1\right)\Leftrightarrow y=2\left(x-1\right)$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $y=2x-2$.

Γ3. Είναι $M\left(x(t), y(t)\right)$ και:

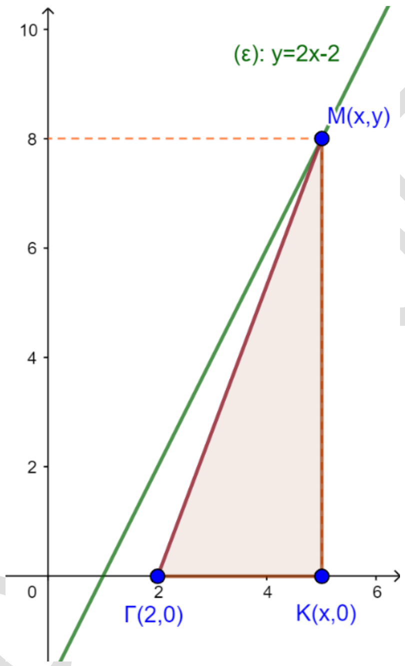
$$E(t)=\frac{1}{2}(\mathrm{K\Gamma})(\mathrm{MK})$$

αφού το τρίγωνο ΜΚΓ είναι ορθογώνιο.

Είναι: $$(\mathrm{K\Gamma})=\sqrt{\left(2-x(t)\right)^2}=\left|2-x(t)\right|\underset{2-x(t)<0}{\overset{x(t)>2}{=}}-\left(2-x(t)\right)=x(t)-2$$

και: $$(\mathrm{MK})=\sqrt{\left(x(t)-x(t)\right)^2+\left(0-y(t)\right)^2}=\left|y(t)\right|\overset{y(t)>0}{=}y(t)$$

Τελικά, είναι:



$$E(t)=\frac{1}{2}\cdot\left(x(t)-2\right)\cdot y(t)$$

Επίσης:

$$M\in(\varepsilon)\Leftrightarrow y(t)=2x(t)-2$$

Οπότε:

$$E(t)=\frac{1}{2}\cdot\left(x(t)-2\right)\cdot\left(2x(t)-2\right)=\left(x(t)-2\right)\cdot\left(x(t)-1\right)=$$
$$=x^2(t)-x(t)-2x(t)+2=x^2(t)-3x(t)+2$$

Κατά συνέπεια:

$$E'(t)=\left(x^2(t)-3x(t)+2\right)'=2x(t)x'(t)-3x'(t)=\left(2x(t)-3\right)\cdot x'(t)$$

Τη χρονική στιγμή $t=t_0$ έχουμε:

$$E'(t_0)=(2x(t_0)-3)\cdot x'(t_0)=(2\cdot 3-3)\cdot 2=6\ \mu^2/\text{sec}$$

αφού $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$.

Γ4. Θέλουμε να υπολογίσουμε το:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]\ (1)$$

Είναι:

$$\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right|\le\frac{1}{|f(x)|}\Rightarrow-\frac{1}{|f(x)|}\le\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\le\frac{1}{|f(x)|}$$

Θα υπολογίσουμε τα όρια:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right)\ \text{και}\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{|f(x)|}\right)$$

Όταν $x\to-\infty$, είναι:

$$x<-1\Leftrightarrow-2x>2\Leftrightarrow-2x-2>0\Leftrightarrow f(x)>0\Rightarrow|f(x)|=f(x)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{f(x)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}\overset{x\to-\infty}{\underset{x<-1}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-2x-2}=0$$

Και άρα, από κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0\ (2)$$

Για το $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}$ (3), θέτουμε $-x=u$. Όταν $x\to-\infty\Leftrightarrow-x\to+\infty\Leftrightarrow u\to+\infty$.

Επίσης, $-x=u\Leftrightarrow x=-u$.

Συνεπώς, το (3) γίνεται:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1-(-u)^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1+u^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{u^3+1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3}=1$$

Άρα:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}=1\ (4)$$

Από (1), (2) και (4), εφόσον τα όρια υπάρχουν, έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}=0+1=1$$

Τελικά: $$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=x-\ln(3x)$.

(i) Θα λύσουμε το ερώτημα με δύο τρόπους.

α' τρόπος

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=\left(x-\ln(3x)\right)'=1-\frac{1}{3x}(3x)'=1-\frac{3}{3x}=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x},\ x>0$$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x}=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x}>0\Leftrightarrow x(x-1)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x-1>0\Leftrightarrow x>1$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x}<0\Leftrightarrow x(x-1)<0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x-1<0\Leftrightarrow x<1$

Σχηματίζουμε πίνακα μεταβολών:

x	0		1	+∞
f'		-	0	+
f		↘		↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0=1$.

Θέτουμε $A_1=(0,1]$ και έχουμε:

$$f(A_1)\overset{f\text{ συνεχής στο }(0,1]}{\underset{f\searrow}{=}}\left[f(1),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)$$

- $f(1)=1-\ln(3\cdot1)=1-\ln3$
- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-\ln(3x)\right)=\lim\limits_{x\to0^+}x-\lim\limits_{x\to0^+}\ln(3x)$

Θέτουμε $3x=t$. Όταν $x\to 0^+$, $t\to 0^+$. Τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(3x)=\lim\limits_{t\to 0^+}\ln t=-\infty$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0-(-\infty)=+\infty$.

Άρα: $f(A_1)=[1-\ln 3,+\infty)$

Όμως: $e<3\overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow}\ln e<\ln 3\Leftrightarrow 1<\ln 3\Leftrightarrow 1-\ln 3<0$

Συνεπώς, $0\in f(A_1)$, άρα υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, το x_1 είναι μοναδικό.

Θέτουμε $A_2=[1,+\infty)$ και έχουμε:

$$f(A_2)\underset{f\nearrow}{\overset{f\text{ συνεχής στο }[1,+\infty)}{=}}\left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln(3x))=(+\infty-\infty)$, απροσδιόριστη μορφή.
- Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(3x)=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\ln\omega=+\infty$, αφού για $\omega=3x$, όταν $x\to+\infty$, $\omega\to+\infty$.
- Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(1-\dfrac{\ln(3x)}{x}\right)\right]=(+\infty)\cdot(1-0)=+\infty$, αφού:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x)}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Άρα:

$$f(A_2)=[1-\ln 3,+\infty)$$

Συνεπώς, $0\in f(A_2)$, άρα υπάρχει $x_2>1$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, το x_2 είναι μοναδικό.

Άρα, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2 με $x_1<1<x_2$.

β’ τρόπος

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=(x-\ln(3x))'=1-\frac{1}{3x}(3x)'=1-\frac{3}{3x}=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x},\ x>0$$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x}=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x}>0\Leftrightarrow x(x-1)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x-1>0\Leftrightarrow x>1$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x} < 0 \Leftrightarrow x(x-1) < 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x-1<0 \Leftrightarrow x<1$

Σχηματίζουμε πίνακα μεταβολών:

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0 = 1$.

Η συνάρτηση f στο $(0,1]$ έχει $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\ln(3x)\right)=+\infty$, άρα υπάρχει αριθμός α **κοντά** στο 0 τέτοιος, ώστε $f(\alpha)>0$.

Επίσης, $f(1)=1-\ln 3<0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,1]$ με $f(\alpha)\cdot f(1)<0$, άρα από **Θεώρημα Bolzano**, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(\alpha,1)\subseteq(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, το x_1 είναι μοναδικό.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,2]$ με $f(1)=1-\ln 3<0$ και $f(2)=2-\ln(3\cdot 2)=2-\ln 6>0$, διότι:

$$e^2>6 \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln e^2>\ln 6 \Leftrightarrow 2\ln e>\ln 6 \Leftrightarrow 2>\ln 6 \Leftrightarrow 2-\ln 6>0$$

Άρα, $f(1)\cdot f(2)<0$ και άρα από **Θεώρημα Bolzano**, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in(1,2)\subseteq(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, το x_2 είναι μοναδικό.

Άρα, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει **ακριβώς δύο ρίζες** x_1, x_2 με $x_1<1<x_2$.

(ii) Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=\left(x-\ln(3x)\right)'=1-\frac{1}{3x}(3x)'=1-\frac{1}{x}$$

Η f′ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη με:

$$f''(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)'=-\left(\frac{1}{x}\right)'=-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}>0$$

Άρα, $f''(x)>0$ και άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx$$

- Για $x_1<x<1 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x_1)>f(x) \overset{f(x_1)=0}{\Rightarrow} f(x)<0$
- Για $1<x<x_2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(x_2) \overset{f(x_2)=0}{\Rightarrow} f(x)<0$

Άρα, $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$.

Οπότε, $|f(x)|=-f(x)$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$. Κατά συνέπεια,

$$\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx=\int_{x_1}^{x_2}(-f(x))dx=-\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=-\int_{x_1}^{x_2}(x-\ln(3x))dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}(\ln(3x)-x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)dx-\int_{x_1}^{x_2}xdx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}(x)'\cdot\ln(3x)dx-\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{x^2}{2}\right)'dx=$$

$$=\left[x\cdot\ln(3x)\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}x\cdot(\ln(3x))'dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}=$$

$$=x_2\ln(3x_2)-x_1\ln(3x_1)-\int_{x_1}^{x_2}x\cdot\frac{3}{3x}dx-\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{2}\right)=$$

$$=x_2\ln(3x_2)-x_1\ln(3x_1)-\int_{x_1}^{x_2}1dx-\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{2}\right)=$$

$$=x_2\ln(3x_2)-x_1\ln(3x_1)-1\cdot(x_2-x_1)-\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{2}\right)\ (1)$$

Αλλά:

$$f(x_1)=0\Leftrightarrow x_1-\ln(3x_1)=0\Leftrightarrow x_1=\ln(3x_1)\ (2)$$

και:

$$f(x_2)=0\Leftrightarrow x_2-\ln(3x_2)=0\Leftrightarrow x_2=\ln(3x_2)\ (3)$$

Από (1), (2) και (3) έχουμε:

$$\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx = x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) - \frac{(x_2^2 - x_1^2)}{2} = \frac{(x_2^2 - x_1^2)}{2} - (x_2 - x_1) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)\left[\frac{1}{2}(x_2 + x_1) - 1\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(x_2 - x_1)\cdot(x_1 + x_2 - 2)$$

Δηλαδή, $E(\Omega) = \frac{1}{2}\cdot(x_2 - x_1)\cdot(x_1 + x_2 - 2)$.

Δ3. Θέλουμε να δείξουμε ότι $f(2 - x_1) < 0$.

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$x_1 < 2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 2 - x_1 \ (4) \\ \text{και} \\ 2 - x_1 < x_2 \ (5) \end{cases}$$

- $x_1 < 2 - x_1 \Leftrightarrow 2x_1 < 2 \Leftrightarrow x_1 < 1$, που ισχύει.
- $2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0$.

  Όμως, από ερώτημα **Δ2**, είναι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

  με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$ και $E > 0$, δηλαδή:

$$\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0$$

  Τελικά, είναι:

$$x_1 < 2 - x_1 < x_2 \underset{\text{για κάθε } x\in(x_1,x_2)}{\overset{f(x)<0}{\Rightarrow}} f(2 - x_1) < 0$$

Δ4. Έχουμε την εξίσωση:

$$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow f(x) + f(x) = 1 - \ln 3 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) - (1 - \ln 3) = f'(x_2)(x - x_2) - f(x) \overset{f(1)=1-\ln 3}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow f(x) - f(1) = f'(x_2)(x - x_2) - f(x) \ (6)$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $(x_2, f(x_2))$ είναι:

$$y-f\left(x_2\right)=f'\left(x_2\right)\left(x-x_2\right)\underset{x_2\ \text{ρίζα}}{\overset{f(x_2)=0}{\Leftrightarrow}}y=f'\left(x_2\right)\left(x-x_2\right)$$

Όμως, η f είναι κυρτή (ερώτημα **Δ1**). Δηλαδή:

$$f\left(x\right)\geq y\Leftrightarrow f\left(x\right)\geq f'\left(x_2\right)\left(x-x_2\right)\Leftrightarrow f'\left(x_2\right)\left(x-x_2\right)-f\left(x\right)\leq 0$$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0=1$ (ερώτημα **Δ1**). Δηλαδή, $f\left(x\right)\geq f\left(1\right)$ για κάθε $x>0$ ή $f\left(x\right)-f\left(1\right)\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x=1$.

Από την κυρτότητα, έχουμε $f'\left(x_2\right)\left(x-x_2\right)-f\left(x\right)\leq 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x=x_2$.

Για να ισχύει η (6), πρέπει $x_2=1$, άτοπο, αφού $x_1<1<x_2$.

Άρα, η δοθείσα εξίσωση δεν έχει λύση.