ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΠΑΡΙ ΠΑΜΦΙΛΟΥ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗ
ΠΑΝΕΠ. ΚΡΗΤΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

τροχαλία

ΠΑΡΙ ΠΑΜΦΙΛΟΥ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εκδόσεις Τροχαλία
Γριβαίων 5 (πάροδος Σκουφά 64)
106 80 Αθήνα
Τηλ.: 36 46 426

Γραφικές Τέχνες ΛΥΧΝΟΣ ΕΠΕ
πλ. Θεάτρου 24 Αθήνα - Τηλ.: 32 14 766

Στον αδελφο μου Βυρωνα

But words are things, and a small drop of ink,
Falling like dew, upon a thought, produces
That which makes thousands, perhaps millions,think;

Lord Byron

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ

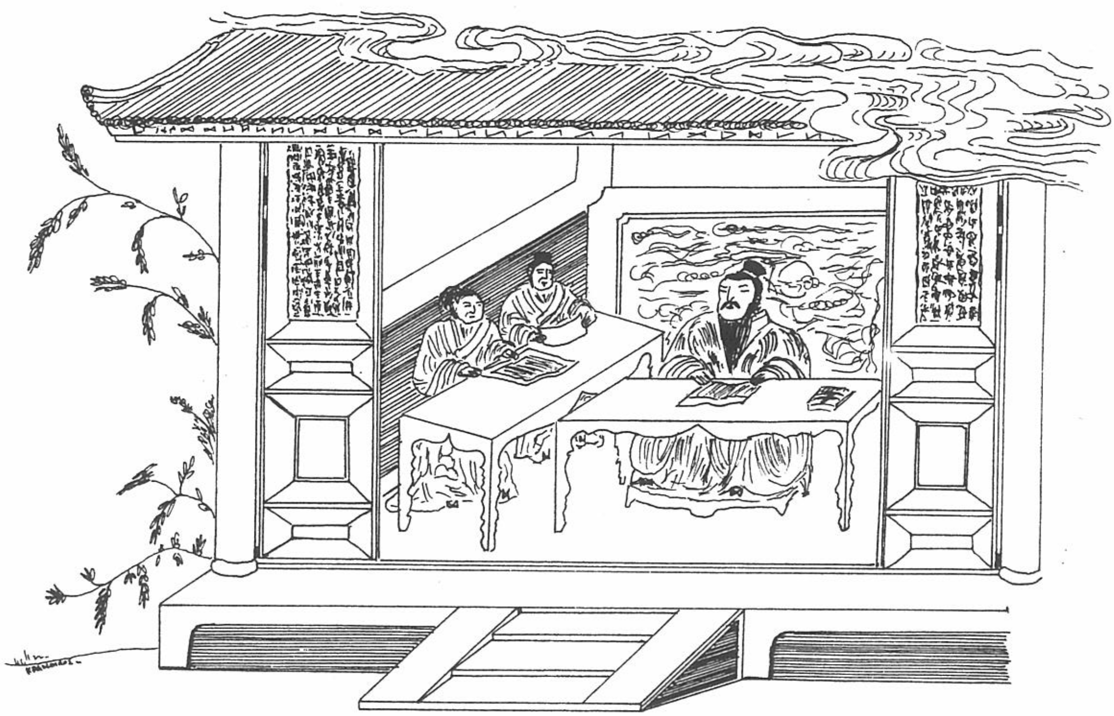
ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ

Ἀλλ οὐ πρῶτον τό πνευματικόν, ἀλλά τό ψυχικόν, ἔπειτα τό πνευματικόν.

Κορ. α', ιε 46

1

ΠΑΡΑΛΟΓΟΣ



Ο Κουνγκ Φου Ντσι και οι μαθητες του μελετουν
το βιβλιο των αλλαγων (Ι Τσινγκ).
Αντιγραφο ξυλογραφιας του 16ου αιωνα.

Η επιστημη πρεπει να ειναι μια ανανεωτικη και αναζωογονιτικη δυναμη. Τουτο επιτυγχανεται μονο με τη ζωντανη επικοινωνια μεταξυ φιλων που εχουν κοινα ενδιαφεροντα. Μ αυτους μπορει κανεις να συζητει και να εξασκηται στην εφαρμογη των αληθειων της ζωης. Ετσι γινεται η γνωση πολυπλευρη και αποκτα ενα ελαφρυ προσχαρο χαρακτηρα. Αντιθετα, η γνωση των αυτοδιδακτων περιεχει παντοτε κατι μονοπλευρο και βαρυ.

Σχολιο στο εξαγραμμο Ντουϊ (προσχαρο ☱☱)
απο το Ι Τσινγκ, εκδοση R. Wilhelm.

§1 ## ΠΑΙΔΕΙΑ

Οποιος γυρευει την αληθεια, διαλεγει το αγαθο και
κρατιεται σταθερα απ αυτο. Ερευνα γι αυτο διεξοδικα.
Αναζητα με κριση, συλλογιζεται προσεκτικα γι αυτο.
Εξεταζει μεχρι να ξεκαθαριση. Ενεργει αποφασιστικα προς αυτο.
Μπορει να μην ερευνα μερικα πραγματα.
Αυτο ομως που ερευνα δεν τ αφηνει πριν το γνωριση καλα.
Μπορει να μην ρωτα για μερικα πραγματα.
Αυτο ομως που ρωτα δεν σταματα μεχρι να το μαθη.
Μπορει να μη συλλογιζεται μερικα πραγματα.
Αυτο ομως που συλλογιζεται δεν παυει πριν το κατανοησει.
Μπορει να μην εξεταζει ορισμενα πραγματα.
Αυτο ομως που εξεταζει δεν παυει πριν το ξεκαθαρισει.
Μπορει να μην κανει ορισμενα πραγματα.
Αυτο ομως που κανει δεν το παρατα πριν τ ολοκληρωσει.

Αλλοι μπορουν ισως με την πρωτη.
Εγω πρεπει δεκα φορες.
Αλλοι μπορουν με τις δεκα φορες.
Εγω πρεπει χιλιες.

Αυτος ομως που προσπαθει με υπομονη,
να πορευτη σ αυτο το δρομο,
ακομη κι αν ειναι επιπολαιος,
θ αποκτησει διαυγεια.
Ακομη κι αν ειναι αδυνατος,
θα δυναμωσει.

Απο την αληθεια στην κατανοηση με διαυγεια:
Τουτο ειναι φυσικη καταβολη.
Απο την κατανοηση με διαυγεια, στην αληθεια:
Τουτο ειναι παιδεια.

Κουνγκ Φου Ντσι

§2. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η γραμμικη αλγεβρα ξεκινησε με την προσπαθεια δημιουργιας μιας θεωριας για γραμμικα συστηματα, δηλαδη συστηματα εξισωσεων της μορφης:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1+ \alpha_{12}x_2 +\ldots+ \alpha_{1n}x_n = b_1 \\ \alpha_{21}x_1+ \alpha_{22}x_2 +\ldots+ \alpha_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1+ \alpha_{m2}x_2 +\ldots+ a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (1)$$

Το m δειχνει το πληθος των εξισωσεων.
Το n δειχνει το πληθος των αγνωστων.

Η δυσκολια η ευκολια λυσης του (1) εξαρταται απο την mxn ΜΗΤΡΑ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΤΟΥ:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Τουτη λεγεται και ΜΗΤΡΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (1). Η μητρα

$$(A/b) = \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & b_m \end{array}\right] \quad (3)$$

λεγεται ΕΠΗΥΞΗΜΕΝΗ ΜΗΤΡΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ. Αντι της λεξης ΜΗΤΡΑ χρησιμοποιω επισης τη λεξη ΠΙΝΑΚΑΣ.

Ειναι φανερο οτι για να γραψουμε το (1) αρκει να ξερουμε την επηυξημενη (A/b). Οταν η A ειναι πολυ απλη, το συστημα λυνεται αμεσώς π.χ.

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 100 \\ 3x_2 &= 45 \\ 6x_3 &= 60 \end{aligned}$$

με αντιστοιχη επηυξημενη

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 3 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 6 & 60 \end{array}\right].$$

Επισης το συστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad & + 4x_4 = 10 \\ x_3 & + x_4 \;\, = 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

παρατηρουμε οτι γραφεται: (λυνεται ως προς x_1, x_3):

$$\begin{aligned} x_1 &= 10 - 2x_2 - 4x_4 \\ x_3 &= \qquad\qquad - x_4 \end{aligned} \qquad (**)$$

Αρα αν δωσουμε στα x_2, x_4 αυθαιρετες τιμες λ, μ, τοτε προκυπτουν απο τις (**) αντιστοιχες τιμες για τα x_1, x_3 και μ αυτο τον τροπο ολες οι λυσεις του αρχικου συστηματος (*). Η επηυξημενη του (*) ειναι:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] .$$

Μητρες αυτου του ειδους λεγονται ΚΛΙΜΑΚΩΤΕΣ. Τα συστηματα που εχουν κλιμακωτη επηυξημενη μητρα λυνονται αμεσως (οταν υπαρχει λυση) με τροπο αναλογο του (**). Η γενικη μορφη μιας κλιμακωτης ειναι:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0\ldots0 & 1 & *\ldots* & 0 & *\ldots* & 0 & *\ldots* & 0 & *\ldots* & 0 & *\ldots \\ 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 1 & *\ldots* & 0 & *\ldots* & 0 & *\ldots* & 0 & *\ldots \\ 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 1 & *\ldots* & 0 & *\ldots* & 0 & *\ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\, 0 & 1 & *\ldots \\ 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & \ldots \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ n_1 & & n_2 & & n_3 & & n_4 & \ldots & n_k \end{array} \end{array} \qquad (4)$$

π.χ.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \uparrow n_1=3 \quad \uparrow n_2=5 \qquad\qquad \uparrow n_3=10 \end{array} \qquad (5)$$

Η κλιμακωτη μητρα χαρακτηριζεται απο τις εξης ιδιοτητες (τα * στην (4) συμβολιζουν πραγματικους αριθμους):

1ον) Υπαρχουν $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ ετσι ωστε η n_i-στηλη ειναι της μορφης: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ($\text{i-θεση} \longrightarrow 1$) και ολα τα στοιχεια της i-γραμμης αριστερα του 1 ειναι μηδενικα. Οι στηλες αυτες λεγονται ΚΥΡΙΕΣ. Οι υπολοιπες ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΥΣΕΣ.

Η μοναδα μιας κυριας στηλης λεγεται ΗΓΕΤΙΚΗ μοναδα αυτης.

2ον) Καθε γραμμη της μητρας που δεν περιεχει καποια ηγετικη μοναδα ειναι μηδενικη (αποτελειται απο 0).

ΑΣΚΗΣΗ-1 Εξηγησε γιατι στην (5) η 3η,5η και 10η στηλη ειναι κυριες, ενω η 8η,9η και 11η στηλη ειναι δευτερευουσες.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Εξηγησε γιατι η $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ δεν ειναι κλιμακωτη.

Ενα συστημα του οποιου η επηυξημενη ειναι κλιμακωτη λεμε οτι ειναι ΚΛΙΜΑΚΩΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ. Η βασικη παρατηρηση ειναι οτι:

Σ ενα κλιμακωτο συστημα ο αγνωστος x_{n_k} περιεχεται μονο στην k-εξισωση (γραμμη) και σε καμμια αλλη.	(6)

Ετσι αν θεωρησουμε την (5) σαν επηυξημενη του κλιμακωτου συστηματος

$$\left.\begin{aligned} x_3 + 2x_4 + 3x_6 + x_8 + 2x_{11} &= 0 \\ x_5 + 4x_6 + x_9 + 2x_{11} &= 0 \\ x_{10} - x_{11} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (+)$$

βλεπουμε, οτι οι εξισωσεις λυνονται ως προς τους αγνωστους x_3, x_5, x_{10} που αντιστοιχουν στις κυριες στηλες της (5). Με αλλα λογια το (+) γραφεται ισοδυναμα :

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= -2x_4 - 3x_6 - x_8 - 2x_{11} \\ x_5 &= - 4x_6 - x_9 - 2x_{11} \\ x_{10} &= 1 + x_{11} \end{aligned}\right\} \qquad (++)$$

Στις διαφορες μεταβλητες δεξια μπορουμε να δωσουμε αυθαιρετες τιμες και με τις (++) να προσδιορισουμε τις αντιστοιχες τιμες των x_3, x_5 και x_{10}. Μ αυτο τον τροπο προσδιοριζουμε προφανως ολες τις λυσεις του (++) και του ισοδυναμου του (+) (Γιατι;).

Με την ιδια ακριβως μεθοδο μπορουμε να λυσουμε ενα οποιοδηποτε κλιμακωτο συστημα : Πραγματι, βασει της παρατηρησης (6) μπορουμε να λυσουμε τις εξισωσεις διαδοχικα ως προς τους αγνωστους $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ Στη δεξια πλευρα των εξισωσεων που προκυπτουν, θα περιεχονται μονο μεταβλητες που αντιστοιχουν σε δευτερευουσες στηλες (εχε στο νου σου το (++)). Τις τιμες αυτων των μεταβλητων μπορουμε να τις παρουμε αυθαιρετες, τις δε αντιστοιχες τιμες των $x_{n_1}, x_{n_2}\ldots$ να τις προσδιορισουμε απο τις εξισωσεις. Μ αυτο τον τροπο προκυπτουν ολες οι λυσεις του κλιμακωτου συστηματος (Γιατι;). Σ ενα κλιμακωτο συστημα μπορουμε εξ αλλου να αναγνωρισουμε αμεσως αν λυνεται η οχι :

ΠΡΟΤΑΣΗ Ενα κλιμακωτο συστημα <u>δεν</u> λυνεται, μονον οταν στην επηυξημενη του, η τελευταια στηλη ειναι κυρια.	(7)

π.χ. αν η επηυξημενη κλιμακωτου συστηματος ειναι $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ τοτε η τριτη εξισωση του γραφεται

$$0 = 0x_1 + \ldots + 0x_4 = 1$$

που ειναι αδυνατον. Αναλογη ειναι η αποδειξη της προτασης. Στη γενικη περιπτωση η γραμμη που περιεχει την ηγετικη μοναδα της τελευταιας στηλης δινει παλι την εξισωση $0 = 1$, που ειναι αδυνατη.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Λυσε το κλιμακωτο συστημα με επηυξημενη την διπλανη μητρα και δες οτι η λυση του εξαρταται απο 3 αυθαιρετες σταθερες.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ-4 Εξετασε σε τι διαφερουν οι λυσεις του προηγουμενου συστηματος απο τις λυσεις του κλιμακωτου με επηυξημενη :

α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Η γνωση του συνετου ειναι σαν το νερο. Τουτο δεν κυλα στο λακο παρακατω αν δεν γεμισει τον προηγουμενο ως τα χειλη. Εκεινος δεν ξεκινα να μαθη τα επομενα πριν κυριαρχησει πληρως τα προηγουμενα.

Κουνγκ Φου Ντσι (Κομφουκιος)

Οταν στην καρδια, εστω και για μια στιγμη, λειψει η αρμονια και η ευθυμια, τοτε γλυστρα μεσα της μια χαμηλη, λανθασμενη νοοτροπια. Οταν στην εξωτερικη δραστηριοτητα, εστω και για μια στιγμη, λειψει η δυναμη και η σοβαροτητα, τοτε γλυστρα μεσα της μια βαριεστημενη, επιπολαιη νοοτροπια.

Λι Γκι, Περι μουσικης

§3 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

> Το σχολειο ειναι ενας τοπος σχολης. Μονο οταν εχετε σχολη μπορειτε να μαθαινετε. Δηλαδη: η μαθηση μπορει να συμβει μονο οταν δεν υπαρχει πιεση οποιουδηποτε ειδους.
>
> Κρισναμουρτι

Ειδαμε προηγουμενως ποσο ευκολα λυνεται ενα κλιμακωτο συστημα. Το ευχαριστο ειναι οτι καθε γραμμικο συστημα ειναι ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ μ ενα κλιμακωτο. "Ισοδυναμο" θα πη οτι τα δυο συστηματα εχουν τις ιδιες ακριβως λυσεις. Η μεθοδος που χρησιμοποιουμε για να βρουμε το ισοδυναμο κλιμακωτο συστημα, λεγεται ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΚΛΙΜΑΚΩΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (ή αναγωγη στην κλιμακωτη μητρα, αν δουλευουμε με μητρες).

Το συστημα που προσδιοριζουμε με την αναγωγη λεγεται ΑΝΗΓΜΕΝΟ ΚΛΙΜΑΚΩΤΟ του αρχικου (αντ. ανηγμενη κλιμακωτη μητρα). Με την αναγωγη συστηματος σε κλιμακωτο λυνουμε ή δειχνουμε το αδυνατον για οποιοδηποτε γραμμικο συστημα. Περα ομως απ αυτο, στην τεχνικη της αναγωγης-που ειναι απλουστατη- και ορισμενες συνεπειες της, στηριζονται πολλα γενικα πορισματα της γραμμικης αλγεβρας. Πριν μπουμε στη μεθοδο της αναγωγης χρειαζονται μερικοι ορισμοι.

ΟΜΟΓΕΝΕΣ λεγεται το γραμμικο συστημα (1) οταν $b_1=b_2=...=b_n=0$.

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟ ΟΜΟΓΕΝΕΣ του γραμμικου συστηματος (1) λεγεται το ομογενες συστημα που παιρνουμε απο το (1) βαζοντας στην θεση των $b_1,b_2,...,b_m$ μηδενικα.

ΤΑΞΗ κλιμακωτης μητρας λεγεται το πληθος των κυριων στηλων της.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Καθε ομογενες συστημα εχει μια τουλαχιστον λυση, που την λεμε ΤΕΤΡΙΜΜΕΝΗ.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δωσε παραδειγμα ομογενους που εχει <u>ακριβως</u> μια λυση (αναγκαστικα την τετριμμενη).

ΑΣΚΗΣΗ-3 Αν οι $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ και $(\lambda_1',...,\lambda_n')$ ειναι λυσεις του (1), τοτε η διαφορα τους $(\lambda_1-\lambda_1',...,\lambda_n-\lambda_n')$ ειναι λυση του αντιστοιχου ομογενους.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Ενα κλιμακωτο συστημα λυνεται τοτε ακριβως, οταν η ταξη της μητρας του Α ισουται με την ταξη της επηυξημενης του (Α/b) (δες την προταση (7)).

ΑΣΚΗΣΗ–5 Αν το $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ ειναι λυση του (1) και το $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ ειναι λυση του αντιστοιχου ομογενους, τοτε το αθροισμα $(\lambda_1+\mu_1,\dots,\lambda_n+\mu_n)$ ειναι λυση του (1).

ΑΣΚΗΣΗ–6 Η λυση ενος mxn ομογενους κλιμακωτου συστηματος ταξης κ εξαρταται απο n-κ αυθαιρετες σταθερες (Οσες, δηλαδη, ειναι οι δευτερευουσες στηλες του συστηματος).

ΑΣΚΗΣΗ–7 Ενα mxn κλιμακωτο συστημα ταξης k με m<n και k=m, εχει παντοτε λυσεις (εφαρμοσε την (7)).

Οι κλιμακωτες μητρες 3x3 θα εχουν μια απο τις μορφες:

$$\begin{bmatrix}1&*&*\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1&*\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \text{ταξης 1,}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&*\\0&1&*\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&*&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \text{ταξης 2,}$$

$$,\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad \text{ταξης 3.}$$

ΑΣΚΗΣΗ–8 Προσδιορισε τις διαφορες μορφες των 3x4 κλιμακωτων μητρων.

Αι ευρεσεις και τελειοποιησεις εις εκεινας τας κεφαλας γεννωνται, οσαι περιοριζονται εις την σκεψιν ενος μονον πραγματος, και καταγινονται νυκτα και ημεραν εις αυτο.

Α. Κοραης

Οι (μουσικοι) τονοι δημιουργουνται στην καρδια του ανθρωπου.

Λι Γκι, Περι Μουσικης

Ομως τα εξωτερικα πραγματα επηρεαζουν τον ανθρωπο ακαταπαυστα. Οταν λοιπον οι συμπαθειες και οι αντιπαθειες του ανθρωπου δεν εχουν κανενα ρυθμο και πλησιασει ενα εξωτερικο πραγμα, τοτε κι ο ιδιος ο ανθρωπος μεταβαλλεται σε εξωτερικο πραγμα.

Λι Γκι, Περι Μουσικης

§4 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΚΛΙΜΑΚΩΤΟ

Υπαρχουν τρεις πολυ απλες πραξεις μεταξυ των γραμμων ενος συστηματος (1) που οδηγουν σε συστημα ισοδυναμο με το αρχικο. Τουτες λεγονται ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΡΑΜΜΩΝ και ειναι οι εξης:

I. Εναλλαγη δυο γραμμων π.χ. $\gamma_i \longleftrightarrow \gamma_j$.
Προφανως μια τετοια πραξη δεν αλλαζει τιποτε στο συστημα.

II. Πολλαπλασιασμος μιας γραμμης με $\lambda \neq 0$. π.χ. αν πολλαπλασιασουμε την i-γραμμη γ_i με λ θα προκυψει νεο συστημα με τις ιδιες εξισωσεις εκτος της i-εξισωσης που θα γινει:

$$(\lambda\alpha_{i1})x_1 + \dots + (\lambda\alpha_{in})x_n = (\lambda b_i).$$

Προφανως, παλι τα δυο συστηματα εχουν τις ιδιες ακριβως λυσεις.

III. Αντικατασταση γραμμης με το αθροισμα της με καποιαν αλλη γραμμη του συστηματος. π.χ. $\gamma_i \rightarrow \gamma_i+\gamma_j$. Προκυπτει τοτε νεο συστημα του οποιου η i-εξισωση ειναι:

$$(\alpha_{i1}+\alpha_{j1})x_1 + \dots + (\alpha_{in}+\alpha_{jn})x_n = (b_i+b_j) \qquad (*)$$

Το συστημα που προκυπτει ειναι ισοδυναμο του αρχικου. Πραγματι, τα δυο συστηματα διαφερουν μονο κατα την i-γραμμη. Αν το $(x_1,\dots,x_n)$ ειναι λυση του αρχικου συστηματος, λογω της (*) θα ειναι και του νεου. Αντιστροφα, αν $(x_1,\dots,x_n)$ ειναι λυση του νεου συστηματος τοτε αφαιρωντας απο την (*) την j-γραμμη βλεπουμε οτι θα ικανοποιηται και η i-εξισωση του αρχικου συστηματος.

Για λογους συντομιας, δουλευω περισσοτερο με τις μητρες των συστηματων εκτελωντας τις πραξεις στις γραμμες τους. Η αναγωγη συστηματος ή μητρας σε κλιμακωτο(η) επιτυγχανεται με κατ επαναληψη εφαρμογη των πραξεων I,II,III στο αρχικο συστημα ή τη μητρα.

Ας δουλεψω με την μητρα του συστηματος (1).

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Ξεκινω με την πρωτη μη μηδενικη στηλη αυτης της μητρας. Πες λ.χ. την i, οποτε η δοθησα μητρα θα εχει τη μορφη:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & \alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & 0 & \dots 0 & \alpha_{2i} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & \dots 0 & \alpha_{mi} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Βρισκω καποιο στοιχειο της i-στηλης διαφορο του 0, πες $\alpha_{ki} \neq 0$. Εναλλασσω την k και πρωτη γραμμη $\gamma_k \longleftrightarrow \gamma_1$. Προκυπτει η μητρα

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{\kappa i} & \dots & \alpha_{\kappa n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{2i} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{mi} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{k-γραμμη} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Διαιρω την 1η γραμμη με $\alpha_{ki} \neq 0$.

$\gamma_1 \rightarrow \dfrac{1}{\alpha_{\kappa i}} \gamma_1$ που διδει την μητρα

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dfrac{\alpha_{ki+1}}{\alpha_{ki}} & \dots & \dfrac{\alpha_{kn}}{\alpha_{ki}} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{2i} & \dots\dots & & \alpha_{2n} \\ \dots & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{mi} & \dots\dots & & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Μπορω τωρα να εμφανισω την πρωτη κυρια στηλη του κλιμακωτου κανοντας διαδοχικα τις πραξεις :

$\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - \alpha_{2i}\gamma_1$

$\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - \alpha_{3i}\gamma_1$

$\dots\dots\dots$

$\gamma_m \rightarrow \gamma_m - \alpha_{mi}\gamma_1$. Προκυπτει μετα τις πραξεις η μητρα:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & & & \vdots & & \boxed{A'} & \\ 0 & \dots & & 0 & & & \end{bmatrix} \\ \uparrow \text{i-θεση} \end{array}$$

Η Α΄ ειναι μια (m-1)x(n-i) μητρα και αριστερα της ειναι ολα μηδενικα. Αρα μπορω να δουλεψω με τις γραμμες της Α΄και λογω των μηδενικων θα ειναι σαν να δουλευω με τις γραμμες της αρχικης. Επαναλαμβανω λοιπον την διαδικασια και φερνω την Α΄ οπως και προηγουμενως στην μορφη:

$$A' \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots & & \boxed{A''} & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

Κατοπιν εφαρμοζω την ιδια διαδικασια στην Α″, κ.ο.κ. Καθως οι διαστασεις των Α΄, Α″ ,... μειουνται, εξασφαλιζω τον τερματισμο της διαδιαδικασιας μετα απο πεπερασμενα βηματα. Μετα την διαδικασια αυτη η μητρα θα εχει την μορφη:

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * \dots * & b_{12} & \dots & b_{13} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 1 & * & b_{23} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & \dots 0 & 1 \; * & \dots \\ 0 & \dots & & & & & & 0 \; 0 & \dots \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & \dots & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Δηλαδη μια μητρα που αναγεται αμεσως σε κλιμακωτη με τους μετασχηματισμους γραμμων :

$$\gamma_1 \to \gamma_1 - b_{12}\gamma_2 - b_{13}\gamma_3 - \cdots$$
$$\gamma_2 \to \gamma_2 - b_{23}\gamma_3 - \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Αποδειξαμε λοιπον την προταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ Καθε γραμμικο συστημα (ή μητρα) αναγεται με στοιχειωδεις μετασχηματισμους γραμμων του τυπου I,II,III σε ισοδυναμο κλιμακωτο συστημα (αντ. μητρα).

Για παραδειγμα ας κανω αναγωγη της μητρας:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{δινει}}{\gamma_1 \longleftrightarrow \gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{δινει}}{\begin{matrix} \gamma_1 \to \gamma_3+\gamma_1 \\ \gamma_4 \to \gamma_4-\gamma_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{δινει}}{\gamma_3 \to \gamma_3-\gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\text{δινει}}{\gamma_3 \to \tfrac{1}{3}\gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\text{δινει}}{\begin{matrix} \gamma_1 \to \gamma_1-\gamma_3 \\ \gamma_2 \to \gamma_2+2\gamma_3 \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ-1 Αναγαγε σε κλιμακωτη τη μητρα :

α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 10 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 15 \\ 5 & 0 & 4 & 3 & 3 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι υπαρχει μια μονο κλιμακωτη nxn μητρα ταξης n και προσδιορισε την.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Λυσε το συστημα με επηυξημενη:

α) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & 4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 5 & 10 & 1 & -9 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 11 \\ 7 & 14 & 2 & -9 & 13 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε οτι το συστημα με επηυξημενη

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ ειναι αδυνατο.

> Ωστε μπορουμε να ρωτησουμε ξανα τι διδασκετε εσεις και τι μαθαινει ο μαθητης; Δημιουργειτε εκεινη την παραξενη ατμοσφαιρα στην οποια μπορει να συμβη η πραγματικη μαθηση;
>
> Κρισναμουρτι

§5 Ο ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ R^n

Τουτος ειναι το απλουστερο παραδειγμα διανυσματικου χωρου. Αποτελειται απο το συνολο των διατεταγμενων n-δων $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ πραγματικων αριθμων. Γραφουμε

$$\mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in R^n$$

Τα $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ονομαζουμε φυσικες συντεταγμενες του διανυσματος $\mathbf{x}$. Οριζεται προσθεση και πολλαπλασιασμος διανυσματος με πραγματικο αριθ.

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n) \qquad \text{και}$$

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n) \qquad \text{αντιστοιχα.}$$

$\mathbf{x}=\mathbf{y}$ σημαινει $x_1=y_1, x_2=y_2,\ldots,x_n=y_n$.

Αμεσως διαπιστωνουμε τις ιδιοτητες (ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ)

1 . $\mathbf{x},\mathbf{y} \in R^n$ συνεπαγεται $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in R^n$.

2 . $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$

3 . $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$

4 . $\mathbf{O}=(0,\ldots,0)$ δινει $\mathbf{x}+\mathbf{O}=\mathbf{O}+\mathbf{x}$ για καθε $\mathbf{x} \in R^n$.

5 . Το $-\mathbf{x}=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$ δινει $-\mathbf{x}+\mathbf{x}=\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{O}$ για καθε $\mathbf{x} \in R^n$.

6 . $\lambda \in R$ και $\mathbf{x} \in R^n$ συνεπαγεται $\lambda\mathbf{x} \in R^n$.

7 . $(\lambda+\mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}$

8 . $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$

9 . $\lambda(\mu\mathbf{x})=(\lambda\mu)\mathbf{x}$

10. $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$

Με οδηγο αυτες τις ιδιοτητες οριζουμε γενικωτερα σαν ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟ ΧΩΡΟ ΥΠΕΡΑΝΩ ΤΟΥ R ενα μη κενο συνολο V που ικανοποιει τα παραπανω 10 αξιωματα αν αντικαταστησουμε το R^n με V. Η μονη διαφορα θα υπαρχει στην διατυπωση του 4 και 5 αξιωματος. Τουτα θα πρεπει να αντικατασταθουν με τα

4 . Υπαρχει ενα διανυσμα $\mathbf{O}$ στο V με $\mathbf{O}+\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{O}$ για καθε $\mathbf{x} \in V$.

5. Για καθε $\mathbf{x}$ του V υπαρχει ενα στοιχειο $-\mathbf{x}$ του V ετσι ωστε $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=(-\mathbf{x})+\mathbf{x}=\mathbf{O}$.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι το συνολο των λυσεων $(x_1,\ldots,x_n)$ ενος ομογενους γραμμικου συστηματος m εξισωσεων με n αγνωστους αποτελει R-διανυσματικο χωρο.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι το συνολο $M_R(m,n)$ των mxn πραγματικων μητρων $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$ ειναι διανυσματικος χωρος με προσθεση και πολλαπλασιασμο αντιστοιχα :

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn} \end{bmatrix} \qquad \lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_{11} & \cdots & \lambda\alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda\alpha_{m1} & \cdots & \lambda\alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Ο διανυσματικος χωρος R^n αποτελει το ευρυτερο συνολο μεσα στο οποιο περιεχονται οι λυσεις του συστηματος (1). Οταν το (1) ειναι ομογενες τοτε συμφωνα με την ασκηση-1 το συνολο V των λυσεων του ειναι μη κενο υποσυνολο του R^n και ταυτοχρονα R-διανυσματικος χωρος. Τετοια υποσυνολα του R^n λεγονται ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ ή απλως ΥΠΟΧΩΡΟΙ του R^n . Ακριβεστερα λεμε διανυσματικο υποχωρο του R-διανυσματικου χωρου V ενά μη κενο υποσυνολο του που ικανοποιει επισης τα 10 προηγουμενα αξιωματα. Π.χ το $E = \{(x_1,x_2,0) \mid x_1,x_2 \in R\}$ ειναι υποχωρος του R^3.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι το μη κενο υποσυνολο B του διανυσματικου χωρου A ειναι διανυσματικος υποχωρος αυτου, τοτε και μονον οταν ισχυουν οι δυο συνθηκες :

α) $\mathbf{x},\mathbf{y} \in B$ συνεπαγεται οτι και $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in B$ και

β) $\mathbf{x} \in B$, $\lambda \in R$ συνεπαγεται οτι $\lambda\mathbf{x} \in B$.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε οτι οι δυο προηγουμενες ιδιοτητες ισοδυναμουν με την ιδιοτητα :

" για καθε $\lambda,\mu \in R$ και καθε $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in B$ επεται $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y} \in B$"

ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι το συνολο των πραγματικων συνεχων συναρτησεων του R στον εαυτο του ειναι R-διανυσματικος χωρος. Δειξε ακομη οτι το C^1 υποσυνολο των συναρτησεων που εχουν παντου πρωτη παραγωγο ειναι υποχωρος του προηγουμενου που συμβολιζεται με C^0.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι η τομη οσωνδηποτε διανυσματικων υποχωρων ενος R-διανυσματικου χωρου V ειναι παλι υποχωρος του V. Βρες την τομη <u>ολων</u> των υποχωρων ενος διανυσματικου χωρου V.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Καθε μια απο τις επομενες εξισωσεις οριζει και ενα υποσυνολο του R^3. Εξετασε ποιο απ αυτα ειναι υποχωρος του R^3.

α) $x_1=x_2$ β) $x_1=x_2+1$ γ) $x_1x_2=0$ δ) $x_1=1$

ε) $x_1<x_2$ ε) $x_1+x_2^2=0$ ζ) $x_1^2+x_2^2=-5$ η) $x_1^2+x_2^2=0$

§6 K-ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Ετσι λεγεται ενα μη κενο συνολο V που πληροι τα αξιωματα του διανυσματικου χωρου της προηγουμενης παραγραφου οπου ομως οι σταθερες με τις οποιες πολλαπλασιαζουμε τα διανυσματα ανηκουν σ ενα ορισμενο ΣΩΜΑ K οπως λ.χ K=C το σωμα των μιγαδικων, K=Q το σωμα των ρητων. Το κυριωτερο παραδειγμα ενος K-διανυσματικου χωρου ειναι ο

$$K^n = \text{συνολο ολων των n-δων } (x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ του } K.$$

Ειδικη περιπτωση ειναι ο R^n με K=R, ο C^n , και ο Q^n. Υπαρχουν επισης πεπερασμενα σωματα K ετσι ωστε ο K^n ειναι πεπερασμενο συνολο.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι το συνολο των mxn μητρων $M_K(m,n)$ με στοιχεια απο το σωμα K αποτελει K-διανυσματικο χωρο.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι το συνολο A_K των ακολουθιων $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)$ του K αποτελει K-διανυσματικο χωρο με προσθεση $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n,\ldots)$ και πολ/μο $\lambda\mathbf{x}=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n,\ldots)$.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Εστω V K-διανυσματικος χωρος και $\Lambda \subset K$ υποσωμα του K. Δειξε οτι ο V ειναι ταυτοχρονα και Λ-διαν/κος χωρος.

ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟ των διανυσματων $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ του K-διανυσματικου χωρου V λεμε καθε διανυσμα $\mathbf{a}$ του V που γραφεται σαν

$$\mathbf{a}=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ \ldots\ +\lambda_n\mathbf{a}_n \quad \text{με} \quad \lambda_1,\ldots,\lambda_n\in K.$$

Το συνολο των γραμμικων αυτων συνδυασμων αποτελει ενα K-διανυσματικο χωρο που συμβολιζουμε με $\langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n\rangle$. Τουτος ειναι ενας K-υποχωρος του V. Δηλαδη, εξ ορισμου, ενα μη κενο υποσυνολο του V που ειναι ταυτοχρονα K-διανυσματικος χωρος ως προς την προσθεση και τον πολλαπλασιασμο που οριζεται στο V.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε οτι το υποσυνολο U του K-διανυσματικου χωρου V ειναι K-υποχωρος του V τοτε και μονον οταν ισχυει:

" για καθε $\lambda,\mu\in K$ και καθε $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ επεται $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}\in V$ "

ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι το συνολο A_R^o των μηδενικων πραγματικων ακολουθιων $(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ ειναι R-υποχωρος του A_R.

Τα διανυσματα $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ του K-διανυσματικου χωρου V λεγονται γραμμικα ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ οταν η εξισωση

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\ \ldots+\lambda_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0} \quad \text{συνεπαγεται} \quad \lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0.$$

Στην περιπτωση που $V=R^m$ μπορουμε να διαπιστωσουμε την ανεξαρτησια των $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ λυνοντας ενα ομογενες συστημα. Πραγματι αν

$$\mathbf{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}) \text{ για } i=1,2,\ldots,n.$$

τοτε η προηγουμενη εξισωση ισοδυναμει με το συστημα των εξισωσεων:

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \ldots + \lambda_n a_{1n} &= 0 \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_n a_{2n} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \ldots + \lambda_n a_{mn} &= 0. \end{aligned}$$

Παρομοια η ερωτηση, αν και με ποσους τροπους γραφεται το $\mathbf{b} \in R^m$ σαν γραμμικος συνδυασμος των $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, οδηγει στο συστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_n a_{1n} &= b_1 \\ \lambda_1 a_{21} + \ldots + \lambda_n a_{2n} &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 a_{m1} + \ldots + \lambda_n a_{mn} &= b_m \end{aligned}$$

Π.χ. Να εξετασθη αν το (3,2,1,5) ειναι γραμμικος συνδυασμος των (1,2,3,3), (1,2,0,3) και (1,1,1,2). Το ερωτημα ισοδυναμει με το "ποσες και ποιες ειναι οι λυσεις του συστηματος":

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 3 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 2 \\ 3\lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 5 \end{aligned}$$

Λυνω το συστημα αναγοντας το σε ισοδυναμο κλιμακωτο :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \gamma_2 \to \gamma_2 - 2\gamma_1 \\ \gamma_3 \to \gamma_3 - 3\gamma_1 \\ \gamma_4 \to \gamma_4 - 3\gamma_1 \\ \text{δινει} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \gamma_3 \leftrightarrow \gamma_2 \\ \text{δινει} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \gamma_2 \to -\frac{1}{3}\gamma_2 \\ \gamma_4 \to \gamma_4 - \gamma_3 \\ \gamma_3 \to -\gamma_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 8/3 \\ 4 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \gamma_1 \to \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 \\ \gamma_2 \to \gamma_2 - \frac{2}{3}\gamma_3 \\ \text{δινει τελος} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

αρα $\lambda_1 = -11/3$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 4$ η ζητουμενη λυση.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Εξετασε αν το διανυσμα (0,0,0,1) ειναι γραμμικος συνδυασμος των (1,2,3,3), (1,2,0,3) και (1,1,1,2).

ΑΣΚΗΣΗ-7 Εστω $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ διανυσματα του K-διανυσματικου χωρου V. Δειξε οτι $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \lambda\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ για καθε $\lambda \neq 0$ του K.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Με τα δεδομενα της προηγουμενης ασκησης δειξε οτι αν τα $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \langle \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$, τοτε $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle =$

$= \langle \mathbf{a}_{k+1},\dots,\mathbf{a}_n\rangle$.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Δειξε οτι η τομη οσωνδηποτε διανυσματικων υποχωρων ενος K-διανυσματικου χωρου V ειναι παλι διανυσματικος υποχωρος του V.

ΑΣΚΗΣΗ-10 Εστω $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$, $\mathbf{b}\in R^m$ τα διανυσματα με συντεταγμενες τις στηλες της μητρας του συστηματος (1). Δειξε οτι το (1) λυνεται, τοτε ακριβως οταν $\mathbf{b}\in\langle \mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\rangle$.

ΑΣΚΗΣΗ-11 Εστω $\mathbf{a}_1=(1,2,3,4,5)$, $\mathbf{a}_2=(1,0,1,0,5)$, $\mathbf{a}_3=(0,1,1,1,0)$ και $\mathbf{b}_1=(0,1,0,1,1)$, $\mathbf{b}_2=(0,2,1,0,1)$, $\mathbf{b}_3=(1,0,0,0,1)$. Προσδιορισε την τομη των υποχωρων του R^5:

$\langle \mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\rangle \cap \langle \mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\rangle$ λυνοντας την εξισωση :

$$x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3 = y_1\mathbf{b}_1+y_2\mathbf{b}_2+y_3\mathbf{b}_3$$

που διδει ομογενες συστημα με μητρα $\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&-1\\ 2&0&1&-1&-2&0\\ 3&1&1&0&-1&0\\ 4&0&1&-1&0&0\\ 5&5&0&-1&-1&-1 \end{bmatrix}$.

Επαληθευσε οτι η τομη αυτη συμπιπτει με τον $\langle \mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2\rangle$ καθως και με τον $\langle \mathbf{a}_2+3\mathbf{a}_3\rangle$.

ΑΣΚΗΣΗ-12 Δειξε οτι το R ειναι Q-διανυσματικος χωρος και οτι το 1 και $\sqrt{2}$ ειναι ανεξαρτητα διανυσματα.

ΑΣΚΗΣΗ-13 Εξετασε αν ειναι ανεξαρτητα τα διανυσματα (1,1,1,1,0), (1,0,2,0,0) και (1,1,0,0,1). Κατοπιν εξετασε αν το (2,2,3,4,2) γραφεται σαν γραμμικος συνδυασμος αυτων των διαν/των.

ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ λεγονται τα διανυσματα $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ του K-διανυσματικου χωρου V, οταν <u>δεν</u> ειναι ανεξαρτητα. Π.χ. τα (2,4) και (5,10) ειναι εξαρτημενα διανυσματα του R^2: $2(5,10)-5(2,4)=(0,0)$. Απο τον ορισμο των ανεξαρτητων διανυσματων επεται οτι

"$\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ εξαρτημενα" $\Longleftrightarrow$ " Η εξισωση $x_1\mathbf{a}_1+\dots+x_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$ εχει λυση διαφορετικη απο την τετριμμενη $x_1=x_2=\dots=x_n=0$ "

ΑΣΚΗΣΗ-14 Δειξε οτι τα $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ ειναι ανεξαρτητα, τοτε ακριβως, οταν καθε $\mathbf{b}$ απο το $\langle \mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\rangle$ γραφεται σαν γραμμικος συνδυασμος των $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ κατα ενα ακριβως τροπο. Δειξε επισης οτι τα $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ ειναι εξαρτημενα, τοτε ακριβως, οταν καποιο απ αυτα γραφεται σαν γραμμικος συνδυασμος των υπολοιπων.

Ειναι προφανες οτι οσα ειπαμε για συστηματα γραμμικων εξισωσεων, για αναγωγη σε κλιμακωτο, για αντιστοιχες μητρες, λυσεις κ.τ.λ. σχετικα με πραγματικους αριθμους, γενικευονται αυτολεξι στις αντιστοιχες εννοιες για αριθμους απο ενα οποιοδηποτε σωμα K. Τις mx1 μητρες με στοιχεια απο το K (δηλ. τα στοιχεια του $M_K(m,1)$) τις λεμε και <u>στηλοδιανυσματα</u> . Μια mxn μητρα με στοιχεια απο το K οριζει με τις στηλες της n στηλοδιανυσματα. Μια ενδιαφερουσα παρατηρηση ειναι η

ΠΡΟΤΑΣΗ Οι στοιχειωδεις μετασχηματισμοι γραμμων μιας μητρας $A \in M_K(m,n)$ δεν μεταβαλλουν την εξαρτηση ή ανεξαρτησια των στηλοδιανυσματων της.

Τουτο σημαινει οτι, αν η μητρα B προκυπτει απο την A με στοιχειωδεις μετασχηματισμους γραμμων (της A), τοτε τα στηλοδιανυσματα $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_n$ της B ειναι ανεξαρτητα/εξαρτημενα τοτε και μονον οταν τα στηλοδιανυσματα $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ της A ειναι ανεξαρτητα/εξαρτημενα. Η αποδειξη ειναι αμεση και στηριζεται στο γεγονος οτι η εξισωση

$$x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

εχει τις ιδιες ακριβως λυσεις με την

$$x_1\mathbf{b}_1 + \dots + x_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ-1 Ορισμενα στηλοδιανυσματα της μητρας $A \in M_K(m,n)$ ειναι ανεξαρτητα τοτε και μονον, οταν τα αντιστοιχα στηλοδιανυσματα της αναγμενης κλιμακωτης της ειναι ανεξαρτητα.

Σε μια κλιμακωτη μητρα οι δευτερευουσες στηλες ειναι γραμμικοι συνδυασμοι (αρα γραμμικα εξαρτημενες με τις) των κυριων στηλων. Τουτη η παρατηρηση αποδεικνυει το

ΠΟΡΙΣΜΑ-2 Μια μητρα $A \in M_K(m,n)$ εχει ανεξαρτητα στηλοδιανυσματα, τοτε και μονον οταν η αντιστοιχη κλιμακωτη της <u>δεν</u> εχει δευτερευουσες στηλες.

ΑΣΚΗΣΗ-15 Δειξε οτι στον K^n δεν υπαρχουν περισσοτερα απο n ανεξαρτητα διανυσματα.

ΑΣΚΗΣΗ-16 Δειξε οτι αν τα διανυσματα $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ του K-διανυσματικου χωρου V ειναι ανεξαρτητα τοτε και οποιαδηποτε k<n εξ αυτων ειναι ανεξαρτητα.

§7 ΒΑΣΗ, ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Βαση ενος K-διανυσματικου χωρου V λεμε ενα υποσυνολο του U, ετσι ωστε <u>καθε</u> διανυσμα $\mathbf{a}$ του V να γραφεται σαν γραμμικος συνδυασμος ορισμενων στοιχειων του U

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+\ldots+x_r\mathbf{u}_r \quad \text{κατα ενα και μονο τροπο.} \quad (*)$$

Π.χ. τα διανυσματα $\mathbf{e}_1=(1,0,\ldots,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1,0,\ldots,0)$, $\mathbf{e}_3=(0,0,1,\ldots,0)$ $\ldots$, $\mathbf{e}_n=(0,0,\ldots,1)$ αποτελουν μια βαση του K^n που λεγεται <u>κανονικη</u> βαση αυτου του χωρου.

Πραγματι το τυχον $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ αυτου του χωρου γραφεται προφανως

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$$

με ενα και μονο τροπο.

ΛΗΜΜΑ-1 Οσαδηποτε πεπερασμενα το πληθος στοιχεια μιας βασης U είναι γραμμικα ανεξαρτητα.

Πραγματι, αν τα $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_p$ στοιχεια του U δεν ηταν ανεξαρτητα, τοτε η εξισωση

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_p\mathbf{u}_p = \mathbf{0}$$

θα ειχε, συμφωνα με τον ορισμο της "εξαρτησης", εκτος της τετριμμενης λυσης $x_1=x_2=\ldots=x_p=0$ και μια ακομη διαφορετικη απ αυτη. Αρα το $\mathbf{0}$ θα γραφοταν με δυο τροπους σα γραμμικος συνδυασμος στοιχειων του U και θα ειχαμε αντιφαση στο (*). ο.ε.δ.

Γενικωτερα ενα υποσυνολο U του V που εχει την ιδιοτητα του λημματος το λεμε ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ. Επισης με <U> συμβολιζουμε το συνολο των πεπερασμενων γραμμικων συνδυασμων απο στοιχεια του U. Ισχυει το

ΛΗΜΜΑ-2 Το υποσυνολο U του K-διανυσματικου χωρου V ειναι βαση του V, τοτε και μονον οταν το U ειναι ανεξαρτητο και μεγιστο. Δηλαδη, δεν υπαρχει αλλο ανεξαρτητο υποσυνολο W του V που περιεχει το U.

Πραγματι, αν το U ειναι βαση τοτε $\langle U\rangle=V$, αρα δεν υπαρχει στοιχειο του V που να μην γραφεται σαν γραμμικος συνδυασμος στοιχειων του U. Ειναι λοιπον το U μεγιστο ανεξαρτητο συνολο. Αντιστροφα αν το U ειναι μεγιστο ανεξαρτητο συνολο, τοτε το τυχον $\mathbf{x}$ του V θα γραφεται σαν γραμμικος συνδυασμος στοιχειων του U, διαφορετικα θα ηταν το $U\cup\{\mathbf{x}\}=W$ μεγαλυτερο απο το U ανεξαρτητο συνολο.

Οι K-διανυσματικοι χωροι χωριζονται σε δυο μεγαλες κατηγοριες.

Κατ αρχην αποδεικνυεται (με τη βοηθεια του λημματος του Zorn) οτι καθε διανυσματικος χωρος εχει μια βαση. Οι δυο κατηγοριες τωρα αποτελουνται απο τους 1) K-διανυσματικους χωρους που εχουν μια πεπερασμενη βαση και 2) K-διανυσματικους χωρους που εχουν βαση με απειρο πληθος διανυσματων. Στην πρωτη κατηγορια ανηκουν φυσικα οι K^n. Στην δευτερη κατηγορια ανηκει ο χωρος των ακολουθιων A_K, ο χωρος $K[x]$ των πολυωνυμων μιας μεταβλητης, χωροι συναρτησεων κ.α. Στα μαθηματα αυτα θα μελετησουμε χωρους της πρωτης κατηγοριας.

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ ειναι βαση του K-διανυσματικου χωρου V, τοτε και καθε αλλη βαση του V θα εχει το ιδιο πληθος στοιχειων n που λεγεται ΔΙΑΣΤΑΣΗ του V. Γραφουμε τοτε $n=\dim V$.

Πραγματι, εστω οτι υπαρχει μια αλλη βαση $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\dots,\mathbf{b}_k$ με $k>n$. Εκφραζουμε τα $\mathbf{b}_i$ σαν γραμμικους συνδυασμους των $\mathbf{a}_j$ οποτε προκυπτει η μητρα Λ :

$$\mathbf{b}_i=\lambda_{1i}\mathbf{a}_1+\ \dots\ +\lambda_{ni}\mathbf{a}_n \qquad \text{για } i=1,2,\dots,k.$$

Τοτε η εξισωση

$$x_1\mathbf{b}_1+x_2\mathbf{b}_2+\dots+x_k\mathbf{b}_k=\mathbf{0} \qquad \text{ισοδυναμει με την}$$

$$\sum_{i=1}^{k}x_i\Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}\mathbf{a}_j\Big)=\mathbf{0} \qquad \text{κι αυτη με την}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda_{ji}x_i\Big)\mathbf{a}_j=\mathbf{0} \qquad \text{κι αυτη, λογω της}$$

ανεξαρτησιας των $\mathbf{a}_j$, ισοδυναμει με το συστημα

$$\begin{aligned}
\lambda_{11}x_1 + \dots + \lambda_{1k}x_k &= 0\\
\lambda_{21}x_1 + \dots + \lambda_{2k}x_k &= 0\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\\
\lambda_{n1}x_1 + \dots + \lambda_{nk}x_k &= 0.
\end{aligned}$$

Το συστημα αυτο ομως, επειδη $k>n$, εχει παντοτε μη τετριμμενες λυσεις. (Το αναγμενο κλιμακωτο θα εχει οπωσδηποτε δευτερευουσες στηλες - δες πορισμα-2 , σελ. 16). Αρα τα $\mathbf{b}_i$ ειναι εξαρτημενα, ατοπον. Αρα πρεπει $k\leqslant n$. Αντιστρεφοντας το ρολο των $\mathbf{a}_j$ και $\mathbf{b}_i$ στην προηγουμενη αποδειξη, δειχνουμε με τον ιδιο τροπο οτι και $n\leqslant k$. Τελικα λοιπον, θα πρεπει να ισχυει $k=n$ ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι στο χωρο των mxn μητρων $M_K(m,n)$, οι μητρες E_{ij} με 1 στη διασταυρωση της i-γραμμης και j-στηλης και 0 σ ολες τις αλλες θεσεις αποτελουν μια βαση και $\dim M_K(m,n)=mn$.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι στο χωρο $K[x]$ των πολυωνυμων μιας μεταβλητης, το υποσυνολο $U=\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$ αποτελει βαση του $K[x]$.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι στο συνολο των ακολουθιων A_K, το υποσυνολο U που αποτελειται απο τις ακολουθιες $\mathbf{e}_i=(0,\ldots,1,0,\ldots)$ με 1 στην i-θεση και 0 σ ολες τις αλλες, ειναι ανεξαρτητο αλλα δεν αποτελει βαση του A_K.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Εστω V K-διανυσματικος χωρος πεπερασμενης διαστασης και $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ ανεξαρτητα διανυσματα του V. Δειξε οτι τα διανυσματα αυτα μπορουν να συμπληρωθουν σε μια βαση του V. Δηλαδη, υπαρχουν επι πλεον ανεξαρτητα διανυσματα $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_k$ ετσι ωστε, τα $\mathbf{a}_i$ μαζυ με τα $\mathbf{b}_j$ να αποτελουν βαση του V.

Στην περιπτωση του K^m εχουμε ενα πρακτικο τροπο να λυνουμε την προηγουμενη ασκηση. Πραγματι, αν θεωρησουμε την μητρα A που εχει στηλοδιανυσματα τα $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ τοτε, λογω της ανεξαρτησιας αυτων των διανυσματων η αναγμενη κλιμακωτη της A θα αποτελειται απο τις n πρωτες στηλες της μοναδιαιας μητρας I_m

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αν B ειναι λοιπον η αναγμενη κλιμακωτη της A, τοτε η B προκυπτει απο μετασχηματισμους των γραμμων της A και αντιστροφα η A προκυπτει απο την B κανοντας ορισμενους μετασχηματισμους στις γραμμες της B (τους αντιστροφους απ αυτους που αναγουν την A στη B). Υποβαλλοντας σ αυτους τους μετασχηματισμους οχι μονο την B, αλλα ολοκληρη την I_m, παιρνουμε μια mxm μητρα Γ της οποιας οι πρωτες n στηλες συμπιπτουν με τις $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ ενω οι υπολοιπες συμπληρωνουν τις $\mathbf{a}_i$ σε μια βαση του χωρου K^m. Ας κανω ενα παραδειγμα:

$\mathbf{a}_1=(0,0,1,1)$, $\mathbf{a}_2=(3,2,1,0)$. Η A ειναι τοτε η $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_4}{\Rightarrow}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_1}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{\gamma_2 \leftrightarrow \gamma_3}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \underset{\gamma_4 \to \gamma_4 - 3\gamma_2}{\overset{\gamma_3 \to \gamma_3 - 2\gamma_2}{\Rightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Οι αντιστροφοι μετασχηματισμοι, με τους οποιους παιρνουμε την A απο την B δινουν εφαρμοζομενοι στην I_4 :

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \begin{matrix}\gamma_3\to\gamma_3+2\gamma_2\\ \gamma_4\to\gamma_4+3\gamma_2\end{matrix} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&1&0\\0&3&0&1\end{bmatrix} \gamma_2\leftrightarrow\gamma_3 \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&0\\0&1&0&0\\0&3&0&1\end{bmatrix} \gamma_3\to\gamma_3+\gamma_1 \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&1&0\\1&1&0&0\\0&3&0&1\end{bmatrix}$$

$$\gamma_1\leftrightarrow\gamma_4 \begin{bmatrix}0&3&0&1\\0&2&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

της οποιας οι δυο πρωτες στηλες ειναι οι στηλες της A, ενω οι υπολοιπες συμπληρωνουν τις προηγουμενες σε μια βαση του R^4 .

ΑΣΚΗΣΗ-5 Συμπληρωσε τα (1,0,4,6), (0,2,0,1) σε μια βαση του R^4.

Απο τις προηγουμενες παραγραφους γνωριζω οτι το συνολο των λυσεων $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ ενος mxn ομογενους συστηματος με μητρα $A\in M_K(m,n)$, αποτελει εναν K-υποχωρο U του K^n . Ας εξετασουμε πιο προσεκτικα την αναγμενη κλιμακωτη (4) σελ.3 του A και ας προσπαθησουμε να βρουμε μια βαση του U. Εστω οτι η αναγμενη κλιμακωτη εχει:

στις θεσεις: $n_1<n_2<\dots<n_k$ τις κυριες στηλες της,

στις θεσεις: $\nu_1<\nu_2<\dots<\nu_\rho$ τις δευτερευουσες στηλες της.

($k+\rho=n$ = πληθος στηλων της A, m= πληθος γραμμων της A)

Ας ειναι επισης $(\tau_{1i},\tau_{2i},\dots,\tau_{ki},0,\dots,0)$ οι συντεταγμενες της ν_i-δευτερευουσας στηλης.

Απο την §2 γνωριζω οτι ολες οι λυσεις του κλιμακωτου ομογενους οριζονται παιρνοντας τις δευτερευουσες μεταβλητες αυθαιρετες

$$x_{\nu_1}=\lambda_1,\ x_{\nu_2}=\lambda_2,\ \dots,\ x_{\nu_\rho}=\lambda_\rho \qquad (+)$$

και λυνοντας ως προς τις κυριες μεταβλητες :

$$\begin{aligned} x_{n_1}&=-\tau_{11}\lambda_1-\dots-\tau_{1\rho}\lambda_\rho\\ &\vdots\\ x_{n_k}&=-\tau_{k1}\lambda_1-\dots-\tau_{k\rho}\lambda_\rho \end{aligned} \qquad (++)$$

Κοιταζοντας προσεκτικα αυτες τις λυσεις $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ βλεπουμε οτι γραφονται

$$\mathbf{x} = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \dots + \lambda_\rho\xi_\rho$$

οπου οι φυσικες συντεταγμενες των ξ_σ διδονται απο τους (+),(++):

$$\left.\begin{aligned} &\nu_\alpha\text{-συντεταγμενη}(\xi_\sigma) = 0 \text{ για } \alpha\neq\sigma,\ =1 \text{ για } \alpha=\sigma\\ &n_i\text{-συντεταγμενη}(\xi_\sigma) = -\tau_{i\sigma}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Τα $\xi_1,\dots,\xi_\rho$ αποτελουν βαση του U. Πραγματι καθε στοιχειο του U γραφεται σαν γραμμικος συνδυασμος αυτων των διανυσματων και επι πλεον τουτα ειναι ανεξαρτητα. Πραγματι, η εξισωση

$$\mathbf{x}=\mu_1\boldsymbol{\xi}_1+\ldots+\mu_\rho\boldsymbol{\xi}_\rho=\mathbf{0}$$

συνεπαγεται συμφωνα με την (**)

$$\nu_\alpha\text{-συντεταγμενη}(\mathbf{x}) = \mu_\alpha = 0 \quad \text{για} \quad \alpha=1,2,\ldots,\rho.$$

Για παραδειγμα το κλιμακωτο ομογενες με μητρα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

εχει $k=3$ και $\rho=4$ (τρεις κυριες και τεσσερις δευτερευουσες).

$$n_1=2 \ , \ n_2=4 \ , \ n_3=7$$

$$\nu_1=1 \ , \ \nu_2=3 \ , \ \nu_3=5 \ , \ \nu_4=6 \ .$$

Χρησιμοποιοντας γι αυτο τους προηγουμενους τυπους βρισκουμε $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,0,0,0,0,0)$, $\boldsymbol{\xi}_2=(0,-2,1,0,0,0,0)$, $\boldsymbol{\xi}_3=(0,-1,0,-1,1,0,0)$ και $\boldsymbol{\xi}_4=(0,0,0,0,0,1,0)$.

Απο τα προηγουμενα ειναι φανερο οτι το ρ ειναι ακριβως η διασταση του υποχωρου U των λυσεων του ομογενους συστηματος. Αρα ισχυει

ΘΕΩΡΗΜΑ Η διασταση του υποχωρου U του K^n των λυσεων ενος ομογενους συστηματος με μητρα $A \in M_K(m,n)$ ισουται με $\rho=n-k$, οπου k η ταξη της αντιστοιχης κλιμακωτης της A. Επισης το k ισουται με την διασταση του υποχωρου του K^m που παραγεται απο τα στηλοδιανυσματα της A .

Ο τελευταιος ισχυρισμος του θεωρηματος δεν ειναι παρα μια εφαρμογη του πορισματος-1 σελ.16.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Προσδιορισε μια βαση του υποχωρου των λυσεων του ομογενους συστηματος με μητρα
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Ο Δασκαλος ειπε: Οποιον δεν κοπιαζει πανω στην προσπαθεια δεν τον βοηθω να παει μπροστα. Σ οποιον δεν αγωνιζεται να εκφρασθη, δεν φανερωνω τροπους εκφρασης. Οταν δειξω μια γωνια και δεν μπορει να το επαναλαβει στις αλλες τρεις, δεν το επαναλαμβανω.

Κουνγκ Φου Ντσι

§8 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Ετσι ονομαζονται απεικονισεις μεταξυ διανυσματικων χωρων που "σεβονται" την δομη τους. Συγκεκριμενα, η απεικονιση $F : V_1 \longrightarrow V_2$ μεταξυ δυο Κ-διανυσματικων χωρων λεγεται ΓΡΑΜΜΙΚΗ οταν ισχυει:

$$F(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})=\lambda F(\mathbf{x})+\mu F(\mathbf{y}) \quad \text{για καθε } \mathbf{x},\mathbf{y} \text{ του } V_1 \text{ και καθε } \lambda,\mu \text{ απο το } K. \qquad (*)$$

Η ιδιοτητα αυτη της F επιτρεπει τον αμεσο καθορισμο της εικονας $F(\mathbf{x})$ του τυχοντος $\mathbf{x}$ του V_1, οταν γνωριζουμε τις εικονες $F(\mathbf{a})$ των διανυσματων $\mathbf{a}$ μιας βασης του V_1. Πραγματι το τυχον $\mathbf{x}$ θα γραφεται σαν γραμμικος συνδυασμος διανυσματων της βασης

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n\mathbf{a}_n ,$$

οποτε

$$F(\mathbf{x}) = \lambda_1 F(\mathbf{a}_1) + \dots + \lambda_n F(\mathbf{a}_n) .$$

Τυπικο παραδειγμα γραμμικης απεικονισης ειναι αυτη που οριζεται μεσω μιας mxn μητρας $A \in M_K(m,n)$ και συμβολιζεται με $F_A : K^n \longrightarrow K^m$:

Το $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_m) = F(\mathbf{x})$ οριζεται απο τις

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{aligned}$$

Αντι του F_A χρησιμοποιειται συνηθως ο συμβολισμος $\mathbf{y}= A\mathbf{x}$.
Ευκολα βλεπουμε οτι καθε γραμμικη $F : K^n \longrightarrow K^m$ ειναι της μορφης $F=F_A$ για μια καταλληλη μητρα A. Πραγματι, εστω A η μητρα που εχει στηλοδιανυσματα τα $F(\mathbf{e}_1),F(\mathbf{e}_2),\dots,F(\mathbf{e}_n)$, συμβολικα:

$$A=(F(\mathbf{a}_1),\dots,F(\mathbf{a}_n)) \in M_K(m,n).$$

Τα $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ συμβολιζουν τα διανυσματα της κανονικης βασης του K^n . Διαπιστωνουμε αμεσως οτι $F(\mathbf{x})=A\mathbf{x}=F_A(\mathbf{x})$ για καθε $\mathbf{x}$ του K^n.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Εστω $F : V_1 \longrightarrow V_2$ γραμμικη απεικονιση μεταξυ Κ-διανυσματικων χωρων. Δειξε οτι :

α) Για καθε υποχωρο U του V_1 το συνολο F(U) ειναι υποχωρος του V_2.

β) Για καθε υποχωρο U του V_2 το συνολο $F^{-1}(U)$ ειναι υποχωρος του V_1.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι, δυο γραμμικες απεικονισεις F_1,F_2 μεταξυ δυο Κ-διανυσματικων χωρων V_1,V_2 που εχουν $F_1(\mathbf{a})=F_2(\mathbf{a})$ για καθε διανυσμα $\mathbf{a}$ μιας βασης του V_1, ταυτιζονται: $F_1=F_2$.

Δοθησης γραμμικης $F:V_1 \longrightarrow V_2$ μεταξυ K-διανυσματικων χωρων υπαρχουν δυο αξιοσημειωτοι υποχωροι συνδεδεμενοι με ιδιοτητες της F:

α) Ο πυρηνας της F: $\mathrm{Kern}F = \{\mathbf{x} \in V_1 | F(\mathbf{x})=\mathbf{O}\}=F^{-1}(\{\mathbf{O}\}) \subset V_1$.

β) Η εικονα της F : $\mathrm{Im}F = F(V_1) \subset V_2$.

Ισχυει: $\mathrm{Kern}F=\{\mathbf{O}\}$ τοτε και μονον οταν η F ειναι 1-1. Πραγματι, $F(\mathbf{x}_1)=F(\mathbf{x}_2)$ συνεπαγεται λογω της γραμμικοτητας της F, $F(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)=\mathbf{O}$. Αρα $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$ ανηκει στο KernF. Αν λοιπον $\mathrm{Kern}F=\{\mathbf{O}\}$, τοτε $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2$. Αντιστροφα, αν $\mathbf{x}$ ανηκει στο KernF και η F ειναι 1-1, τοτε επειδη $F(\mathbf{O})=\mathbf{O}$, θα πρεπει $\mathbf{x} = \mathbf{O}$. ο.ε.δ.

Η διασταση του υποχωρου ImF του V_2, λεγεται ΤΑΞΗ της F.

Στην περιπτωση μιας απεικονισης $F=F_A:K^n \longrightarrow K^m$ ορισμενα πορισματα μας αποκτουν ενα νεο νοημα π.χ.

Η $\mathrm{Im}F_A=\langle \mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\rangle$, οπου $\mathbf{a}_i$ ειναι τα στηλοδιανυσματα της A.

$\mathrm{Kern}F_A$= Συνολο των λυσεων του ομογενους συστηματος με μητρα A.

Ταξη της $F_A= \dim\langle \mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\rangle$ =ταξη της αντιστοιχης κλιμακωτης της A.

$$\dim(\mathrm{Kern}F_A)+\dim(\mathrm{Im}F_A) = n \qquad (7)$$

Η τελευταια σχεση δεν ειναι παρα μεταφραση του θεωρηματος της §7.

Το συστημα γραμμικων εξισωσεων (1) ισοδυναμει με την εξισωση

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \ .$$

Τουτη παλι σημαινει τον προσδιορισμο του υποσυνολου $F_A^{-1}(\{\mathbf{b}\})$ του K^n.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι το συνολο των λυσεων της εξισωσης $F(\mathbf{x})=\mathbf{b}$, οπου $F:V_1 \rightarrow V_2$ γραμμικη απεικονιση, ισουται με

$$\mathbf{x}_o + \mathrm{Kern}F =\{\mathbf{x}_0+\mathbf{y} | \mathbf{y} \in \mathrm{Kern}F\}$$

οπου $\mathbf{x}_o$ μια ειδικη λυση της εξισωσης αυτης.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Εστω B η αναγμενη κλιμακωτη της mxn μητρας A. Δειξε οτι το γραμμικο συστημα με επηυξημενη μητρα A λυνεται, τοτε ακριβως, οταν η τελευταια στηλη της B δεν ειναι κυρια. Οταν συμβαινει το τελευταιο, τοτε η τελευταια στηλη της B ειναι μια ειδικη λυση του συστηματος.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Προσδιορισε το συνολο των λυσεων του συστηματος με επηυξημενη $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι το συνολο των 2x2 μητρων B που μετατιθενται (AB=BA) με την $A= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ αποτελει διανυσματικο υποχωρο U του $M_R(2,2)$. Προσδιορισε μια βαση του U.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Εστω $n_1<n_2<\ldots<n_k$ οι θεσεις στις οποιες η αναγμενη κλιμακωτη της mxn μητρας A εχει τις κυριες στηλες της. Δειξε οτι τα στηλοδιανυσματα $\mathbf{a}_{n_1},\ldots,\mathbf{a}_{n_k}$ ειναι βαση του $\mathrm{Im}F_A$.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Για την γραμμικη $F:R^3 \longrightarrow R^3$ ξερω οτι απεικονιζει: το (1,0,0) στο (1,1,2), το (0,1,0) στο (1,2,2) και το (0,0,1) στο (2,2,0). Ζητω το F((-1,15,20)). Επισης να εξετασθη ποσες και ποιες ειναι οι λυσεις της εξισωσης $F(\mathbf{x})=(0,1,0)$.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Εστω n=2k και $F:R^n \longrightarrow R^n$ η απεικονιση με

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots,x_{2k-1},x_{2k}) = (-x_2,x_1,-x_4,x_3,\ldots,-x_{2k},x_{2k-1}).$$

Ποια ειναι η μητρα A, ετσι ωστε $F=F_A$;

ΑΣΚΗΣΗ-10 Βρες βασεις των υποχωρων $\mathrm{Im}F_A$ και $\mathrm{Kern}F_A$ και επαληθευσε την (7) για τις μητρες :

α) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&1&2&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix}0&\alpha&\beta\\-\alpha&0&\gamma\\-\beta&-\gamma&0\end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ δ) $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ-11 Υπαρχει γραμμικη απεικονιση F με ImF=KernF; Δωσε παραδειγμα. Δειξε οτι δεν υπαρχει τετοια $F:K^n \longrightarrow K^n$ οταν το n ειναι περιττο.

ΑΣΚΗΣΗ-12 Δειξε οτι αν μια γραμμικη απεικονιση $F:K^n \longrightarrow K^n$ ειναι 1-1 , τοτε ειναι και επι και αντιστροφως.

ΑΣΚΗΣΗ-13 Δειξε οτι το συνολο των γραμμικων απεικονισεων $F:V_1 \longrightarrow V_2$ μεταξυ δυο K-διανυσματικων χωρων ειναι ενας K-διανυσματικος χωρος $L(V_1,V_2)$ με πραξεις $(F_1+F_2)(\mathbf{x})=F_1(\mathbf{x})+F_2(\mathbf{x})$ και $(\lambda F)(\mathbf{x})=\lambda F(\mathbf{x})$.

ΑΣΚΗΣΗ-14 Ας ειναι V_1,V_2 K-διανυσματικοι χωροι με πεπερασμενες διαστασεις n και m αντιστοιχως. Εστω $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ βαση του V_1 και $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_m$ βαση του V_2. Για i=1,2,...,n και j=1,2,...,m οριζω τις γραμμικες απεικονισεις F_{ji} καθοριζοντας τις τιμες τους στα διανυσματα της βασης ως εξης:

$$F_{ji}(\mathbf{a}_k) = \mathbf{0} \quad \text{αν} \quad k\neq i \quad \text{και}$$

$$F_{ji}(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_j \ .$$

Δειξε οτι οι nm απεικονισεις $\{F_{ji} \mid i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m\}$ αποτελουν βαση του $L(V_1,V_2)$.

§9 ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΜΗΤΡΩΝ

Η συνθεση γραμμικων απεικονισεων μεταξυ K-διανυσματικων χωρων ειναι παλι γραμμικη απεικονιση. Πραγματι, αν $F:V_1 \longrightarrow V_2$ και $G:V_2 \longrightarrow V_3$ ειναι γραμμικες απεικονισεις και $\mathbf{x},\mathbf{y}$ διανυσματα του V_1, λ,μ στοιχεια του K τοτε ισχυει

$$\begin{aligned}(G\circ F)(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) &= G(\lambda F(\mathbf{x})+\mu F(\mathbf{y})) && \text{(γραμμικοτητα της F)}\\ &=\lambda G(F(\mathbf{x}))+\mu G(F(\mathbf{y})) && \text{(γραμμικοτητα της G)}\\ &= \lambda(G\circ F)(\mathbf{x})+\mu(G\circ F)(\mathbf{y})\end{aligned}$$

που φανερωνει οτι η $G\circ F : V_1 \longrightarrow V_3$ ειναι γραμμικη απεικονιση.
Στην περιπτωση γραμμικων απεικονισεων $F_A: K^n \longrightarrow K^m$ και $F_B:K^m \longrightarrow K^p$ που οριζονται απο τις μητρες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{p1} & \cdots & b_{pm}\end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} & K^m \arrow[dr, "F_B"] & \\ K^n \arrow[ur, "F_A"] \arrow[rr, "F_C"'] & & K^p \end{tikzcd}$$

η συνθεση $F_C = F_B\circ F_A$ διδεται απο την μητρα C:

$$\begin{bmatrix} (b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\dots+b_{1m}a_{m1}), & (b_{11}a_{12}+\dots+b_{1m}a_{m2}),\dots, & (b_{11}a_{1n}+\dots+b_{1m}a_{mn})\\ (b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}+\dots+b_{2m}a_{m1}), & (b_{21}a_{12}+\dots+b_{2m}a_{m2}),\dots, & (b_{21}a_{1n}+\dots+b_{2m}a_{mn})\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ (b_{p1}a_{11}+b_{p2}a_{21}+\dots+b_{pm}a_{m1}), & (b_{p1}a_{12}+\dots+b_{pm}a_{m2}),\dots, & (b_{p1}a_{1n}+\dots+b_{pm}a_{mn}) \end{bmatrix}$$

Τη μητρα αυτη συμβολιζουμε με $C=BA$ και ονομαζουμε ΓΙΝΟΜΕΝΟ των B και A. Προσεχουμε οτι για να οριζεται αυτο το γινομενο πρεπει:

Πληθος στηλων της B = m = Πληθος γραμμων της A.

Με τον συμβολισμο της προηγουμενης παραγραφου η C δεν ειναι αλλη απο την μητρα με στυλοδιανυσματα

$$C = (B\mathbf{a}_1, B\mathbf{a}_2, \dots, B\mathbf{a}_n) \tag{8}$$

οπου $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ τα στυλοδιανυσματα της A και $B\mathbf{a}$ ειναι το γινομενο μητρων:

$$B\mathbf{a} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{p1} & \cdots & b_{pm}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_1+\dots+b_{1m}a_m\\ \vdots\\ b_{p1}a_1+\dots+b_{pm}a_m\end{bmatrix}$$

Για την $B\in M_K(p,m)$ και $A\in M_K(m,n)$ το γινομενο $C=BA \in M_K(p,n)$ και οπως φαινεται παραπανω τα στοιχεια c_{ij} της C διδονται απο την

$$c_{ij}=b_{i1}a_{1j}+b_{i2}a_{2j}+\dots+b_{im}a_{mj}\ , \quad \text{για } i=1,\dots,p,\ j=1,\dots,n \tag{9}$$

Απο τον ορισμο του γινομενου επεται και η ισοτητα

$$F_B \circ F_A = F_{BA} \tag{10}$$

Μητρες συνδεονται αμεσα με γραμμικες απεικονισεις και το γινομενο μητρων με την συνθεση απεικονισεων. Για μητρες A,B,Γ διαστασεων $m\times n, p\times m$ και $r\times p$ αντιστοιχα ισχυει η προσεταιριστικη ιδιοτητα

$$\Gamma(BA) = (\Gamma B)A\ .$$

Τουτη συναγεται αμεσως με υπολογισμο, βασει της (9) ή απο την (10) και την αντιστοιχη ιδιοτητα για απεικονισεις $F_\Gamma\circ(F_B\circ F_A)=(F_\Gamma\circ F_B)\circ F_A$.

Ιδιαιτερο ενδιαφερον παρουσιαζουν οι "τετραγωνικες" $n\times n$ μητρες και απ αυτες οι ονομαζομενες ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΕΣ. Η $A\in M_K(n,n)$ λεγεται αντιστρεψιμη, οταν υπαρχει μια μητρα $B\in M_K(n,n)$ με την ιδιοτητα

$$AB = BA = I_n$$

οπου η I_n η ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ $n\times n$ μητρα :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 \end{bmatrix}.$$

Την B συμβολιζουμε με $B=A^{-1}$ και ονομαζουμε ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ της A. Αντιστρεψιμες μητρες οριζουν ισομορφισμους του K^n. Γενικωτερα μια γραμμικη απεικονιση $F:V_1\longrightarrow V_2$ λεγεται ισομορφισμος, οταν ειναι 1-1 και επι. Τοτε υπαρχει η αντιστροφη απεικονιση $F^{-1}:V_2\longrightarrow V_1$ και ειναι κι αυτη γραμμικη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Ολοι οι K-διανυσματικοι χωροι διαστασης n ειναι ισομορφοι μεταξυ τους.

Πραγματι, για ενα τετοιο χωρο V αν διαλεξουμε μια βαση $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ τοτε η γραμμικη απεικονιση που στελνει το $\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\dots+x_n\mathbf{a}_n$ στο $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ οριζει ενα ισομορφισμο

$$S_{\mathbf{a}}: V\longrightarrow K^n\ .$$

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι η συνθεση δυο ισομορφισμων ειναι παλι ισομορφισμος. Δειξε οτι "V_1 ισομορφικος προς τον V_2" ειναι μια σχεση ισοδυναμιας στο συνολο των K-διανυσματικων χωρων.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι το γινομενο AB δυο αντιστρεψιμων μητρων ειναι παλι αντιστρεψιμη μητρα και $(AB)^{-1}=(B^{-1})(A^{-1})$.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Πολλαπλασιασε με ολους τους δυνατους τροπους τις μητρες: α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ δ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε με τη βοηθεια της τελευταιας ασκησης της προηγουμενης παραγραφου οτι για δυο K-διανυσματικους χωρους V_1 και V_2 διαστασεων n και m αντιστοιχως, ισχυει: Ο χωρος $L(V_1,V_2)$ των γραμμικων απεικονισεων του V_1 στον V_2, ειναι ισομορφος με το χωρο των μητρων $M_K(m,n)$.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Για μια μητρα A του $M_K(m,n)$ οριζεται η ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΣ $A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ που εχει στηλες τις γραμμες της A και γραμμες τις στηλες της A. Δειξε οτι η απεικονιση $A \longmapsto A^t$ οριζει ενα ισομορφισμο $(..)^t : M_K(m,n) \longrightarrow M_K(n,m)$.

Υπαρχουν ορισμενα κριτηρια με τα οποια μπορουμε να διαπιστωσουμε αν μια nxn μητρα A ειναι αντιστρεψιμη ή οχι :

ΛΗΜΜΑ-1 Η $A \in M_K(n,n)$ ειναι αντιστρεψιμη, τοτε και μονον οταν τα στηλοδιανυσματα της $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ ειναι ανεξαρτητα.

ΛΗΜΜΑ-2 Η $A \in M_K(n,n)$ ειναι αντιστρεψιμη, τοτε και μονον οταν η αναγμενη κλιμακωτη της ειναι η μοναδιαια μητρα I_n.

ΛΗΜΜΑ-3 Η $A \in M_K(n,n)$ ειναι αντιστρεψιμη, τοτε και μονον οταν το ομογενες συστημα $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ εχει μοναδικη λυση την τετριμμενη $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Οι αποδειξεις συναγονται αμεσως απο τα προηγουμενα. Πραγματι, για το λημμα-1 παρατηρουμε οτι η (7) συνεπαγεται

$$A \text{ αντιστρεψιμη} \Leftrightarrow \mathrm{Im}A=\langle \mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\rangle=K^n.$$

Το λημμα-2 ειναι συνεπεια του οτι τα $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ ειναι ανεξαρτητα τοτε και μονον οταν οι αντιστοιχες στηλες της αναγμενης κλιμακωτης ειναι ανεξαρτητες. Το λημμα-3 ειναι αμεση συνεπεια του λημματος-2.

Μια απλη παρατηρηση μας υπαγορευει ενα πρακτικο τροπο υπολογισμου της αντιστροφου. Αν συμβολισω με $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ τα στυλοδιανυσματα της αντιστροφου $B=A^{-1}$, τοτε τα διανυσματα αυτα ειναι λυσεις των μη ομογενων συστηματων

$$A\mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i \quad \text{οπου } i=1,2,..,n \qquad (*)$$

οπου $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ τα στηλοδιανυσματα της μοναδιαιας μητρας I_n. Παρατηρω λοιπον οτι ολα τα γραμμικα συστηματα (*) για i=1,...,n εχουν την ίδια μητρα A (αλλαζει για καθε i μονο η επηυξημενη). Αν λοιπον αναγω στην κλιμακωτη μορφη την επηυξημενη $(A/\mathbf{e}_i)$, η τελευταια στηλη της αναγμενης κλιμακωτης θα ειναι το $\mathbf{b}_i$ που ζητω (ασκηση-4 §8). Μπορω λοιπον να λυσω τα n συστηματα (*) ταυτοχρονως αναγωντας σε κλιμακωτη τη μητρα

$$(A|I_n)=\left[\begin{array}{cccc|cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Συμφωνα με την παρατηρηση η αναγμενη κλιμακωτη αυτης θα ειναι η μητρα $(I_n|B)$. Ας κανω ενα παραδειγμα : ας βρω την αντιστροφη της

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (A|I_n)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \gamma_2 \to \gamma_2+2\gamma_1 \\ \gamma_3 \to \gamma_3+4\gamma_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \gamma_2 \to \gamma_2/3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \gamma_1 \to \gamma_1-\gamma_2 \\ \gamma_3 \to \gamma_3-2\gamma_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 8/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \gamma_2 \to \gamma_2+\gamma_3 \\ \gamma_3 \to -\gamma_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8/3 & 2/3 & -1 \end{array}\right]$$

Αρα $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 0 \\ 10/3 & -1/3 & 1 \\ -8/3 & 2/3 & -1 \end{bmatrix}$.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Βρες την αντιστροφη των μητρων:

α) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ δ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ-7 Δειξε οτι για αντιστρεψιμη μητρα A ισχυει $(A^{-1})^{-1} = A$. Δωσε τρια παραδειγματα μητρων με $A^{-1}=A$.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Δειξε οτι αν $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ ειναι βαση του διανυσματικου χωρου V και ορισουμε τα διανυσματα $\mathbf{b}_i$ να ειναι

$$\mathbf{b}_j= \lambda_{1j}\mathbf{a}_1+\lambda_{2j}\mathbf{a}_2+ \dots +\lambda_{nj}\mathbf{a}_n \quad \text{για } j=1,\dots,n$$

τοτε τα $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_n$ ειναι παλι βαση, τοτε και μονον οταν η μητρα Λ των (λ_{ij}) ειναι αντιστρεψιμη.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Εστω $A \in M_K(n,n)$ αντιστρεψιμη μητρα και $B \in M_K(n,m)$. Δειξε οτι η A και η AB εχουν την ιδια ταξη.

§10 ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Εστω οτι $\mathbf{a}_1,..,\mathbf{a}_n$ και $\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_m$ ειναι βασεις των K-διανυσματικων χωρων V_1 και V_2 αντιστοιχα. Εστω και $F : V_1 \longrightarrow V_2$ γραμμικη απεικονιση. Χρησιμοποιωντας τους ισομορφισμους $S_{\mathbf{a}}$ και $S_{\mathbf{b}}$ που ορισθηκαν στην προηγουμενη παραγραφο, παιρνουμε το διπλανο μεταθετικο διαγραμμα απεικονισεων .

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "S_{\mathbf{a}}"'] & V_2 \arrow[d, "S_{\mathbf{b}}"] \\ K^n \arrow[r, "F_\Lambda"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$$F_\Lambda \circ S_{\mathbf{a}} = S_{\mathbf{b}} \circ F .$$

Η γραμμικη απεικονιση $F_\Lambda = S_{\mathbf{b}} \circ F \circ (S_{\mathbf{a}})^{-1}$ οριζεται απο την μητρα Λ της οποιας τα στυλοδιανυσματα $\boldsymbol{\lambda}_i$ ειναι οι συντεταγμενες των $F(\mathbf{a}_i)$ ως προς τη βαση $\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_m$:

$$F(\mathbf{a}_i) = \lambda_{1i}\mathbf{b}_1+\lambda_{2i}\mathbf{b}_2+...+\lambda_{mi}\mathbf{b}_m \quad \text{για } i=1,...,n.$$

Η mxn μητρα Λ λεγεται <u>μητρα παραστασης της F ως προς τις βασεις **a** και **b**.</u> Αν χρησιμοποιησουμε αλλες βασεις $\hat{\mathbf{a}}_1,...,\hat{\mathbf{a}}_n$ του V_1 και $\hat{\mathbf{b}}_1,...,\hat{\mathbf{b}}_m$ του V_2, τοτε προκυπτει το διπλανο διαγραμμα στο οποιο οι μητρες A και B λεγονται <u>μητρες αλλαγης βασης</u> οριζονται μεσω των γραμμικων απεικονισεων $F_A = S_{\mathbf{a}} \circ (S_{\hat{\mathbf{a}}})^{-1}$ και $F_B = S_{\mathbf{b}} \circ (S_{\hat{\mathbf{b}}})^{-1}$. Απο τον ορισμο τους οι μητρες A και B ικανοποιουν τις σχεσεις:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[rrr, "F_{\hat{\Lambda}}"] \arrow[ddd, "F_A"'] & & & K^m \arrow[ddd, "F_B"] \\ & V_1 \arrow[ul, "S_{\hat{\mathbf{a}}}"'] \arrow[r, "F"] \arrow[ddl, "S_{\mathbf{a}}"] & V_2 \arrow[ur, "S_{\hat{\mathbf{b}}}"] \arrow[ddr, "S_{\mathbf{b}}"'] & \\ & & & \\ K^n \arrow[rrr, "F_\Lambda"'] & & & K^m \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_i &= \alpha_{1i}\mathbf{a}_1+\alpha_{2i}\mathbf{a}_2+...+\alpha_{ni}\mathbf{a}_n \quad \text{για } i=1,2,..,n \\ \hat{\mathbf{b}}_j &= \beta_{1j}\mathbf{b}_1+\beta_{2j}\mathbf{b}_2+...+\beta_{mj}\mathbf{b}_m \quad \text{για } j=1,2,..,m. \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Το διαγραμμα ειναι μεταθετικο:

$$(S_{\hat{\mathbf{b}}})^{-1} \circ F_{\hat{\Lambda}} \circ S_{\hat{\mathbf{a}}} = F = (S_{\mathbf{b}})^{-1} \circ F_\Lambda \circ S_{\mathbf{a}}$$

αρα

$$F_{\hat{\Lambda}} = (F_B)^{-1} \circ F_\Lambda \circ F_A = F_{(B^{-1})} \circ F_\Lambda \circ F_A = F_{(B^{-1})\Lambda A}$$

αρα

$$\hat{\Lambda} = (B^{-1})\Lambda A . \qquad (11)$$

Γενικωτερα, δυο μητρες $\Lambda, \hat{\Lambda} \in M_K(m,n)$ λεγονται <u>ισοδυναμες</u> οταν υπαρχουν αντιστρεψιμες μητρες A,B ετσι ωστε να ισχυει η (11).

Η (11) λοιπον δειχνει οτι οι διαφορες παραστασεις της F ως προς τις διαφορες βασεις των V_1 και V_2 ειναι μητρες ισοδυναμες μεταξυ τους. Μπορουμε να δουμε οτι και αντιστροφα, αν δυο μητρες ειναι ισοδυναμες μεταξυ τους τοτε παριστουν μια και την αυτη γραμμικη απεικονιση ως προς διαφορετικες βασεις που συνδεονται μεταξυ τους με τις (*).

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι η ισοδυναμια μητρων (11) ειναι μια σχεση ισοδυναμιας στο συνολο $M_K(m,n)$.

Με την βοηθεια των <u>στοιχειωδων μητρων</u> που οριζονται παρακατω μπορουμε να τυποποιησουμε την διαδικασια αναγωγης σε κανονικη μορφη και να βρουμε ενα απλουστατο "αντιπροσωπο" για καθε κλαση ισοδυναμων μητρων. Πραγματι, στοιχειωδεις μητρες ονομαζουμε τις nxn μητρες

$$E_{ij} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0\ \ldots 0 \ldots 0 \\ 0\ 1\ 0\ \ldots 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 0 \quad 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \qquad E_i^{\lambda} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0\ \ldots 0 \\ 0\ 1\ 0\ \ldots 0 \\ 0\ 0\ 1\ \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0 . \lambda . . 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

$$E_{ij}^{+} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0\ 1 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 1 \ldots 1 . . 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 0 \ldots 1 . . 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \qquad E_{ij}^{-} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0\ 1 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 1 \ldots -1 . . 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 0 \ldots 1 . . 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Η E_{ij} προκυπτει απο την I_n εναλλασσοντας i- και j-γραμμες.

Η E_i^{λ} προκυπτει απο την I_n πολλαπλασιαζοντας την ι-γραμμη της με $\lambda \neq 0$.

Η E_{ij}^{+} (E_{ij}^{-}) προκυπτει απο την I_n προσθετοντας (αφαιρωντας) την j-γραμμη στην (απο την) i-γραμμη.

Εκτελωντας τον πολλαπλασιασμο μητρων με μια nxm μητρα A βλεπουμε οτι

$E_{ij}A$ = Μητρα που προκυπτει απο την A εναλλασσοντας i και j γραμμες.

$E_i^{\lambda}A$ = Μητρα που προκυπτει απο την A πολ/ντας την i-γραμμη της με λ.

$E_{ij}^{+}A$ ($E_{ij}^{-}A$) = Μητρα που προκυπτει απο την A προσθετοντας (αφαιρωντας) την j-γραμμη στην (απο την) i-γραμμη της.

Ετσι λοιπον, καθε στοιχειωδη μετασχηματισμο των γραμμων της A μπορουμε να τον παραστησουμε με EA οπου E καποια απο τις προηγουμενες στοιχειωδεις μητρες. Μ αυτο λοιπον τον τροπο η προταση της παραγραφου 4 διατυπωνεται ως εξης:

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Για καθε μητρα $A \in M_K(n,m)$ υπαρχουν στοιχειωδεις μητρες $E_1, E_2, \ldots, E_\tau \in M_K(n,n)$ ετσι ωστε το γινομενο μητρων

$$E_\tau E_{\tau-1} \ldots E_2 E_1 A = B$$

οπου B η ανηγμενη κλιμακωτη της A.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι οι στοιχειωδεις μητρες ειναι αντιστρεψιμες και συγκεκριμενα ισχυει:

$$E_{ij}E_{ij} = I_n \ , \quad E_i^\lambda E_i^{(1/\lambda)} = I_n \ , \quad E_{ij}^{+}E_{ij}^{-} = I_n \ .$$

ΑΣΚΗΣΗ-3 Προσδιορισε τις $E_1, \ldots, E_\tau$ της προτασης-1 στην περιπτωση του παραδειγματος αναγωγης της σελ. 10.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε οτι μια nxn μητρα ειναι αντιστρεψιμη τοτε και μονον, οταν ειναι γινομενο στοιχειωδων nxn μητρων.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι για καθε μητρα $A \in M_K(m,n)$ υπαρχει αντιστρεψιμη P ετσι ωστε PA=B, οπου B η ανηγμενη κλιμακωτη της A.

Τις στοιχειωδεις πραξεις που εκτελουμε μεταξυ των γραμμων μιας μητρας A μπορουμε να τις κανουμε και μεταξυ των στηλων της. Μαλιστα οι πραξεις αυτες τυποποιουνται με τις ιδιες στοιχειωδεις μητρες που ορισαμε προηγουμενως. Αυτη τη φορα ομως πολλαπλασιαζουμε την A απο τα δεξια (αντι απο τα αριστερα που καναμε προηγουμενως). Πραγματι εκτελωντας τους πολλαπλασιασμους μητρων βελπουμε οτι:

AE_{ij} = Μητρα που προκυπτει απο την A εναλλασσοντας i- και j-στηλες.

AE_i^λ = Μητρα που προκυπτει απο την A πολ/ντας την i-στηλη της με λ.

AE_{ij}^{+} (AE_{ij}^{-}) = Μητρα που προκυπτει απο την A προσθετοντας (αφαιρωντας) την i-στηλη στην (απο την) j-στηλη της.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι οι παραπανω στοιχειωδεις πραξεις μεταξυ των στηλων μιας μητρας A δεν αλλαζουν την ταξη της A. Δειξε γενικωτερα οτι η A και η AQ,οπου Q αντιστρεψιμη μητρα, εχουν την ιδια ταξη.

ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Καθε μητρα $A \in M_K(m,n)$ ειναι ισοδυναμη με μια μητρα της μορφης

$$I_{mn}^k = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & & & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow k\text{-γραμμη} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

k ειναι η ταξη της A.

Πραγματι, συμφωνα με την προταση-1 υπαρχουν στοιχειωδεις $E_1,\dots,E_\tau$ ετσι ωστε η ανηγμενη κλιμακωτη της A να ειναι

$$B = E_\tau E_{\tau-1}\dots E_2E_1A \quad .$$

Η B θα εχει k το πληθος κυριες στηλες και n-k δευτερευουσες που θα ειναι γραμμικοι συνδυασμοι των k κυριων στηλων της B. Τουτο συνεπαγεται οτι κανοντας στοιχειωδεις μετασχηματισμους των στηλων της B μπορουμε να την αναγουμε στην μορφη I^k_{mn} (π.χ. παρε την αναστροφη B^t και αναγαγε την σε κλιμακωτη με στοιχειωδεις μετασχηματισμους γραμμων της B^t που ειναι στοιχειωδεις μετασχηματισμοι στηλων της B). Επομενως υπαρχουν στοιχειωδεις nxn μητρες $F_1,\dots,F_\sigma$ ετσι ωστε:

$$I^k_{mn} = BF_1\dots F_\sigma = (E_\tau\dots E_1A)F_1\dots F_\sigma = PAQ$$

οπου οι P,Q ειναι οι αντιστρεψιμες μητρες $P=E_\tau\dots E_1, Q=F_1\dots F_\sigma$.
Οι A και I^k_{mn} ειναι λοιπον ισοδυναμες. ο.ε.δ.
Αμεση συνεπεια της προηγουμενης ειναι και η προταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ-3 Δυο μητρες $A,B\in M_K(m,n)$ ειναι ισοδυναμες τοτε και μονον, οταν εχουν την ιδια ταξη.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Θεωρησε τις γραμμες μιας μητρας $A\in M_K(m,n)$ σαν διανυσματα του K^n και τις στηλες της σαν διανυσματα του K^m. Δειξε οτι, k = ταξη της A = μεγιστο πληθος ανεξαρτητων στηλων της A = μεγιστο πληθος ανεξαρτητων γραμμων της A.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Δειξε οτι οι στοιχειωδεις πραξεις μεταξυ στηλων μιας μητρας δεν μεταβαλλουν την ταξη της.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Εστω $A\in M_K(n,n)$. Με την βοηθεια της A οριζεται η γραμμικη απεικονιση $P_A : M_K(n,m) \longrightarrow M_K(n,m)$ με $P_A(B)=AB$. Δειξε οτι η P_A ειναι ισομορφισμος τοτε και μονον, οταν η A ειναι αντιστρεψιμη.

ΑΣΚΗΣΗ-10 Εστω οτι V_1 και V_2 ειναι K-διανυσματικοι χωροι διαστασεων n και m αντιστοιχως. Εστω και $F : V_1 \longrightarrow V_2$ γραμμικη απεικονιση. Δειξε οτι υπαρχει βαση $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ του V_1 και βαση $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_m$ του V_2 ως προς τις οποιες η μητρα παραστασης της F ειναι η μητρα I^k_{mn}. Δειξε οτι για τις βασεις αυτες $F(\mathbf{a}_1)=\mathbf{b}_1,\dots,F(\mathbf{a}_k)=\mathbf{b}_k, F(\mathbf{a}_{k+1})=\mathbf{0},\dots,F(\mathbf{a}_n)=\mathbf{0}$. k=ταξη της F.

ΑΣΚΗΣΗ-11 Δειξε οτι η ανηγμενη κλιμακωτη της μητρας A ειναι μονοσημαντα ορισμενη.

§11 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Ετσι ονομαζουμε μια μια απεικονιση $F:V\times V \longrightarrow C$, οπου ο V ειναι C-διανυσματικος χωρος (μιγαδικος) και η F εχει τις ιδιοτητες:

α) Τα $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ και $F(\mathbf{y},\mathbf{x})$ ειναι συζηγεις μιγαδικοι αριθμοι.

β) Για σταθερο $\mathbf{y}$ η $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ειναι γραμμικη ως προς $\mathbf{x}$.

γ) Η F ειναι θετικα ορισμενη, δηλ $F(\mathbf{x},\mathbf{x})>0$ για καθε $\mathbf{x}$ του V και $F(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$ τοτε και μονον, οταν $\mathbf{x}=\mathbf{O}$.

Τυπικο παραδειγμα ειναι ο διανυσματικος χωρος C^n με το λεγομενο <u>κανονικο</u> εσωτερικο γινομενο $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ που οριζεται με την

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+ \ldots +x_n\bar{y}_n$$

Η παυλα συμβολιζει τον συζηγη μιγαδικο: $\zeta=\alpha+i\beta$ $\bar{\zeta}=\alpha-i\beta$.

Απο την α) και β) συμπεραινουμε οτι ως προς την δευτερη μεταβλητη:

$$F(\mathbf{x},a_1\mathbf{y}_1+a_2\mathbf{y}_2)=\bar{a}_1F(\mathbf{x},\mathbf{y}_1)+\bar{a}_2F(\mathbf{x},\mathbf{y}_2).$$

Για πραγματικους διανυσματικους χωρους οριζεται αναλογα το εσωτερικο γινομενο σαν μια απεικονιση $F : V\times V \longrightarrow R$ με τις ιδιοτητες:

α΄) $F(\mathbf{x},\mathbf{y})=F(\mathbf{y},\mathbf{x})$ γιά καθε $\mathbf{x},\mathbf{y}$ απο το V.

β) και γ) οπως και προηγουμενως.

Η α΄ σε συνδυασμο με την β συνεπαγεται παλι οτι το πραγματικο εσωτερικο γινομενο ειναι διγραμμικη απεικονιση, δηλαδη σταθεροποιωντας την μία μεταβλητη παιρνουμε μια γραμμικη απεικονιση ως προς την αλλη. Ενας μιγαδικος χωρος εφοδιασμενος με εσωτερικο γινομενο λεγεται <u>unitary</u>. Ενα εσωτερικο γινομενο που ικανοποιει τα α,β,γ λεγεται συχνα και <u>ερμιτιανο</u> εσωτερικο γινομενο. Ενας πραγματικος χωρος εφοδιασμενος με εσωτερικο γινομενο λεγεται ΕΥΚΛΕΙΔΙΟΣ. Ενα εσωτερικο γινομενο που ικανοποει τα α΄,β,γ λεγεται <u>ευκλειδιο</u> εσωτερικο γινομενο. Τυπικο παραδειγμα ειναι ο R^n με εσωτερικο γινομενο:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$$

Τουτο λεγεται <u>κανονικο</u> εσωτερικο γινομενο του R^n.

Το εσωτερικο γινομενο ειναι μια προσθετη δομη στο διανυσματικο χωρο που μας επιτρεπει να ορισουμε την εννοια του μηκους, της αποστασης και στην περιπτωση του ευκλειδιου χωρου ακομα και την εννοια της γωνιας. Αποδεικνυεται οτι τα σημεια ενος τρισδιαστατου ευκλειδιου χωρου πληρουν τα αξιωματα της ευκλειδιας γεωμετριας. Σ αυτο ακριβως οφειλεται και η ονομασια των ευκλειδιων χωρων που "γενικευουν την ευκλειδια γεωμετρια σε περισσοτερες διαστασεις". Στην παραγραφο αυτη θα ασχοληθω με ευκλειδιους χωρους. Κατ αρχην οι βασικες γεωμετρικες εννοιες:

Στα επομενα με V θα συμβολιζω ενα ευκλειδιο χωρο n διαστασεων και με $(\ldots,\ldots)$ το εσωτερικο του γινομενο. Οριζω:

<u>Μηκος</u> $|\mathbf{x}|$ του διανυσματος $\mathbf{x}$ τον αριθμο $|\mathbf{x}| = (\mathbf{x},\mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$

<u>Αποσταση</u> των $\mathbf{x},\mathbf{y}$ τον αριθμο $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$.

<u>Γωνια</u> των $\mathbf{x},\mathbf{y}$ (οταν και τα δυο ειναι $\neq \mathbf{O}$) την μονοσημαντα ορισμενη $\varphi \in [0,\pi]$ ετσι ωστε

$$\cos\varphi = (\mathbf{x},\mathbf{y})/(|\mathbf{x}||\mathbf{y}|)$$

Για να εχει νοημα ο τελευταιος ορισμος πρεπει να δειξω οτι

$$-1 \leq (\mathbf{x},\mathbf{y})/(|\mathbf{x}||\mathbf{y}|) \leq 1 \qquad \text{που ισοδυναμει με}$$

$$|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|. \tag{12}$$

Η τελευταια ανισοτητα λεγεται ανισοτητα του SCHWARZ και ισχυει διοτι για καθε $\mathbf{x},\mathbf{y}$ απο το V

$$0 \leq (\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y},\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda^2(\mathbf{x},\mathbf{x})+2\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{y},\mathbf{y})$$

Για να εχει το πολυωνυμο δεξια σταθερο προσημο πρεπει η διακρινουσα

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2-(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y}) \leq 0.$$

Τουτη ειναι ισοδυναμη με την (12). ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι $(\mathbf{x},\mathbf{y})=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$ τοτε και μονον, οταν τα $\mathbf{x},\mathbf{y}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενα.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε τις ιδιοτητες του μηκους:

1) $|\mathbf{x}| \geq 0$ και $|\mathbf{x}|=0$ μονον οταν $\mathbf{x}=\mathbf{O}$.
2) $|\lambda\mathbf{x}|=|\lambda||\mathbf{x}|$ για καθε $\mathbf{x}$ του V και λ του R.
3) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι για πραγματικους αριθμους $\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$ και $\beta_1,\ldots,\beta_\nu$ ισχυει

$$(\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu) \leq (\alpha_1^2+\ldots+\alpha_\nu^2)^{\frac{1}{2}}(\beta_1^2+\ldots+\beta_\nu^2)^{\frac{1}{2}}$$

Οταν $|\mathbf{x}|=1$ τοτε το $\mathbf{x}$ λεγεται ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ διανυσμα.

Οταν $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ τα διανυσματα $\mathbf{x},\mathbf{y}$ λεγονται ΚΑΘΕΤΑ η ορθογωνια μεταξυ τους. Στην περιπτωση του R^n με το κανονικο εσωτερικο γινομενο

$\mathbf{x} = 1$ ισοδυναμει με την $x_1^2+ \ldots +x_n^2 = 1$

$(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ ισοδυναμει με την $x_1y_1+ \ldots +x_ny_n = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε οτι τα μοναδιαια διανυσματα του R^2 με το κανονικο εσ. γιν. ειναι της μορφης $(\cos\varphi,\sin\varphi)$ με $\varphi \in [0,2\pi]$.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι η ιδιοτητα $(\mathbf{a},\mathbf{x})=0$ για καθε $\mathbf{x}$ του V, συνεπαγεται οτι $\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Στο R^n με το κανονικο εσωτερικο γινομενο,δειξε οτι για καθε nxn μητρα A με αναστροφο A^t ισχυει:

$$(A\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},A^t\mathbf{y}) \quad \text{για καθε } \mathbf{x},\mathbf{y} \text{ του } R^n.$$

ΑΣΚΗΣΗ-7 Εστω (...,...) το κανονικο εσωτερικο γινομενο του R^n και A αντιστρεψιμη πραγματικη nxn μητρα. Δειξε οτι

$$f_A(\mathbf{x},\mathbf{y})=(A\mathbf{x},A\mathbf{y})$$

οριζει ενα αλλο εσωτερικο γινομενο στον χωρο R^n. Γιατι <u>πρεπει</u> η A να ειναι αντιστρεψιμη;

ΑΣΚΗΣΗ-8 Δειξε οτι για αντιστρεψιμη nxn μητρα A και η αναστροφος A^t ειναι αντιστρεψιμη και $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$. Εστω οτι $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ ειναι τα στηλοδιανυσματα της nxn πραγματικης μητρας A. Δειξε οτι η μητρα B με στοιχεια $b_{ij}=(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)$ ειναι αντιστρεψιμη οταν η A ειναι αντιστρεψιμη και ισχυει η ισοτητα $B=A^tA$.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Εστω V χωρος διαστασης n με εσ. γιν. (..,..). Εστω οτι $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ ειναι βαση του V. Δειξε οτι η μητρα B με στοιχεια $b_{ij}=(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)$ ειναι αντιστρεψιμη. Δειξε οτι οι συντεταγμενες $x_1,\ldots,x_n$ του διανυσματος $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1+\ldots+x_n\mathbf{a}_n$ και τα εσωτερικα γινομενα $y_1=(\mathbf{x},\mathbf{a}_1)$, $y_2=(\mathbf{x},\mathbf{a}_2),\ldots$, $y_n=(\mathbf{x},\mathbf{a}_n)$ συνδεονται με την σχεση $B\mathbf{x}_o=\mathbf{y}$, οπου $\mathbf{x}_o=(x_1,..,x_n)$. Συμπερανε οτι για να γνωριζουμε ενα διανυσμα αρκει να ξερουμε τα εσωτερικα του γινομενα $(\mathbf{x},\mathbf{a}_i)$ με ολα τα διανυσματα μιας βασης του V.

ΑΣΚΗΣΗ-10 Προσδιορισε τις φυσικες συντεταγμενες του διανυσματος $\mathbf{x}$ του R^3 του οποιου το εσωτερικο γινομενο με τα διανυσματα (1,-1,1), (-1,1,0) και (0,1,-1) ειναι οι αριθμοι -2,7 και 5 αντιστοιχως.

ΑΣΚΗΣΗ-11 Προσδιορισε τις φυσικες συντεταγμενες του διανυσματος $\mathbf{x}$ του R^4 του οποιου το εσωτερικο γινομενο με τα διανυσματα (1,1,-1,1), (1,-1,1,1), (1,1,1,1) και (1,-1,-1,1) ειναι αντιστοιχα οι αριθμοι 1,2,3,4.

ΑΣΚΗΣΗ-12 Εστω V διανυσματικος χωρος με εσ.γιν.(..,..) Δειξε οτι το συνολο των διανυσματων του $\mathbf{x}$ που ειναι καθετα σε n διανυσματα $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ του V, αποτελει ενα υποχωρο του V. Τουτος λεγεται ορθογωνιο συμπληρωμα του $\langle\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\rangle=W$ και συμβολιζεται με $W^{\perp}$.

ΑΣΚΗΣΗ-13 Δοθεντων m διανυσματων του R^n

$\mathbf{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$ για $i=1,2,\ldots,m$

δειξε οτι το ορθογωνιο συμπληρωμα του $W=\langle\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m\rangle$ ως προς το κανονικο εσωτερικο γινομενο, προσδιοριζεται λυνοντας το ομογενες συστημα με μητρα A της οποιοας οι γραμμες ειναι οι συντεταγμενες των $\mathbf{a}_i$. Συμπερανε οτι $\dim(W^\perp)=n-k$, οπου k η ταξη της A.

ΑΣΚΗΣΗ-14 Με τα δεδομενα της προηγουμενης ασκησης δειξε οτι $W\cap W^\perp=\{\mathbf{O}\}$. Δειξε επισης οτι οταν τα $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m$ ειναι ανεξαρτητα, τοτε υπαρχει βαση $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_{n-m}$ των λυσεων του ομογενους συστηματος ετσι ωστε τα $\mathbf{a}_i$ μαζυ με τα $\mathbf{b}_j$ να αποτελουν βαση του R^n.

ΑΣΚΗΣΗ-15 Συμπληρωσε με τον τροπο της προηγουμενης ασκησης τα (1,1,1,0), (2,1,1,1) σε μια βαση του R^4.

ΑΣΚΗΣΗ-16 Προσδιορισε το ορθογωνια συμπληρωμα του υποχωρου του R^5 που παραγεται απο τα διανυσματα (1,0,1,0,1), (1,1,0,0,1) και (1,0,0,0,1).

Γενικωτερα απο τις προηγουμενες ασκησεις αν W ειναι διανυσματικος υποχωρος του χωρου V που ειναι εφοδιασμενος με εσωτερικο γινομενο $(\ldots,\ldots)$, οριζεται το <u>ορθογωνιο συμπληρωμα</u> $W^\perp$ του W, σαν το συνολο

$$W^\perp=\{\mathbf{x} \text{ του } V, \text{ που ειναι καθετα σε καθε } \mathbf{y} \text{ του } W\}$$

Το $W^\perp$ ειναι διανυσματικος υποχωρος του V, εχει $W\cap W^\perp=\{\mathbf{O}\}$ και την επομενη ιδιοτητα που χαρακτηριζει γενικωτερα ενα "συμπληρωμα" ενος διανυσματικου υποχωρου:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Καθε } \mathbf{x} \text{ του V γραφεται με ενα και μοναδικο τροπο}\\ \qquad\qquad \mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2\\ \text{οπου } \mathbf{x}_1\in W \text{ και } \mathbf{x}_2\in W^\perp.\end{array}\right\}\quad (*)$$

Γραφουμε τοτε

$$V=W\oplus W^\perp$$

και λεμε οτι το V ειναι <u>ευθυ αθροισμα των W και $W^\perp$</u>. Δοθεντος υποχωρου W ονομαζουμε γενικωτερα <u>συμπληρωμα</u> του W εναν οποιοδηποτε υποχωρο U του V που εχει την ιδιοτητα (*) με $\mathbf{x}_1\in W$ και $\mathbf{x}_2\in U$. Γραφουμε παλι $V=W\oplus U$ και λεμε οτι ο V ειναι ευθυ αθροισμα των W και U. Το επομενο παραδειγμα δειχνει οτι υπαρχουν πολλα συμπληρωματα δοθεντος υποχωρου. Πραγματι αν στο R^3 θεωρησουμε το επιπεδο που διδεται απο την εξισωση $x_3=0$, τουτο εχει σαν συμπληρωμα μια οποιαδηποτε "ευθεια" $<(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)>$ με $\alpha_3 \neq 0$. Το ορθογωνιο συμπληρωμα εν τουτοις ειναι μονοσημαντα ορισμενο για καθε υποχωρο W. Στο προηγουμενο παραδειγμα λ.χ. το <u>ορθογωνιο</u> συμπληρωμα του υποχωρου W που χαρακτηριζεται απο την $x_3=0$ ειναι ο "x_3-αξονας" $<(0,0,1)>$.

Δοθεντων δυο υποχωρων W_1 και W_2 ενος K-διανυσματικου χωρου V, ονομαζουμε ΑΘΡΟΙΣΜΑ των W_1 και W_2 τον υποχωρο $<W_1 \cup W_2>$ που συμβολιζουμε με W_1+W_2. Συμπληρωνοντας μια βαση της τομης $W_1 \cap W_2$ σε μια βαση του W_1 και κατοπιν την ιδια βαση σε μια βαση του W_2 συμπεραινουμε οτι στην περιπτωση που ο V εχει πεπερασμενη διασταση ισχυει:

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \qquad (13)$$

ΑΣΚΗΣΗ-17 Εστω οτι W_1 και W_2 ειναι διανυσματικοι υποχωροι του K-διανυσματικου χωρου V. Δειξε οτι $V = W_1 \oplus W_2$ τοτε και μονον οταν ισχυουν οι δυο ιδιοτητες:

α) $V = W_1+W_2$

β) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{O}\}$

ΑΣΚΗΣΗ-18 Εστω $V=W_1 \oplus W_2$ με V, W_1 και W_2 οπως στην προηγουμενη ασκηση. Τοτε εξ ορισμου καθε $\mathbf{x}$ του V γραφεται σαν αθροισμα $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, με $\mathbf{x}_1 \in W_1$ και $\mathbf{x}_2 \in W_2$. Δειξε οτι η απεικονιση $P(\mathbf{x})=\mathbf{x}_1$ ειναι γραμμικη $P: V \longrightarrow V$ και ικανοποιει

α) $P^2 = P$

β) $(I-P)^2 = (I-P)$, οπου I η ταυτοτικη απεικονιση του V.

Δειξε οτι και αντιστροφα καθε γραμμικη απεικονιση P με την ιδιοτητα α) οριζει τους υποχωρους $W_1=\mathrm{kern}P$ και $W_2=\mathrm{Im}P$ και $V=W_1 \oplus W_2$.

ΑΣΚΗΣΗ-19 Δειξε οτι για καθε υποχωρο W του διανυσματικου χωρου V με εσωτερικο γινομενο $(..,..)$ ισχυει $(W^{\perp})^{\perp} = W$

ΑΣΚΗΣΗ-20 Γενικευοντας το ευθυ αθροισμα γραφουμε

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_\kappa$$

οταν καθε $\mathbf{x}$ του διανυσματικου χωρου V γραφεται σαν αθροισμα

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{x}_\kappa \quad \text{με} \quad \mathbf{x}_1 \in W_1,\ \mathbf{x}_2 \in W_2, \ldots, \mathbf{x}_\kappa \in W_\kappa$$

με ενα και μοναδικο τροπο.

Οι $W_1,\ldots,W_\kappa$ ειναι υποχωροι του V και λεμε οτι ο V ειναι το ευθυ αθροισμα αυτων των υποχωρων. Δειξε οτι γι αυτα τα W_i ισχυει:

$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{O}\}$, $(W_1 \oplus W_2) \cap W_3 = \{\mathbf{O}\}$, $(W_1 \oplus W_2 \oplus W_3) \cap W_4 = \{\mathbf{O}\}$,... κ.τ.λ.

§12 ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΒΑΣΗ

Ετσι ονομαζεται μια βαση $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ του χωρου V με εσωτερικο γινομενο $(..,..)$, που αποτελειται απο μοναδιαια και ανα δυο καθετα μεταξυ τους διανυσματα. Π.χ. στο R^n με το κανονικο εσωτερικο γινομενο η κανονικη βαση ειναι ορθοκανονικη. Γενικωτερα η ορθοκανονικη βαση χαρακτηριζεται απο τις εξισωσεις

$$(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j) = \delta_{ij} \quad \text{για} \quad i,j=1,\ldots,n \tag{14}$$

n ειναι η διασταση του χωρου και δ_{ij} το συμβολο του Kronecker που παιρνει την τιμη 1 οταν $i=j$ και 0 οταν $i\neq j$. Οπως γνωριζουμε, καθε διανυσμα $\mathbf{x}$ του V γραφεται σαν γραμμικος συνδυασμος των διανυσματων δοθησας βασης

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\ldots+x_n\mathbf{a}_n$$

οπου τα $x_1,\ldots,x_n$ λεγονται <u>συντεταγμενες του $\mathbf{x}$ ως προς αυτη τη βαση</u>. Η ευρεση των συντεταγμενων ενος διανυσματος ως προς μια αυθαιρετη βαση απαιτει συνηθως τη λυση ενος γραμμικου συστηματος. Αντιθετα η ευρεση των συντεταγμενων ως προς μια ορθοκανονικη βαση δεν απαιτει παρα ενα εσωτερικο πολλαπλασιασμο με το αντιστοιχο βασικο διανυσμα.

$$x_i = (\mathbf{x},\mathbf{a}_i) \quad \text{για} \quad i=1,\ldots,n \quad \text{οταν η βαση } \mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n \text{ ειναι ορθοκανονικη.}$$

Τουτη η ευκολια κανει τις ορθοκανονικες βασεις (ενος χωρου με εσ. γιν.) πολυ χρησιμες. Υπαρχει μαλιστα μια γενικη μεθοδος (των Gram-Schmidt) με την οποια κατασκευαζουμε ορθοκανονικη βαση ξεκινοντας απο μια αυθαιρετη βαση $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ του χωρου V. Τουτη η κατασκευη γινεται επαγωγικα, ως εξης:

$\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1|$.

$\mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_2/|\mathbf{c}_2|$ οπου $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2-(\mathbf{b}_2,\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1$

$\mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_3/|\mathbf{c}_3|$ οπου $\mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_3-(\mathbf{b}_3,\mathbf{a}_2)\mathbf{a}_2-(\mathbf{b}_3,\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$\mathbf{a}_n = \mathbf{c}_n/|\mathbf{c}_n|$ οπου $\mathbf{c}_n = \mathbf{b}_n-(\mathbf{b}_n,\mathbf{a}_{n-1})\mathbf{a}_{n-1}-\ldots-(\mathbf{b}_n,\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1$.

Παρατηρουμε οτι για καθε $i=1,\ldots,n$ ισχυει

$$\mathbf{a}_i \in \langle \mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_i \rangle \tag{*}$$

Επισης τα διανυσματα που χρησιμοποιουμε βοηθητικα $\mathbf{c}_i \neq \mathbf{0}$.

Πραγματι, $\mathbf{c}_i = \mathbf{O}$, ισοδυναμει με την

$$\mathbf{b}_i - (\mathbf{b}_i,\mathbf{a}_{i-1})\mathbf{a}_{i-1} - \ldots -(\mathbf{b}_i,\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1 = \mathbf{O}.$$

Τουτη παλι, λογω της (*) συνεπαγεται οτι τα $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_i$ ειναι γραμμικα εξαρτημενα, ατοπον. Ευκολα διαπιστωνουμε οτι καθε $\mathbf{a}_i$ ειναι καθετο σ ολα τα προηγουμενα $\mathbf{a}_{i-1},\ldots,\mathbf{a}_1$.

Ιδιαιτερο ενδιαφερον παρουσιαζουν οι μητρες nxn διαστασεων των οποιων τα στηλοδιανυσματα $\mathbf{a}_i=(a_{1i},a_{2i},\ldots,a_{ni})$ αποτελουν ορθοκανονικη βαση του R^n. Οι μητρες αυτες λεγονται <u>ορθογωνιες</u> και χαρακτηριζονται απο την σχεση (14) που ειναι ισοδυναμη με την

$$(A^t)A = I \qquad (15)$$

οπου I η μοναδιαια nxn μητρα και A η μητρα που εχει στηλοδιανυσματα τα $\mathbf{a}_i$.

Στις επομενες ασκησεις υποτιθεται οτι η μετρικη του R^n ειναι η κανονικη.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι η (15) ειναι ισοδυναμη με την $(A\mathbf{x},A\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{y})$ για καθε $\mathbf{x},\mathbf{y}$ του R^n.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι καθε μοναδιαιο διανυσμα του R^2 γραφεται (cosφ,sinφ) για καταλληλη γωνια φ. Δειξε ακομη οτι καθε 2x2 ορθογωνια μητρα ειναι της μορφης $\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$ ή $\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{bmatrix}$.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι τα διαφορα του $\mathbf{O}$ διανυσματα $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ που ειναι μεταξυ τους καθετα ειναι και ανεξαρτητα.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Ορθοκανονικοποιησε τη βαση του R^3 που αποτελειται απο τα διανυσματα (1,1,1), (1,-1,1) και (1,1,0).

ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι αν η nxn μητρα A ειναι ορθογωνια τοτε και η αναστροφος της A^t ειναι επισης ορθογωνια.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι το γινομενο ορθογωνιων μητρων ειναι παλι ορθογωνια μητρα. Δειξε ακομη οτι οι ορθογωνιες μητρες ειναι αντιστρεψιμες και η αντιστροφη τους ειναι παλι ορθογωνια.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Εστω $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ ορθοκανονικη βαση του διαν. χωρου V με εσωτερικο γινομενο. Δειξε οτι τα διανυσματα

$$\mathbf{b}_i= b_{1i}\mathbf{a}_1+b_{2i}\mathbf{a}_2+\ldots+b_{ni}\mathbf{a}_n \text{ για } i=1,\ldots,n$$

αποτελουν παλι ορθοκανονικη βαση, τοτε και μονον, οταν η μητρα B των (b_{ij}) ειναι ορθογωνια.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Εστω B η nxn αντιστρεψιμη μητρα με στηλες τα $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_n$ του R^n. Εστω C η μητρα με στηλες τα $\mathbf{c}_1=\mathbf{b}_1,\mathbf{c}_2,\dots,\mathbf{c}_n$ και A η μητρα με στηλες τα $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ που οριζονται απο την ορθοκανονικοποιηση των $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$. Δειξε οτι υπαρχει μητρα Ω της μορφης $\Omega = \begin{bmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ με την ιδιοτητα BΩ = C. Επισης δειξε οτι υπαρχει μητρα $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ (διαγωνια) ετσι ωστε CΛ=A.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Δειξε οτι καθε αντιστρεψιμη μητρα $B \in M_R(n,n)$ γραφεται σαν γινομενο με ενα και μοναδικο τροπο B=AΛ σαν γινομενο μιας ορθογωνιας μητρας A και μιας ανω-τριγωνικης $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \vdots \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots\dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ οπου τα $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ειναι ολα μεγαλυτερα του 0.

ΑΣΚΗΣΗ-10 Γιατι δεν ισχυει η προηγουμενη προταση για μη-αντιστρεψιμες μητρες;

ΑΣΚΗΣΗ-11 Δειξε οτι για καθε πραγματικη nxn μητρα B υπαρχει ορθογωνια A και ανω τριγωνικη Λ οπως παραπανω με την διαφορα οτι $\lambda_1 \geqq 0$, $\lambda_2 \geqq 0$, ..., $\lambda_n \geqq 0$, ετσι ωστε B = AΛ.

ΑΣΚΗΣΗ-12 Αποδειξε την ανισοτητα του Schwarz για το κανονικο εσωτερικο γινομενο του C^n.

ΑΣΚΗΣΗ-13 Δειξε οτι η μεθοδος ορθοκανονικοποιησης Gram-Schmidt εφαρμοζεται και για βασεις του C^n και δινει ορθοκανονικες βασεις ως προς το κανονικο εσωτερικο γινομενο αυτου του χωρου. Εξετασε πως γενικευονται οι ασκησεις 8 και 9 για μιγαδικες μητρες.

> Οι μαθητες κανουν 4 λαθη, που οι δασκαλοι τους οφειλουν να γνωριζουν. Η μαθηση γινεται λανθασμενα, οταν ειναι πολλη ή γινεται λανθασμενα οταν ειναι λιγη. Γινεται λανθασμενα απο την πολλη ευκολια ή γινεται λανθασμενα απο τα πολλα αδιεξοδα. Σ αυτα τα τεσσερα πραγματα δεν αντιδρουν ομοιομορφα οι διαφοροι χαρακτηρες. Πρεπει να γνωριζει κανεις το χαρακτηρα του μαθητη. Τοτε μονο μπορει να τον γλυτωσει απο τα λαθη του. Ο Δασκαλος πρεπει να προαγει το αγαθο και να σωζει απο τα λαθη.
>
> Απο το βιβλιο Χουο Γκι (200 π.Χ.)

§13 ΟΡΙΖΟΥΣΑ

Η οριζουσα ειναι μια απεικονιση, που σε καθε n το πληθος διανυσματα του R^n $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$, αντιστοιχει εναν αριθμο $|\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n|$. Οταν τα διανυσματα αυτα ειναι οι στηλες μιας μητρας A γραφω $|A| = |\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n|$. Για n=2 η οριζουσα οριζεται να ειναι:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2-y_1x_2$$

Για n=3 η οριζουσα οριζεται να ειναι:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3+y_1z_2x_3+z_1x_2y_3-x_3y_2z_1-x_2y_1z_3-x_1y_3z_2$$

Γενικευοντας τις ιδιοτητες της οριζουσας σ αυτες τις δυο απλες περιπτωσεις μπορουμε να ορισουμε την οριζουσα σαν την απεικονιση που εχει τις επομενες τρεις ιδιοτητες:

α) Γραμμικοτητα ως προς καθε μεταβλητη. Δηλαδη

$$|\mathbf{a}_1,\dots,\lambda\mathbf{a}_i+\mu\mathbf{b}_i,\dots,\mathbf{a}_n| = \lambda|\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_n| + \mu|\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{b}_i,\dots,\mathbf{a}_n|$$

για $i=1,\dots,n$.

β) Αντισυμμετρικοτητα, που σημαινει οτι εναλλαγη $\mathbf{a}_i \leftrightarrow \mathbf{a}_j$ δυο διανυσματων αλλαζει το προσημο της οριζουσας.

$$|\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_n| = -|\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_j,\dots,\mathbf{a}_n|.$$

γ) Κανονικοτητα, που σημαινει οτι η τιμη της στην κανονικη βαση του R^n $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ ειναι 1 : $|\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n| = 1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Μια απεικονιση $\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)$ που σε n το πληθος διανυσματα του R^n αντιστοιχει ενα πραγματικο αριθμο και επι πλεον εχει τις δυο πρωτες ιδιοτητες της οριζουσας εχει επισης και τις ιδιοτητες:

δ) $\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)=0$ οταν καποιο απο τα $\mathbf{a}_i$ ειναι το $\mathbf{0}$.

ε) $\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)=0$ γενικωτερα οταν τα $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ ειναι εξαρτημενα.

ζ) $\varphi(\mathbf{a}_{\sigma(1)},\mathbf{a}_{\sigma(2)},\dots,\mathbf{a}_{\sigma(n)}) = \mathrm{sig}(\sigma)\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)$.
οπου σ τυχουσα μεταθεση του $\{1,2,\dots,n\}$ και $\mathrm{sig}(\sigma)$ το προσημο της μεταθεσης.

Πραγματι, η δ) ειναι συνεπεια της α).

$$\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = 0\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = 0.$$

Για την ε) αποδεικνυουμε πρωτα οτι $\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = 0$ οταν $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$ για $i \neq j$. Πραγματι, εναλλασσοντας θα εχουμε

$$\varphi(\mathbf{a}_1,..,\mathbf{a}_j,..,\mathbf{a}_i,..,\mathbf{a}_n)=\varphi(\mathbf{a}_1,..,\mathbf{a}_i,..,\mathbf{a}_j,..,\mathbf{a}_n)$$

αφου τα δυο διανυσματα ειναι ισα. Ο αριθμος αυτος θα ισουται επομενως (συμφωνα με την β)) με τον αντιθετο του, αρα θα ειναι το 0. Αν υποθεσουμε τωρα γενικωτερα οτι τα διανυσματα ειναι γραμμικα εξαρτημενα π.χ. $\mathbf{a}_1= k_2\mathbf{a}_2+\dots+k_n\mathbf{a}_n$ τοτε απο την α) ιδιοτητα εχουμε

$$\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = \varphi(k_2\mathbf{a}_2+\dots+k_n\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n) =$$

$$k_2\varphi(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n)+ \dots + k_n\varphi(\mathbf{a}_n,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n) = 0$$

συμφωνα με την ιδιοτητα που μολις αποδειξαμε. Αναλογα αποδεικνυεται η ε) και στην περιπτωση που το $\mathbf{a}_i$ εξαρταται γραμμικα απο τα υπολοιπα. Τελος η ζ) ειναι αμεση συνεπεια του β) και του ορισμου του $sig(\sigma)$ που ισουται με $(-1)^{\tau}$, οπου τ το πληθος των εναλλαγων που χρειαζονται για να προκυψει η μεταθεση $\sigma(1),\dots,\sigma(n)$ απο το $1,\dots,n$.

ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Μια απεικονιση $\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)$ που σε n το πληθος διανυσματα του R^n αντιστοιχει ενα πραγματικο αριθμο και εχει επι πλεον τις δυο πρωτες ιδιοτητες της οριζουσας ικανοποιει και την:

$$\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = \Big(\sum_{\sigma\in S_n} sig(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\cdots\alpha_{\sigma(n)n}\Big)\varphi(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$$

οπου S_n το συνολο των μεταθεσεων των $1,2,\dots,n$ και $(\alpha_{1i},\dots,\alpha_{ni})$ οι φυσικες συντεταγμενες του $\mathbf{a}_i$ ως προς την κανονικη βαση $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ του R^n.

Πραγματι, με τις υποθεσεις της προτασης εχουμε οτι

$$\varphi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)=\varphi\Big(\sum_{\kappa_1=1}^{n}\alpha_{\kappa_1 1}\mathbf{e}_{\kappa_1},\dots,\sum_{\kappa_n=1}^{n}\alpha_{\kappa_n n}\mathbf{e}_{\kappa_n}\Big)$$

$$=\sum_{\kappa_1=1}^{n}\dots\sum_{\kappa_n=1}^{n}\alpha_{\kappa_1 1}\cdots\alpha_{\kappa_n n}\varphi(\mathbf{e}_{\kappa_1},\dots,\mathbf{e}_{\kappa_n}).$$

Η προταση συναγεται τωρα παρατηρωντας προσεκτικα τους προσθεταιους αυτου του αθροισματος. Πραγματι οι μονοι που ειναι διαφοροι του 0 ειναι εκεινοι για τους οποιους το $(\kappa_1,..,\kappa_n)$ ειναι μια μεταθεση του $(1,2,..,n)$, δηλαδη $\kappa_1=\sigma(1),...,\kappa_n=\sigma(n)$ που συμφωνα με την ζ) διδει

$$\varphi(\mathbf{e}_{\kappa_1},...,\mathbf{e}_{\kappa_n}) = \mathrm{sig}(\sigma)\varphi(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n).$$

Αντικαθιστωντας στο προηγουμενο αθροισμα παιρνουμε αμεσως το ζητουμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ Υπαρχει μια και μονον απεικονιση $|\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n|$ με τις ιδιοτητες α),β),γ) και ισχυει

$$|\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n| = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sig}(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\cdots\alpha_{\sigma(n)n}$$

οπου $(\alpha_{1i},...,\alpha_{ni}) = \mathbf{a}_i$.

Η αποδειξη ειναι αμεση συνεπεια της προηγουμενης προτασης και της ιδιοτητας γ) της οριζουσας και συμπληρωνεται με την επομενη ασκηση.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αναλογος ειναι και ο ορισμος και οι ιδιοτητες της οριζουσας για n το πληθος διανυσματα του K^n, οπου K τυχον σωμα. Οι προτασεις και το θεωρημα ισχυουν αυτολεξι με μονη διαφορα την αντικατασταση του R με το K.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Συμπληρωσε την αποδειξη του θεωρηματος δειχνοντας οτι η δεξια πλευρα της ισοτητας οριζει πραγματι μια απεικονιση που εχει τις ιδιοτητες α),β) και γ).

Οπως ειπα και στην αρχη η οριζουσα μιας nxn μητρας $A\in M_K(n,n)$ ισουται με την οριζουσα των στηλοδιανυσματων της, δηλαδη εξ ορισμου:

$$|A| = |\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_n|.$$

Αν $B = A^t$ η αναστροφος της A, μπορουμε να δουμε αμεσως οτι $|B| = |A|$. Πραγματι, με τους συμβολισμους του θεωρηματος εστω για καθε $\sigma\in S_n$ η αντιστροφη μεταθεση $\tau=\sigma^{-1}$. Τοτε $\sigma\tau=\tau\sigma=I$: η ταυτοτικη του $(1,2,...,n)$ στον εαυτο του. Επισης αν το σ διατρεχει το S_n τοτε και το τ θα διατρεχει ολοκληρο το S_n. Επισης $\mathrm{sig}(\sigma)=\mathrm{sig}(\tau)$, διοτι οσες εναλλαγες χρειαζονται για να διαταξω το $(j_1,...,j_n)$ στο $(1,...,n)$ το ιδιο πληθος χρειαζεται για να διαταξω το $(1,...,n)$ ξανα στο $(j_1,...,j_n)$. Αρα

$$\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sig}(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\cdots\alpha_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sig}(\tau)\alpha_{\sigma(1)\tau\sigma(1)}\cdots\alpha_{\sigma(n)\tau\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} sig(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = |A^t| .$$ Αποδειξαμε λοιπον την

ΠΡΟΤΑΣΗ-3 Για καθε nxn μητρα ισχυει $|A^t| = |A|$.

Συνεπεια αυτης ειναι οτι η οριζουσα μητρας εχει ως προς τις γραμμες της τις αναλογες με τις α)-ζ) που ισχυουν για τις στηλες της. Απορρεουν λοιπον οι επομενες ιδιοτητες που δινω σαν ασκησεις.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Εναλλαγη δυο γραμμων ή στηλων μητρας αλλαζει το προσημο της οριζουσας της.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Αν δυο γραμμες ή δυο στηλες ειναι ισες, τοτε η οριζουσα της μητρας ειναι 0.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Αν γραμμη ή στηλη πολλαπλασιασθη με αριθμο τοτε η οριζουσα της μητρας πολλαπλασιαζεται με τον ιδιο αριθμο.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Αν οι γραμμες ή οι στηλες μητρας ειναι εξαρτημενες, τοτε η οριζουσα ειναι 0.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι για την nxn μητρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{bmatrix}$ οπου B μια (n-1)x(n-1) μητρα, ισχυει $|A| = |B|$.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Δειξε οτι για μια ανω-τριγωνικη μητρα

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & ** & \cdots & * \\ & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

Ο τυπος του θεωρηματος με τον οποιο υπολογιζεται η οριζουσα δεν ειναι πρακτικος. Αντι γι αυτον χρησιμοποιουμε τον επομενο που αναφερεται σαν <u>αναπτυγμα της οριζουσας ως προς την j στηλη.</u>

ΠΡΟΤΑΣΗ-4 Για μια nxn τετραγωνικη μητρα ισχυει

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} |A_{ij}| a_{ij} ,$$

οπου $|A_{ij}|$ η οριζουσα της (n-1)x(n-1) μητρας, που προκυπτει διαγραφοντας απο την A την i-γραμμη και την j-στηλη.

π.χ. για την $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{bmatrix}$ $|A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6.$

Η αποδειξη ειναι πολυ απλη: $|A| = |\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,|\mathbf{a}_1,\dots,\underset{\uparrow\text{στην j-στηλη}}{\mathbf{e}_i},\dots,\mathbf{a}_n|$.

Αρκει να δειξουμε οτι

$$|\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{e}_i,\dots,\mathbf{a}_n| = |A_{ij}|\,(-1)^{i+j}.$$

Ομως η μητρα αριστερα εχει τα ιδια στηλοδιανυσματα με την A εκτος της j-στηλης στην οποια ολα τα στοιχεια ειναι 0 εκτος της i-γραμμης που ειναι 1. Κανοντας λοιπον j-1 εναλλαγες στηλων φερνουμε το $\mathbf{e}_i$ στην πρωτη στηλη. Κατοπιν εναλλασσοντας με τις i-1 προηγουμενες γραμμες φερνουμε το 1 της πρωτης στηλης στην πρωτη γραμμη. Τελικα προκυπτει η μητρα

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{i1}\cdot\cdot a_{ij-1}a_{ij+1}\cdot\cdot a_{in} \\ 0 & a_{11}\cdot\cdot a_{1j-1}a_{1j+1}\cdot\cdot a_{1n} \\ \vdots & \\ 0 & a_{n1}\cdot\cdot a_{nj-1}a_{nj+1}\cdot\cdot a_{nn} \end{bmatrix}$$

της οποιας η οριζουσα διαφερει απο την $|A_{ij}|$ (συμφωνα με την β)) κατα το προσημο που προκυπτει απο τις εναλλαγες: $(-1)^{j-1}(-1)^{i-1} = (-1)^{i+j}$. ο.ε.δ.

Οι μητρες A_{ij} λεγονται <u>ελασσονες της A</u> ενω οι αριθμοι $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ λεγονται <u>συμπαραγοντες</u> της A. Η τελευταια προταση εχει το

ΠΟΡΙΣΜΑ-1

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+j}|A_{ij}| = \delta_{kj} \quad \text{για } k,j=1,\dots,n.$$

Πραγματι για k=j τουτη συμπιπτει με την (32). Για k≠j, βασει της προτασης-4, το αθροισμα αριστερα παριστα το αναπτυγμα ως προς την j-στηλη μιας οριζουσας που εχει τις k- και j-στηλες ισες. Αρα η οριζουσα αυτη ειναι 0. ο.ε.δ.

Οταν η οριζουσα δεν μηδενιζεται και θεσουμε

$$b_{ji} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|/|A| , \tag{16}$$

το προηγουμενο πορισμα δειχνει οτι ισχυει

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ik} = \delta_{jk} \qquad \text{για } k,j=1,\dots,n.$$ Αρα

ΠΟΡΙΣΜΑ-2 Μητρες nxn μη μηδενικης οριζουσας αντιστρεφονται και η αντιστροφη τους διδεται απο τους τυπους (16).

ΑΣΚΗΣΗ-8 Δειξε οτι οι στηλες τετραγωνικης μητρας ειναι τοτε και μονον ανεξαρτητες, οταν η οριζουσα της δεν μηδενιζεται. Δειξε το αναλογο και για τις γραμμες.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Υπολογισε με την (16) τις αντιστροφες των

α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ-10 Εστω D η μητρα της οποιας τα στοιχεια ειναι οι συμπαραγοντες D_{ij} της nxn μητρας A. Δειξε οτι

$$AD^t = |A|^n I_n \ .$$

Με τη χρηση της αντιστροφου μητρας αποδεικνυεται και ο λεγομενος κανονας του Cramer για την λυση nxn συστηματος με μη μηδενικη οριζουσα:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{με} \quad |A| \neq 0 \qquad (*)$$

συνεπαγεται

$$x_1 = |A_1| / |A|, \ldots, x_n = |A_n| / |A|, \qquad (17)$$

οπου A_i η μητρα που προκυπτει απο την A αντικαθιστωντας την i-στηλη της με το $\mathbf{b}$. Πραγματι πολλαπλασιαζοντας την (*) με A^{-1} εχουμε

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

και κατα τους (16)

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}(|A_{ij}| / |A|)b_i = |A_i| / |A| \ .$$

ΑΣΚΗΣΗ-11 Λυσε με τον (17) τα συστηματα με επηυξημενη

α) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right]$ β) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$.

Στην πραξη η οριζουσα υπολογιζεται κανοντας στοιχειωδεις μετασχηματισμους γραμμων που αναγουν την μητρα σε τριγωνικη και παρακολουθωντας σε καθε βημα την μεταβολη της οριζουσας. Το προτερημα της τριγωνικης ειναι οτι υπολογιζεται αμεσως (ασκηση-7). Ας δουμε ενα παραδειγμα (στην παρενθεση αναγραφεται η τιμη της οριζουσας).

$$\underset{(D)}{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}} \ \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2 \ \underset{(-D)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}} \ \begin{array}{l} \gamma_2 \to \gamma_2 - 4\gamma_1 \\ \gamma_3 \to \gamma_3 + \gamma_2 \end{array} \ \underset{(-D)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}} \ \gamma_3 \to 2\gamma_3 + \gamma_2$$

$$\underset{(-2D)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}} .$$

Ομως η οριζουσα της τριγωνικης ειναι 6, αρα $-2D = 6$, αρα η αρχικη οριζουσα $D = -3$.

ΑΣΚΗΣΗ-12 Υπολογισε αναλογα τις οριζουσες:

α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ΠΡΟΤΑΣΗ-5 Για δυο nxn μητρες A,B ισχυει $|AB| = |A||B|$.

Τουτη ειναι αμεση συνεπεια της προτασης-2. Πραγματι η απεικονιση

$$\varphi(b_1,\dots,b_n) = |Ab_1, Ab_2,\dots,Ab_n|$$

ικανοποιει τις υποθεσεις της προτασης-2 αρα

$$\varphi(b_1,\dots,b_n) = |b_1,\dots,b_n|\,\varphi(e_1,\dots,e_n)$$

ομως

$$\varphi(e_1,\dots,e_n) = |a_1,\dots,a_n| = |A|\ .\ \text{ο.ε.δ.}$$

ΑΣΚΗΣΗ-13 Δειξε οτι ορθογωνιες μητρες εχουν οριζουσα ±1. Δειξε οτι η οριζουσα της αντιστροφου μητρας ισουται με την αντιστροφο της οριζουσας της αρχικης μητρας. Δειξε τελος οτι η οριζουσα μιας nxn αντισυμμετρικης μητρας ($A^t=-A$) με n περιττο ειναι 0.

ΑΣΚΗΣΗ-14 Δειξε οτι αν η nxn μητρα A ειναι αντιστρεψιμη τοτε και καθε δυναμη της $A^{\kappa} = AA\dots A$ (κ-φορες) ειναι αντιστρεψιμη. Ισχυει το αντιστροφο;

ΑΣΚΗΣΗ-15 Χρησιμοποιωντας την προταση-2 αποδειξε οτι

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = |A||C|$$

οπου οι μητρες εχουν τις διαστασεις A mxm, B mxn, C nxn και O ειναι η μηδενικη nxm διαστασεων.

ΑΣΚΗΣΗ-16 Με τα δεδομενα της προηγουμενης ασκησης δειξε οτι

$$\begin{vmatrix} O & C \\ A & B \end{vmatrix} = |A||C|(-1)^{mn}\ .$$

ΑΣΚΗΣΗ-17 Δειξε οτι η ταξη μιας mxn μητρας A ισουται με την διασταση της μεγαλυτερης τετραγωνικης υπομητρας της A με οριζουσα διαφορο του μηδενος (H B ειναι υπομητρα της A οταν προκυπτει απ αυτην διαγραφοντας ορισμενες γραμμες και στηλες της A).

§14 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ, ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ιδιοτιμη μιας μητρας A τόυ $M_K(n,n)$ λεγεται ο αριθμος λ του σωματος K, οταν το συστημα

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{εχει λυση} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{O} \ \text{στο} \ K^n \,. \tag{18}$$

π.χ. η $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ εχει ιδιοτιμη το 2, διοτι για $\lambda=2$ και $\mathbf{x} = (0,1)$ ικανοποιειται η (18).

Οι λυσεις $\mathbf{x} \in K^n$ της (18) λεγονται <u>ιδιοδιανυσματα της A ως προς λ.</u> Το συστημα (18) γραφεται σαν ομογενες

$$(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{O},$$

και γνωριζουμε οτι τουτο εχει μη μηδενικες λυσεις τοτε ακριβως, οταν η οριζουσα

$$|A - \lambda I_n| = 0. \tag{19}$$

Η οριζουσα τουτη ειναι ενα πολυωνυμο n βαθμου ως προς λ που λεγεται <u>χαρακτηριστικο πολυωνυμο της A.</u> Οι ριζες αυτου του πολυωνυμου ειναι ακριβως οι ιδιοτιμες της A. Αναλογα με το σωμα K το πολυωνυμο μπορει να εχει ή να μην εχει ριζες, αρα η A μπορει να εχει ή να μην εχει ιδιοτιμες. π.χ. η $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ εχει χαρακτηριστικο πολυωνυμο x^2+1 που δεν εχει πραγματικες ριζες.

Αρα η A θεωρουμενη σαν πραγματικη μητρα δεν εχει ιδιοτιμες. Αντιθετα θεωρουμενη σαν μιγαδικη (αφου $R \subset C$) εχει τις ιδιοτιμες $\pm i$ και τα (μιγαδικα) ιδιοδιανυσματα που προκυπτουν σαν λυσεις των

$$\begin{aligned} -(\pm i)x_1 - 1x_2 &= 0 \\ 1x_1 - (\pm i)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Τουτο για $\lambda = i$ δινει αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα $\mu(1,-i)$ οπου μ αυθαιρετος μιγαδικος αριθμος. Για $\lambda = -i$ δινει αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα $\mu(1,i)$.

Στο προηγουμενο παραδειγμα αξιζει να παρατηρησουμε οτι οι ιδιοτιμες ειναι μιγαδικοι συζυγεις μεταξυ τους αριθμοι. Επισης τα αντιστοιχα σ αυτους ιδιοδιανυσματα ειναι επισης συζυγη (δηλαδη ομωνυμες συντεταγμενες ειναι συζυγεις μεταξυ τους αριθμοι). Ισχυει γενικωτερα:

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Καθε πραγματικη nxn μητρα A θεωρουμενη ταυτοχρονα σαν μιγαδικη εχει n το πληθος ιδιοτιμες $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (οχι απαραιτητα διαφορετικες μεταξυ τους). Οι ιδιοτιμες αυτες ειναι ειτε πραγματικοι ειτε μιγαδικοι αριθμοι. Σε πραγματικες ιδιοτιμες αντιστοιχουν πραγματικα ιδιοδιανυσματα. Αν μια ιδιοτιμη λ ειναι μιγαδικη και το $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ του C^n αντιστοιχο ιδιοδιανυσμα, τοτε και η συζυγης $\bar{\lambda}$ ειναι παλι ιδιοτιμη και εχει το συζυγες του $\mathbf{x}$, $\overline{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ σαν αντιστοιχο ιδιοδιανυσμα.

Ο πρωτος ισχυρισμος της προτασης ειναι συνεπεια του θεμελιωδους θεωρηματος της αλγεβρας που λεει οτι καθε μιγαδικο πολυωνυμο (αρα και καθε πραγματικο) εχει n το πληθος (μιγαδικες) ριζες (n: ο βαθμος του πολυωνυμου). Ο δευτερος ισχυρισμος ειναι προφανης και ο τριτος αποδεικνυεται αμεσως παιρνοντας την συζυγη της (18):

$$\bar{A}\,\overline{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}} .$$

$\bar{A}$ συμβολιζει την μητρα της οποιας τα στοιχεια ειναι τα συζυγη των αντιστοιχων στοιχειων της A. Εδω η A ειναι πραγματικη, αρα $A=\bar{A}$. Επομενως η προηγουμενη ισοτητα γινεται

$$A\,\overline{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}} ,$$

που αποδεικνυει τον ισχυρισμο.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι σε τριγωνικη μητρα $\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ οι ιδιοτιμες συμπιπτουν με τα διαγωνια στοιχεια.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Βρες τις ιδιοτιμες και τα ιδιοδιανυσματα των μητρων:

α) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι το συνολο των ιδιοδιανυσματων της A ως προς την ιδιοτιμη της λ, αποτελει διανυσματικο υποχωρο V του K^n, αναλλοιωτο ως προς A (δηλαδη $F_A(V) \subset V$).

ΑΣΚΗΣΗ-4 Αν λ ειναι ιδιοτιμη της A και $\mathbf{x}$ αντιστοιχο ιδιοδιανυσμα, δειξε οτι η $A^\kappa = AA\ldots A$ (κ-φορες) εχει το λ^κ σαν ιδιοτιμη και το ιδιο το $\mathbf{x}$ σαν ιδιοδιανυσμα. Δωσε ενα παραδειγμα μητρας A και ιδιοδιανυσματος $\mathbf{x}$ της A^κ που <u>δεν</u> ειναι ταυτοχρονα ιδιοδιανυσμα της A.

Υπαρχει μια ενδιαφερουσα περιπτωση πραγματικης μητρας που εχει ολες τις ιδιοτιμες της πραγματικες:

ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Οι ιδιοτιμες πραγματικης nxn συμμετρικης μητρας A ($A^t = A$) ειναι ολες πραγματικες.

Πραγματι, εστω $(..,..)$ το εσωτερικο γινομενο του C^n και λ, $\mathbf{x}$ ιδιοτιμη και αντιστοιχο ιδιοδιανυσμα της A. Συμφωνα με την προταση-1 και τα $\bar{\lambda}$, $\bar{\mathbf{x}}$ θα ειναι ιδιοτιμη και αντιστοιχο ιδιοδιανυσμα της A. Για καθε nxn μιγαδικη μητρα A αποδεικνυεται αμεσως οτι

$$(A\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\bar{A}^t\mathbf{y}).$$

Οταν η A ειναι πραγματικη και συμμετρικη η προηγουμενη γινεται

$$(A\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},A\mathbf{y}) .$$

Τουτη, παιρνοντας $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ δινει

$$(A\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\mathbf{x},A\mathbf{x}) .$$

Οταν το $\mathbf{x}$ ειναι ιδιοδιανυσμα οπως παραπανω τουτη δινει

$$\lambda(\mathbf{x},\mathbf{x}) = (A\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\mathbf{x},A\mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x},\mathbf{x}) . \quad \text{Αρα}$$

$$(\lambda-\bar{\lambda})(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0 .$$

Αφου το $\mathbf{x} \neq \mathbf{O}$, η τελευταια διδει $\lambda = \bar{\lambda}$. ο.ε.δ.

Στη συνεχεια συμβολιζω με $(..,..)$ το (κανονικο) εσωτερικο γινομενο του R^n και εξεταζω τα ιδιοδιανυσματα συμμετρικης μητρας:

ΠΡΟΤΑΣΗ-3 Ιδιοδιανυσματα συμμετρικης nxn μητρας ως προς διαφορετ'ικες ιδιοτιμες, ειναι καθετα μεταξυ τους.

Πραγματι, αν λ,μ ειναι διαφορετικες ιδιοτιμες και $\mathbf{x},\mathbf{y}$ αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα, εχουμε

$$\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y})=(A\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},A\mathbf{y})=\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad , \text{ αρα}$$

$(\lambda-\mu)(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$. Επειδη $\lambda-\mu\neq0$ επεται $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$. ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι για τις nxn πραγματικες μητρες A: συμμετρικη, B: ορθογωνια, η $\Gamma=B^tAB$ ειναι συμμετρικη.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι για μια πραγματικη (n-1)x(n-1) ορθογωνια μητρα B η nxn μητρα $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{B} \\ 0 & \end{bmatrix}$ ειναι παλι ορθογωνια.

ΘΕΩΡΗΜΑ Για καθε πραγματικη nxn συμμετρικη μητρα A ύπαρχει ορθογωνια μητρα B, ετσι ωστε B^tAB να ειναι διαγωνια μητρα της μορφης $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$

Αποδεικνυουμε με επαγωγη ως προς n. Για n=1 ισχυει τετριμμενα. Εστω οτι ισχυει για (n-1). Δειχνουμε οτι ισχυει και για n. Πραγματι, ξερουμε οτι η A εχει πραγματικη ιδιοτιμη λ και αντιστοιχο ιδιοδιανυσμα $\mathbf{x}$ ετσι ωστε

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \ . \qquad (*)$$

Το $\mathbf{x}$ μπορουμε να υποθεσουμε μοναδιαιο και να το συμπληρωσουμε σε μια ορθοκανονικη βαση του R^n : $\mathbf{c}_1=\mathbf{x},\mathbf{c}_2,\ldots,\mathbf{c}_n$. Η μητρα C με αυτα τα στηλοδιανυσματα ειναι ορθογωνια και ικανοποιει την

$$C^tAC = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{A'} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

οπου η A' ειναι παλι συμμετρικη μητρα (n-1)x(n-1) διαστασεων.

Πραγματι, αν $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ ειναι η κανονικη βση του R^n τοτε

$$(\mathbf{e}_1,C^tAC\mathbf{e}_j) = (C\mathbf{e}_1,AC\mathbf{e}_j) = (\mathbf{c}_1,A\mathbf{c}_j) = (A\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_j) =$$
$$= \lambda(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_j) = 0 \text{ για } j=2,\ldots,n \ . \qquad (**)$$

Η (*),(**) και η ασκηση-5 αποδεικνυουν τον ισχυρισμο.

Κατα την επαγωγικη υποθεση λοιπον θα υπαρχει (n-1)x(n-1) ορθογωνια μητρα B' ετσι ωστε η $(B')^t(A')(B')$ να ειναι διαγωνια. Τοτε ομως και το γινομενο των ορθογωνιων μητρων $B = C((B')_1)$ (ασκηση-6) θα ειναι παλι ορθογωνια μητρα και θα ισχυει

$$B^tAB = ((B')_1)^tC^tAC((B')_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{(B')^t} \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{A'} \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{B'} \\ 0 & \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{(B')^t(A')(B')} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

που κατα την επαγωγικη υποθεση ειναι διαγωνια. ο.ε.δ.

Παρατηρουμε οτι η μητρα B της προτασης εχει στηλες ιδιοδιανυσματα της A. Πραγματι $B^tAB=\Lambda$ συνεπαγεται $AB=B\Lambda$. Αρα

$$AB\mathbf{e}_i = A\mathbf{b}_i = \lambda_i\mathbf{b}_i = B\Lambda\mathbf{e}_i \quad \text{για } i=1,\ldots,n.$$

Στην πραξη λοιπον για τον προσδιορισμο της B αρκει να βρουμε μια ορθοκανονικη βαση $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ απο ιδιοδιανυσματα της A και να παρουμε την B μ αυτα τα στηλοδιανυσματα.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Βρες μια ορθογωνια μητρα B που κανει διαγωνια την συμμετρικη μητρα α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

§15 ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

> Οταν ο ευγενης μελετα κατι εχει μονο την εγνοια μηπως αυτο δεν ειναι αρκετα ευρυ. Οταν η γνωση του πλαταινει εχει μονο την εγνοια, μηπως δεν μπορει να την εξασκηση. Οταν την εξασκει εχει μονο την εγνοια μηπως δεν κατανοει. Οταν κατανοησει, εχει μονο την εγνοια μηπως δεν μπορεσει να την εφαρμοσει. Οταν δοθει η ευκαιρια να την εφαρμοσει, δινει ιδιαιτερη σημασια στη σεμνοτητα. Η παιδεια του ευγενους ασχολειται μ αυτα τα πεντε πραγματα. Σ αυτα συμπεριλαμβανονται τα παντα.
>
> Ντσουγκ Ντσι

ΑΣΚΗΣΗ-1 Εξετασε ποτε η ενωση δυο διανυσματικων υποχωρων ενος διανυσματικου χωρου V ειναι διανυσματικος υποχωρος.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Εξετασε αν τα επομενα πολυωνυμα ειναι εξαρτημενα η οχι (στο διαν. χωρο K[x]): x^2+2x+1, $2x-1$, $2x^2-2x-1$.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Βρες μια βαση και τη διασταση των χωρων $U, V, U\cap V, U+V$ οπου U και V υποχωροι του R^4 που παραγονται: ο U απο τα (2,1,0,-1), (4,8,-4,-3), (1,-3,2,0), (1,10,-6,-2) και ο V απο τα (1,10,-6,-2), (-2,0,6,1), (3,-1,2,4).

ΑΣΚΗΣΗ-4 Εστω $D: K[x] \longrightarrow K[x]$ με $D(a_o+\ldots+a_nx^n)= a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}$ (παραγωγιση). Εστω ακομη $I: K[x] \longrightarrow K[x]$ η απεικονιση $I(a_o+\ldots+a_nx^n) = a_ox+(a_1/2)x^2+\ldots+(a_n/(n+1))x^{n+1}$ (ολοκληρωση). Δειξε οτι τουτες ειναι γραμμικες απεικονισεις και οτι $D\circ I = Id$, ομως $I\circ D \neq Id$ (οπου Id η ταυτοτικη του K[x] στον εαυτο του). Αντιθετα για K-διανυσματικο χωρο πεπερασμενης διαστασης V και γραμμικες απεικονισεις A,B του V στον εαυτο του, δειξε οτι η $A\circ B = Id$ συνεπαγεται και την $B\circ A = Id$.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Εστω γραμμικη απεικονιση T του R^n στον εαυτο του που διατηρει την καθετοτητα (ως προς κανονικο εσ. γιν.). Δηλαδη $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ συνεπαγεται $(T\mathbf{x},T\mathbf{y})=0$. Δειξε οτι η T ειναι σταθερο πολλαπλασιο μιας ορθογωνιας μητρας.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Εστω V K-διανυσματικος χωρος πεπερασμενης διαστασης. Εστω $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ βαση του V και $f_1,\ldots,f_n$ οι γραμμικες απεικονισεις με $f_i(\mathbf{x})= x_i$ για καθε $\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}_1+\ldots+x_n\mathbf{a}_n$ απο το V. Δειξε οτι οι $f_1,\ldots,f_n$ αποτελουν βαση του διανυσματικου χωρου $V^* = L(V,K)$ = συνολο ολων των γραμμικων απεικονισεων απο τον V στο K. Ο V^* λεγεται <u>δυϊκος του V</u> και η $f_1,\dots,f_n$ <u>δυϊκη βαση της $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$</u> του V.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Με τις υποθεσεις της προηγουμενης ασκησης δειξε οτι για καθε υποχωρο W του V διαστασης k οριζεται ενας υποχωρος W^L του V^* αποτελουμενος ακριβως απο ολες τις $f \in V$ με την ιδιοτητα $f(\mathbf{x})=0$ για καθε $\mathbf{x}$ απο το W. Ο W^L λεγεται <u>μηδενιστης</u> του W και ειναι διαστασης $n-k$. Δειξε τον τελευταιο ισχυρισμο και ακομη οτι το $\mathbf{x}$ ανηκει στον W τοτε και μονον οταν $f(\mathbf{x})=0$ για καθε f απο το W^L.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Βρες τον μηδενιστη των υποχωρων του R^4 που παραγονται α) απο τα $(1,0,0,0)$ και $(0,1,0,0)$
β) απο τα $(1,2,3,0)$ και $(0,3,2,1)$.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Βρες τις αντιστροφες των μητρων

α) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & a_2 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ΑΣΚΗΣΗ-10 Δειξε οτι το χαρακτηριστικο πολυωνυμο της μητρας

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots\dots & -a_o \\ 1 & 0 & \dots\dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 \dots & -a_2 \\ 0 & 0 & 1\ 0 \dots & -a_3 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots 1\ 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots 0\ 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

ειναι το πολυωνυμο

$$(-1)^n(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_o).$$

ΑΣΚΗΣΗ-11 Υπαρχει μητρα A του $M_K(n,n)$ ετσι ωστε ολες οι μητρες της μορφης $A+\lambda I_n$, με λ απο το K αυθαιρετο, να ειναι αντιστρεψιμες; Δωσε παραδειγματα.

ΑΣΚΗΣΗ-12 Κατασκευασε μητρα τετραγωνικη της οποιας το αθροισμα των στοιχειων καθε γραμμης ειναι 1. Δειξε οτι $\lambda=1$ ειναι μια ιδιοτιμη αυτης της μητρας και βρες αντιστοιχο ιδιοδιανυσμα.

ΑΣΚΗΣΗ-13 Εξηγησε γιατι η ταξη μιας $m\times n$ μητρας δεν μπορει να ειναι μεγαλυτερη απο το m ή το n.

ΑΣΚΗΣΗ-14 Για πραγματικο χωρο V πεπερασμενης διαστασεως με εσωτερικο γινομενο δειξε οτι ισχυει ο κανονας του παραλληλογραμμου:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2+|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2).$$

ΑΣΚΗΣΗ-15 Για καθε μητρα A ο αριθμος $tr(A)=a_{11}+\ldots+a_{nn}$ οριζει μια γραμμικη απεικονιση του $M_K(n,n)$ στο K. Δειξε οτι ισχυει $tr(AB)=tr(BA)$. Δειξε ακομη οτι για πραγματικες μητρες το $(A,B) = tr(A^tB)$ οριζει ενα εσωτερικο γινομενο στο $M_R(n,n)$. Βρες τελος μια ορθοκανονικη βαση του $M_R(n,n)$ ως προς αυτο το εσωτερικο γινομενο.

ΑΣΚΗΣΗ-16 Για το εσωτερικο γινομενο του $M_R(n,n)$ που οριζεται στην προηγουμενη ασκηση, δειξε οτι το συνολο των συμμετρικων μητρων ($A^t=A$) αποτελει υποχωρο του $M_R(n,n)$ και το συνολο των αντισυμμετρικων μητρων ($A^t=-A$) συμπιπτει με το ορθογωνιο συμπληρωμα του προηγουμενου υποχωρου.

ΑΣΚΗΣΗ-17 Δειξε οτι καθε nxn μητρα γραφεται κατα ενα και μονον τροπο σαν αθροισμα μιας συμμετρικης και μιας αντισυμμετρικης μητρας.

ΑΣΚΗΣΗ-18 Δειξε οτι μια μητρα nxn διαστασεων A που μετατιθεται με ολες τις μητρες B (AB=BA) ειναι της μορφης $A=\lambda I_n$.

ΑΣΚΗΣΗ-19 Υπολογισε την οριζουσα της μητρας Van der Monde

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

και δειξε οτι ισουται με

$$\pm\prod_{i<j} (x_i-x_j) .$$

ΑΣΚΗΣΗ-20 Εστω $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ ορθογωνια ανα δυο διανυσματα του R^n (με κανονικο εσ. γιν.). Δειξε οτι η απολυτος τιμη της οριζουσας της μητρας B που εχει αυτα τα στηλοδιανυσματα ισουται με $|\mathbf{b}_1||\mathbf{b}_2|\ldots|\mathbf{b}_n|$.

ΑΣΚΗΣΗ-21 Εστω V n-διαστατος K-διανυσματικος χωρος. <u>Διγραμμικη μορφη</u> του V λεγεται μια απεικονιση $\varphi : V\times V \longrightarrow K$ που ειναι γραμμικη απεικονιση ως προς καθε μια απο τις δυο μεταβλητες της. Αν $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ βαση του V, δειξε οτι η φ καθοριζεται μονοσημαντα απο την μητρα A με στοιχεια $a_{ij}= \varphi(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)$. Για μια αλλη βαση $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ με

$$\mathbf{b}_i=\lambda_{1i}\mathbf{a}_1+\ldots+\lambda_{ni}\mathbf{a}_n \quad \text{για } i=1,\ldots,n$$

και την μητρα B με στοιχεια $b_{ij} = \varphi(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_j)$ δειξε οτι $B=\Lambda^tA\Lambda$.

ΑΣΚΗΣΗ-22 Δειξε οτι για καθε συμμετρικη διγραμμικη μορφη ενος n-διαστατου πραγματικου διανυσματικου χωρου (συμμετρικη σημαινει $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})=\varphi(\mathbf{y},\mathbf{x})$) υπαρχει βαση του $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ ως προς την οποια

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lambda_1 x_1 y_1+\lambda_2 x_2 y_2+\ldots+\lambda_n x_n y_n$$

για καθε $\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}_1+\ldots+x_n\mathbf{a}_n$ και $\mathbf{y}=y_1\mathbf{a}_1+y_2\mathbf{a}_2+\ldots+y_n\mathbf{a}_n$.

ΑΣΚΗΣΗ-23 Μια συμμετρικη μητρα απο το $M_R(n,n)$ λεγεται <u>θετικα ορισμενη</u> οταν $(A\mathbf{x},\mathbf{x})>0$ για καθε $\mathbf{x}\neq\mathbf{O}$. Για μια τετοια μητρα A δειξε οτι και η B^tAB ειναι επισης θετικα ορισμενη για καθε αντιστρεψιμη μητρα B. Δειξε ακομη οτι καθε τετοια μητρα εχει θετικες ιδιοτιμες.

ΑΣΚΗΣΗ-24 Εστω V n-διαστατος πραγματικος διανυσματικος χωρος και $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ βαση αυτου. Δειξε οτι η αντιστοιχια που σε καθε εσωτερικο γινομενο $\varphi(..,..)$ του V αντιστοιχει την μητρα A_φ με στοιχεια $a_{ij}=\varphi(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)$ οριζει μια 1-1 και επι απεικονιση του συνολου S των εσωτερικων γινομενων του V, στο συνολο P των θετικα ορισμενων συμμετρικων μητρων του $M_R(n,n)$.

ΑΣΚΗΣΗ-25 Δειξε οτι για καθε αντιστρεψιμη μητρα A απο το $M_R(n,n)$ η μητρα $B=A^tA$ ειναι θετικα ορισμενη συμμετρικη. Δειξε ακομη οτι μια συμμετρικη πραγματικη μητρα ειναι θετικα ορισμενη τοτε και μονον, οταν ολες οι ιδιοτιμες της ειναι θετικες.

ΑΣΚΗΣΗ-26 Δειξε οτι για καθε συμμετρικη θετικα ορισμενη μητρα A υπαρχει η <u>ριζα</u> της $\sqrt{A} = B$, δηλαδη μια μητρα B για την οποι $B^2=A$. [Αναγαγε την A σε διαγωνια $U^tAU=\Lambda$, δειξε οτι υπαρχει η $\sqrt{\Lambda} = \Delta$ και παρε $B=U\Delta U^t$.]

ΑΣΚΗΣΗ-27 Δειξε οτι καθε αντιστρεψιμη μητρα A του $M_R(n,n)$ γραφεται με ενα ακριβως τροπο σαν γινομενο $A=US$ οπου U ορθογωνια και S συμμετρικη θετικα ορισμενη μητρα. [Παρε την $B=A^tA$ δειξε οτι εχει ριζα Γ και οτι η $U=A(\Gamma^{-1})$ ειναι ορθογωνια.]

ΑΣΚΗΣΗ-28 Δειξε οτι $|A|$ ειναι ο σταθερος ορος του χαρακτηριστικου πολυωνυμου της nxn μητρας A και $\pm tr(A)$ ειναι ο συντελεστης του x^{n-1}. Βρες τον συντελεστη του x^n.

ΑΣΚΗΣΗ-29 Εστω W διανυσματικος υποχωρος του K-διανυσματικου χωρου V. Δειξε οτι $\mathbf{x}\sim\mathbf{y}$ οταν $\mathbf{x}-\mathbf{y}\in W$, οριζει μια σχεση ισοδυναμιας στο V. Το συνολο των κλασσεων ισοδυναμιας συμβολιζω με V/W και ονομαζω <u>χωρο πηλικον του W</u>. Εστω $[\mathbf{x}]$ η κλαση ισοδυναμιας που περιεχει το διανυσμα $\mathbf{x}$ του V. Δειξε οτι

$$[\mathbf{x}]+[\mathbf{y}] = [\mathbf{x}+\mathbf{y}] \quad \text{και}$$
$$\lambda[\mathbf{x}] = [\lambda\mathbf{x}]$$

οριζουν πραξεις που κανουν το V/W διανυσματικο χωρο. Η απεικονιση $\pi : V \longrightarrow V/W$ με $\pi(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]$ λεγεται <u>κανονικη προβολη</u> του V στο V/W. Δειξε οτι η π ειναι γραμμικη απεικονιση και

α) $\mathrm{Ker}\pi = W$, $\mathrm{Im}\pi = V/W$.

β) Αν $\dim V=n$ και $\dim W=m$, τοτε $\dim(V/W)=n-m$.

γ) Αν τα $[\mathbf{x}_1],\ldots,[\mathbf{x}_k]$ ειναι ανεξαρτητα διανυσματα του V/W τοτε τα $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ ειναι ανεξαρτητα διανυσματα του V και επι πλεον κανενας γραμμικος συνδυασμος τους δεν περιεχεται στο W.

ΑΣΚΗΣΗ-30 Εστω $F : V_1 \longrightarrow V_2$ γραμμικη απεικονιση μεταξυ δυο K-διανυσματικων χωρων και W_1, W_2 διανυσματικοι υποχωροι των V_1,V_2 αντιστοιχως. Εστω οτι $F(W_1)\subset W_2$. Οριζεται η απεικονιση $\bar{F} : V_1/W_1 \longrightarrow V_2/W_2$ με $\bar{F}([\mathbf{x}])=[F(\mathbf{x})]$. Δειξε οτι η $\bar{F}$ ειναι καλως ορισμενη γραμμικη απεικονιση και $\pi_2\circ F = \bar{F}\circ\pi_1$ οπου $\pi_i: V_i \longrightarrow V_i/W_i$ οι κανονικες προβολες.

ΑΣΚΗΣΗ-31 Με τις υποθεσεις της ασκησης 29 εστω επι πλεον οτι U ειναι ενας υποχωρος του V ετσι ωστε $V=U\oplus W$ (συμπληρωμα του W). Δειξε οτι ο περιορισμος $\pi|U : U \longrightarrow V/W$ ειναι ισομορφισμος.

> Και πρεπει απο τις ψυχικες (ασθενειες) πρωτη και μεγιστη να λογαριαζουμε την αγνοια, με τη βοηθεια της οποιας, στους πολλους, η κακια αθεραπευτη συγκατοικει συμβιωνει και συναποθνησκει. Διοτι η αρχη της απαλλαγης ειναι η αισθηση της νοσου που οδηγει στην αναγκη βοηθειας αυτου που πασχει. Αυτος ομως που αγνοει πως πασχει, ακομη και μπροστα του να ειναι η θεραπεια, την αρνειται.
>
> Πλουταρχου, Ηθικα 500 Ε.

> Οπως τονισαμε προηγουμενως, καθε προβλημα που γεννιεται στη ζωη μας θα πρεπει να λυνεται αμεσα ή οσο το δυνατον πιο γρηγορα, διοτι τα προβληματα, οταν μεταφερονται απο μερα σε μερα, εκφυλιζουν την ευαισθησια ολκληρου του νου.
>
> Κρισναμουρτι

2

Ο δισκος της Φαιστου. Δεν εχει ακομη αποκρυπτογραφηθει. Πιθανως το περιεχομενο του να ειναι παραπλησιο του ρητου του Κοραη:

> Εις ολιγα λογια, τα φιλομουσα μειρακια των Γραικων πρεπει να κρατωσι παντοτε τουτο εις τον νουν, οτι αι Μουσαι ειναι παρθενοι, και αποστρεφονται τους οσοι με παρθενικην ψυχην δεν τας πλησιαζουσιν.

§16 ΤΕΛΕΣΤΕΣ, ΗΜΙΑΠΛΟΤΗΣ

Τελεστης ή ενδομορφισμος λεγεται μια γραμμικη απεικονιση $F: V \longrightarrow V$ ενος K-διανυσματικου χωρου στον εαυτο του. Εστω $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ βαση του V. Συμφωνα με την §10 οριζεται η μητρα παραστασης Λ της F ως προς τη βαση αυτη ετσι ωστε $F_\Lambda = S_{\mathbf{a}} \circ F \circ S_{\mathbf{a}}^{-1}$ της οποιας τα στηλοδιανυσματα $(\lambda_{1i},\dots,\lambda_{ni})$ ειναι οι συντεταγμενες των $F(\mathbf{a}_i)$ ως προς $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$:

$$F(\mathbf{a}_i) = \lambda_{1i}\mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_{ni}\mathbf{a}_n .$$

Αλλαγη βασης·

$$\mathbf{b}_i = s_{1i}\mathbf{a}_1 + \dots + s_{ni}\mathbf{a}_n$$

δινει μητρα παραστασης $\hat{\Lambda}$ ως προς αυτη τη βαση και κατα τον (11):

$$\hat{\Lambda} = S^{-1}\Lambda S \quad . \tag{20}$$

Γενικωτερα, δυο μητρες $\hat{\Lambda}$, Λ που ικανοποιουν την (20) με S αντιστρεψιμη μητρα, λεγονται <u>ομοιες</u>. Διαπιστωνουμε λοιπον ευκολα οτι ομοιες μητρες παριστουν τον ιδιο τελεστη $F: V \longrightarrow V$ ως προς διαφορετικες βασεις του V. Ενα γενικωτερο προβλημα που θα μας απασχολησει στα επομενα μαθηματα ειναι το

> **ΠΡΟΒΛΗΜΑ** Δοθεντος τελεστη $F: V \longrightarrow V$, να βρεθη καταλληλη βαση ως προς την οποια η μητρα παραστασης της F να εχει την απλουστερη δυνατη μορφη.

Στην γλωσσα των μητρων το ιδιο προβλημα διατυπωνεται:

> **ΠΡΟΒΛΗΜΑ** Δοθησης nxn μητρας A, να βρεθη ομοια προς αυτην $B=S^{-1}AS$, που εχει την απλουστερη δυνατη μορφη.

Μια ειδικη περιπτωση αυτου του προβληματος αντιμετωπισαμε ηδη για τις συμμετρικες μητρες. Το θεωρημα της §14 δειχνει οτι πραγματικες συμμετρικες μητρες ειναι ομοιες προς διαγωνιες. Οι διαγωνιες μητρες ειναι απο πολλες αποψεις, οι απλουστερες απ ολες τις μητρες. Για γενικωτερες (μη συμμετρικες) μητρες δεν περιμενουμε φυσικα να ειναι ομοιες προς καποιες διαγωνιες. Τουτο δεν αληθευει εν γενει. Μπορουμε ομως να δειξουμε για μιγαδικες και πραγματικες μητρες οτι ειναι ομοιες προς "σχεδον διαγωνιες", τελος παντων μητρες πολυ απλης μορφης. Αυτα αργοτερα, εδω ας κανουμε μερικες γενικες παρατηρησεις για ενδομορφισμους.

Πρωτα, οτι ομοιες μητρες εχουν το ιδιο χαρακτηριστικο πολυωνυμο. Πραγματι, $|S^{-1}AS-\lambda I| = |S^{-1}(A-\lambda I)S| = |S^{-1}||A-\lambda I||S| = |A-\lambda I|$.

Αρα μπορουμε να ορισουμε σαν χαρακτηριστικο πολυωνυμο ενος τελεστη F το χαρακτηριστικο πολυωνυμο μιας οποιασδηποτε μητρας A που παριστα τον F ως προς καποια βαση του V.

Κατοπιν ας παρατηρησουμε οτι το συνολο L(V,V) των ενδομορφισμων του V (ασκηση 8-13) εχει δομη "αλγεβρας". Δηλαδη περα απο την προσθεση: F+G και τον πολλαπλασιασμο με σταθερα: λF, μπορουμε να πολλαπλασιασουμε μεταξυ τους τους τελεστες και να παρουμε την συνθεση των απεικονισεων FG ή GF. Μπορουμε ακομη να παρουμε δυναμεις $F, F^2, F^3, \ldots, F^n, \ldots$ και γενικωτερα αν

$$p(x)=a_nx^n+ \ldots +a_1x+a_o$$

πολυωνυμο απο το K[x], μπορουμε να αντικαταστησουμε τον F στη θεση του x και στη θεση της σταθερας τον a_oI (I: ο ταυτοτικος τελεστης) και να παρουμε παλι τελεστη που συμβολιζουμε με p(F) :

$$p(F) = a_nF^n+ \ldots +a_1F+a_oI .$$

Αντικαθιστωντας το x με το F σε ταυτοτητες πολυωνυμων, παιρνουμε ταυτοτητες για ενδομορφισμους. Τουτο διοτι εκεινες οι πραξεις που επιτρεπονται μεταξυ σταθερων απο το σωμα K και το x, οι ιδιες ακριβως επιτρεπονται και μεταξυ σταθερων και του τελεστη F. Ετσι λ.χ.

$$(x+1)(x-1) =x^2-1$$

δινει, βαζοντας στην αριστερη πλευρα F στη θεση του x και εκτελωντας τις πραξεις (μεταξυ τελεστων):

$$(F+I)(F-I) = F^2+F-F-I = F^2-I .$$

Σημειωνω οτι οταν dimV=n τοτε $\dim L(V,V)=n^2$. Αρα απο τις δυναμεις $I, F, F^2, \ldots, F^k, \ldots$ το πολυ οι n^2 πρωτες να ειναι ανεξαρτητες (σαν διανυσματα του L(V,V)). Αρα υπαρχουν για καποιο k σταθερες $a_o, a_1, \ldots, a_k$ ετσι ωστε

$$a_kF^k+ \ldots +a_1F+a_oI = 0 \text{ (= μηδενικος τελεστης).}$$

Με αλλα λογια υπαρχουν πολυωνυμα p(x) με p(F)=0. Τα πολυωνυμα αυτα εξαρτωνται απο τον F και παιζουν σημαντικο ρολο στην αναλυση του F. Εξ ισου σημαντικοι ειναι και οι <u>F-αναλλοιωτοι διανυσματικοι υποχωροι</u> που οριζονται απο την ιδιοτητα:

$$F(W) \subset W.$$

Ασφαλως οι απλουστεροι ενδομορφισμοι ειναι οι <u>διαγωνιοποιησιμοι</u> για τους οποιους -εξ ορισμου- υπαρχει μια βαση του V $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ που αποτελειται απο <u>ιδιοδιανυσματα του F</u> :

$$F(\mathbf{a}_i) = \lambda_i \mathbf{a}_i \quad \text{για } i=1,\ldots,n.$$

Τα V_i = συνολο ιδιοδιανυσματων ως προς την ιδιοτιμη λ_i του F, αποτελουν διανυσματικους υποχωρους του V που οριζουν μια διασπαση του V

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k \qquad (*)$$

αν υπαρχουν k διαφορετικες ιδιοτιμες $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}$. Καθε V_i ειναι F-αναλλοιωτος και ο περιορισμος

$F|V_r = \lambda_{i_r} I_r$, οπου I_r ο ταυτοτικος τελεστης του V_r.

Διαλεγοντας βασεις των V_1, $V_2, \ldots$ βρισκουμε συνολικα βαση του V ως προς την οποια η μητρα παραστασης του F εχει την απλουστατη διαγωνια μορφη:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\lambda_{i_1} I_1} & & & \\ & \boxed{\lambda_{i_2} I_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_{i_k} I_k} \end{bmatrix}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ Καθε F-αναλλοιωτος υποχωρος W ενος διαγωνιοποιησιμου τελεστη εχει βαση $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ που αποτελειται απο ιδιοδιανυσματα του F.

Πραγματι, αρκει να δειξω οτι

$$W = (W \cap V_1) \oplus \ldots \oplus (W \cap V_k)$$

διοτι διαλεγοντας τοτε βασεις στα $W \cap V_1$, $W \cap V_2, \ldots$ θα παιρνουμε συνολικα τη βαση του W που χρειαζομαστε.

Η σχεση $W \supset (W \cap V_1) \oplus \ldots \oplus (W \cap V_k)$ ειναι τετριμμενη.

Η σχεση $W \subset (W \cap V_1) \oplus \ldots \oplus (W \cap V_k)$ αποδεικνυεται γραφοντας το τυχον $\mathbf{x}$ του W σαν αθροισμα συμφωνα με την (*)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k \quad \text{με } \mathbf{x}_i \text{ απο το } V_i$$

και αποδεικνυοντας οτι τα $\mathbf{x}_i$ ανηκουν κι αυτα στο W.

Πραγματι, επειδη ο W ειναι F-αναλλοιωτος, τα επομενα διανυσματα ανηκουν ολα στο W:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k \\ F(\mathbf{x}) &= \mu_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \mu_k \mathbf{x}_k \\ F^2(\mathbf{x}) &= \mu_1^2 \mathbf{x}_1 + \ldots + \mu_k^2 \mathbf{x}_k \qquad (**) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F^{k-1}(\mathbf{x}) &= \mu_1^{k-1} \mathbf{x}_1 + \ldots + \mu_k^{k-1} \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

οπου εθεσα για ευκολια $\lambda_{i_1} = \mu_1$, $\lambda_{i_2} = \mu_2, \ldots, \lambda_{i_k} = \mu_k$ για τις διαφορετικες μεταξυ τους ιδιοτιμες της F. Συλλογιζομαι τωρα με την βοηθεια της ασκησης 15-7. Αν η γραμμικη συναρτηση $f: V \longrightarrow K$ μηδενιζεται στο W τοτε θα ισχυει και

$$f(x)=f(F(x))=f(F^2(x))=\ldots=f(F^{k-1}(x))=0.$$

Τουτη, λογω της (**) δινει το συστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_k \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \ldots & \mu_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_1^{k-1} & & \ldots & \mu_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_k) \end{bmatrix} = O$$

της οποιας η οριζουσα (Van der Monde ασκηση 15-19) ειναι μη μηδενικη αφου τα μ_i ειναι διαφορετικα μεταξυ τους. Επεται

$$f(x_1)=f(x_2)=\ldots=f(x_k)=0 .$$

Τουτη για καθε f που μηδενιζεται στο W. Αρα τα $x_1,\ldots,x_k$ ανηκουν στο W. ο.ε.δ.

<u>Ημιαπλοι</u> λεγονται τελεστες $F: V \longrightarrow V$ που χαρακτηριζονται απο την ιδιοτητα

"Για καθε F-αναλλοιωτο υποχωρο W_1 του V υπαρχει F-αναλλοιωτος υποχωρος W_2 ετσι ωστε $W_1 \oplus W_2 = V$ "

Με αλλα λογια καθε F-αναλλοιωτος υποχωρος εχει ενα F-αναλλοιωτο συμπληρωμα στο V. Το επομενο θεωρημα δειχνει οτι για αλγεβρικα κλειστα σωματα (οπως το C των μιγαδικων αριθμων) ημιαπλοτητα και διαγωνιοποιησιμοτητα ειναι ταυτοσημες εννοιες.

ΘΕΩΡΗΜΑ Εστω $F : V \longrightarrow V$ τελεστης K-διανυσματικου χωρου και K αλγεβρικα κλειστο σωμα. Τοτε ο F ειναι διαγωνιοποιησημος αν και μονον αν ειναι ημιαπλος.

Πραγματι, αν ο F ειναι διαγωνιοποιησιμος και W_1 ειναι F-αναλλοιωτος υποχωρος, τοτε κατα την προταση εχει βαση $b_1,\ldots,b_m$ απο ιδιοδιανυσματα του F. Συμπληρωσε με ιδιοδιανυσματα $b_{m+1},\ldots,b_n$ σε βαση του V και παρε $W_2 = \langle b_{m+1},\ldots,b_n\rangle$.
Το αντιστροφο χρειαζεται την κλειστοτητα του σωματος και επαγωγη ως προς την διασταση του χωρου. Πραγματι εστω οτι η προταση ισχυει για (n-1)-διαστατους χωρους (για n=1 ισχυει τετριμμενα). Λογω της κλειστοτητας του K υπαρχει ιδιοτιμη λ του F και αντιστοιχο ιδιοδιανυσμα b_1 του V με $F(b_1)=\lambda b_1$. Ο υποχωρος $W_1 = \langle b_1\rangle$ ειναι F-αναλλοι-

ωτος. Αρα κατα την υποθεση θα υπαρχει W_2 F-αναλλοιωτος υποχωρος συμπληρωματικος του W_1 και διαστασης (n-1). Ο $F_2 = F|W_2$ ειναι παλι ημιαπλος, αρα κατα την επαγωγικη υποθεση διαγωνιοποιησιμος με βαση $\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_n$ απο ιδιοδιανυσματα του F. Ως προς την βαση $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ η μητρα παραστασης της F ειναι διαγωνια. ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι ομοιες μητρες εχουν ιδιες οριζουσες και ιχνος (=αθροισμα διαγωνιων στοιχειων). Ορισε την οριζουσα και το ιχνος τελεστη μεσω των ιδιων εννοιων για μια οποιαδηποτε μητρα παραστασης της F. Δειξε οτι η οριζουσα ειναι ο σταθερος ορος του χαρακτηριστικου πολυωνυμου του F και το ιχνος ο ±συντελεστης του (n-1)-βαθμιου ορου του.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι καθε F-αναλλοιωτος υποχωρος ειναι και p(F)-αναλλοιωτος οπου p(x) τυχον πολυωνυμο. Δειξε ακομη οτι αν ο τελεστης εχει αντιστροφο F^{-1}, τοτε καθε F-αναλλοιωτος υποχωρος ειναι και F^{-1}-αναλλοιωτος.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε για μετατιθεμενους τελεστες F, G, οτι καθε ιδιοχωρος του ενος ειναι και αναλλοιωτος υποχωρος του αλλου.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Εστω οτι $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ειναι ιδιοδιανυσματα ενος τελεστη F ως προς διαφορετικες ιδιοτιμες του. Δειξε οτι το $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}$ με $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$ δεν ειναι ιδιοδιανυσμα του F. Γενικευσε την ασκηση για k ιδιοδιανυσματα $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_k$ ως προς διαφορετικες μεταξυ τους ιδιοτιμες του F.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι τελεστης F, για τον οποιον καθε διανυσμα του V ειναι ιδιοδιανυσμα του, ειναι της μορφης λI.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δωσε παραδειγμα τελεστη F που δεν εχει ιδιοδιανυσματα, ενω ο F^2 εχει. Δειξε οτι αν ο τελεστης F^2 εχει ιδιοδιανυσμα ως προς μη αρνητικη ιδιοτιμη, τοτε και ο F εχει ιδιοδιανυσμα.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Βρες ολους τους F-αναλλοιωτους υποχωρους ενος ημιαπλου τελεστου του n-διαστατου διανυσματικου χωρου V, που εχει ολες τις ιδιοτιμες του διαφορετικες μεταξυ τους. Δειξε οτι υπαρχουν 2^n απο δαυτους.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Δειξε οτι για μετατιθεμενους μεταξυ τους τελεστες ισχυει

$$(A+B)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} A^n B^{k-n} .$$

ΑΣΚΗΣΗ-9 Βρες ολες τις μητρες $A \in M_R(2,2)$ με $A^2 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ-10 Στο διανυσματικο χωρο K[x] των πολυωνυμων οριζονται οι τελεστες $Ap(x) = p'(x)$ (παραγωγος του $p(x)$) και $Bp(x) = xp(x)$. Δειξε οτι $AB-BA = I$ (I ο ταυτοτικος του K[x]). Δειξε οτι σε χωρο V πεπερασμενης διαστασης, δεν υπαρχουν τελεστες A,B με την ιδιοτητα $AB-BA=I$ [παρε το ιχνος των δυο πλευρων και δες την ασκηση 15-15].

ΑΣΚΗΣΗ-11 Εστω F τελεστης n-διαστατου διανυσματικου χωρου V με την ιδιοτητα $F^n=0$ αλλα $F^{n-1}\neq 0$. Δειξε οτι

α) Υπαρχει διανυσμα $\mathbf{a}$ με $F^{n-1}(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$.

β) Γι αυτο το $\mathbf{a}$, τα διανυσματα $\mathbf{a}, F(\mathbf{a}),\dots,F^{n-1}(\mathbf{a})$ ειναι ανεξαρτητα και αποτελουν βαση του V.

γ) Ως προς αυτη την βαση η μητρα παραστασης του F ειναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & & \\ . & 1 & 0 & 0 & \dots & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

δ) Εκτος του μηδενικου και του ιδιου του V, δεν υπαρχουν αλλοι μη τετριμμενοι F-αναλλοιωτοι υποχωροι W του V με $F(W) = W$.

ΑΣΚΗΣΗ-12 Δειξε οτι δυο μητρες A,B του $M_K(n,n)$ που ικανοποιουν την $A^n=B^n=0$, αλλα $A^{n-1} \neq 0$, $B^{n-1} \neq 0$, ειναι ομοιες.

ΑΣΚΗΣΗ-13 Δειξε οτι οι ιδιοτιμες ενος τελεστη ειναι οι ριζες του χαρακτηριστικου πολυωνυμου του.

ΑΣΚΗΣΗ-14 Η <u>ταξη</u> ενος τελεστη F οριζεται σαν την διασταση του ImF. Δειξε οτι τουτη ισουται με την ταξη μιας οποιασδηποτε μητρας παραστασης του F. Δειξε ακομη οτι καθε τελεστης ταξης k γραφεται σαν αθροισμα k τελεστων ταξης 1.

ΑΣΚΗΣΗ-15 Εστω F τελεστης του n-διαστατου διανυσματικου χωρου V και W k-διαστατος F-αναλλοιωτος υποχωρος του V . Εστω $\mathbf{a}_{k+1},\dots,\mathbf{a}_n$ διανυσματα του V ετσι ωστε $[\mathbf{a}_{k+1}],\dots,[\mathbf{a}_n]$ να αποτελουν βαση του V/W (ασκηση 15-29). Δειξε οτι τα διανυσματα αυτα μπορουν να συμπληρωθουν με τη βοηθεια μιας βασης $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ του W σε μια βαση του V ως προς την οποια η παρασταση της F ειναι της μορφης: $\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$ οπου A kxk, B kxn και C nxn διαστασεων αντιστοιχως.

§17 ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Εστω $F: V \longrightarrow V$ τελεστης του n-διαστατου K-διανυσματικου χωρου V. Το συνολο των πολυωνυμων

$$\Pi(F) = \{p(x) \in K[x],\ \mu\varepsilon\ p(F)=0\}$$

ειναι, οπως σημειωσαμε στην προηγουμενη παραγραφο, μη κενο. Εστω $m(x)$ ενα πολυωνυμο ελαχιστου βαθμου απο το $\Pi(F)$. Το $m(x)$ διαιρει ολα τα πολυωνυμα του $\Pi(F)$. Πραγματι, για ενα τυχον $p(x)$ του $\Pi(F)$ η διαιρεση με το $m(x)$ δινει

$$p(x) = q(x)m(x) + v(x)\ , \qquad (*)$$

οπου $\beta\alpha\vartheta\mu o\varsigma v(x) < \beta\alpha\vartheta\mu o\varsigma m(x)$. Τοτε αντικαθιστωντας στην (*) το x με τον F, εχουμε $v(F)=0$, που αντιφασκει στην επιλογη του $m(x)$. Διαιρωντας με τον συντελεστη του μεγιστοβαθμιου ορου, συμπεραινουμε οτι υπαρχει ενα ακριβως πολυωνυμο ελαχιστου βαθμου στο $\Pi(F)$ με μεγιστοβαθμιο συντελεστη 1. Τουτο συμβολιζω με $m_F(x)$ και ονομαζω <u>ελαχιστο πολυωνυμο του F</u>.

Ταυτιζοντας μια μητρα $\Lambda \in M_K(n,n)$ με τον τελεστη $F_\Lambda : K^n \longrightarrow K^n$, βλεπουμε οτι οριζεται και το ελαχιστο πολυωνυμο της μητρας Λ που συμβολιζω με $m_\Lambda(x)$. Τουτο ειναι το ελαχιστου βαθμου πολυωνυμο

$$p(x)= x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k$$

στο οποιο αντικαθιστωντας το x με την μητρα Λ, εχουμε $p(\Lambda)=0$. Το αξιοσημειωτο ειναι οτι το ελαχιστο πολυωνυμο $m_F(x)$ ενος τελεστη F ισουται με το ελαχιστο πολυωνυμο $m_\Lambda(x)$ της μητρας Λ που παριστα τον F ως προς καποια βαση $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n$ του V. Πραγματι η σχεση

$$F_\Lambda = S_{\mathfrak{a}} \circ F \circ S_{\mathfrak{a}}^{-1}$$

μεταξυ του F και της Λ (§16), εχει σαν συνεπεια την

$$(F_\Lambda)^k=(S_{\mathfrak{a}} \circ F \circ S_{\mathfrak{a}}^{-1})^k = (S_{\mathfrak{a}} \circ F \circ S_{\mathfrak{a}}^{-1})(S_{\mathfrak{a}} \circ F \circ S_{\mathfrak{a}}^{-1})\ldots(S_{\mathfrak{a}} \circ F \circ S_{\mathfrak{a}}^{-1}) =$$
$$= S_{\mathfrak{a}} \circ (F^k) \circ S_{\mathfrak{a}}^{-1}$$

και επομενως και για τυχον πολυωνυμο $p(x)$ του $K[x]$

$$p(F_\Lambda) = p(S_{\mathfrak{a}} \circ F \circ S_{\mathfrak{a}}^{-1}) = S_{\mathfrak{a}} \circ p(F) \circ S_{\mathfrak{a}}^{-1}\ .$$

Επειδη ομως η απεικονιση $S_{\mathfrak{a}}$ ειναι ισομορφισμος θα εχουμε $p(F_\Lambda)=0$ τοτε και μονον, οταν $p(F)=0$.

Το ελαχιστο πολυωνυμο διαιρει παντοτε το χαρακτηριστικο πολυωνυμο $\chi(x)$ του τελεστη F. Τουτο ειναι αμεση συνεπεια του θεωρηματος των Cayley και Hamilton :

ΘΕΩΡΗΜΑ-1 Αν $\chi(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ειναι το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του τελεστη F, τοτε $\chi(F) = a_n F^n + \ldots + a_0 I = 0$.

Χρησιμοποιω την μητρα παραστασης Λ της F ως προς την βαση $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Το χαρακτηριστικο πολυωνυμο της Λ οριζεται απο την

$$\chi(x) = |\Lambda - xI| = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

και ικανοποιει την σχεση

$$\operatorname{adj}(\Lambda - xI)(\Lambda - xI) = \chi(x) I , \qquad (**)$$

οπου η $\operatorname{adj}(\Lambda - xI)$ ειναι η αναστροφος της μητρας των συμπαραγοντων της $\Lambda - xI$ (§13) και λεγεται <u>προσαρτημενη</u> της $\Lambda - xI$. Το ij-στοιχειο της ισουται με $(-1)^{i+j} b_{ji}$, οπου b_{ji} η οριζουσα που προκυπτει απο την $\Lambda - xI$ παραλειποντας την j-γραμμη και την i-στηλη. Σημειωνω οτι το b_{ji} ειναι πολυωνυμο βαθμου το πολυ $n-1$, αρα βγαζοντας τις δυναμεις του x σαν κοινους παραγοντες θα εχουμε

$$\operatorname{adj}(\Lambda - xI) = x^{n-1}A_1 + x^{n-2}A_2 + \ldots + xA_{n-1} + A_n$$

οπου $A_1, \ldots, A_n$ σταθερες μητρες. Η (**) δινει τοτε

$$(x^{n-1}A_1 + \ldots + A_n)(\Lambda - xI) = \chi(x) I.$$

Συγκρινοντας τους συντελεστες των ιδιων δυναμεων του x εχουμε:

$$\begin{aligned} -A_1 &= a_n I \\ A_1\Lambda - A_2 &= a_{n-1} I \\ A_2\Lambda - A_3 &= a_{n-2} I \\ &\cdots\cdots \\ A_{n-1}\Lambda - A_n &= a_1 I \\ A_n\Lambda &= a_0 I \end{aligned}$$

Πολλαπλασιαζοντας με Λ^n την πρωτη, με Λ^{n-1} τη δευτερη, Λ^{n-2} την τριτη, κ.ο.κ. και προσθετοντας κατα μελη τις ισοτητες παιρνουμε

$$0 = a_n\Lambda^n + a_{n-1}\Lambda^{n-1} + \ldots + a_1\Lambda + a_0 I \qquad \text{ο.ε.δ.}$$

Το θεωρημα δειχνει λοιπον οτι το ελαχιστο πολυωνυμο θα εχει βαθμο το πολυ n. Η γενικη ιδεα για την αναλυση ενος τελεστη F ειναι να πετυχουμε μια διασπαση του V, $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$ σε F-αναλλοιωτους υποχωρους, σε καθεναν απο τους οποιους η F δρα με απλο τροπο. Τουτο γινεται ακριβως με την βοηθεια του ελαχιστου πολυωνυμου και των δυο επομενων προτασεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ-1 Αν το ελαχιστο πολυωνυμο του τελεστη F ειναι γινομενο $m(x) = p_1(x)p_2(x)$ δυο πρωτων μεταξυ τους πολυωνυμων, τοτε ο V διασπαται σ ενα ευθυ αθροισμα δυο υποχωρων του V, $V = V_1 \oplus V_2$

οπου οι V_1, V_2 ειναι F-αναλλοιωτοι υποχωροι και

1) $V_i = \{ \mathbf{x} \in V$ για τα οποια $p_i(F)\mathbf{x} = \mathbf{O}\}$ για $i=1,2$.

2) Το ελαχιστο πολυωνυμο του περιορισμου $F_i = F|V_i : V_i \longrightarrow V_i$ ειναι το $p_i(x)$, για $i=1,2$.

Επειδη τα $p_i(x)$ ειναι πρωτα μεταξυ τους, υπαρχουν πολυωνυμα $q_1(x)$, $q_2(x)$ (δες παραρτημα) ετσι ωστε:

$$p_1(x)q_1(x)+p_2(x)q_2(x) = 1.$$

Βαζοντας τον F στη θεση του x θα εχουμε

$$p_1(F)q_1(F)+p_2(F)q_2(F) = I \ . \qquad (*)$$

Παρατηρω οτι για καθε $\mathbf{x}$ του V ισχυει

$$p_1(F)q_1(F)\mathbf{x} \in V_2 \quad \text{και} \quad p_2(F)q_2(F)\mathbf{x} \in V_1 \ .$$

Επισης $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{O}\}$. Πραγματι, αν $\mathbf{x} \in V_1 \cap V_2$, τοτε λογω της (*) οι σχεσεις $p_1(F)\mathbf{x} = p_2(F)\mathbf{x} = \mathbf{O}$ θα ειχαν τη συνεπεια $\mathbf{x} = \mathbf{O}$. (Χρησιμοποιησα εδω το γεγονος οτι δυο τελεστες της μορφης $\alpha(F)$, $\beta(F)$ οπου $\alpha(x)$, $\beta(x)$ πολυωνυμα, μετατιθενται μεταξυ τους: $\alpha(F)\beta(F)=\beta(F)\alpha(F)$). Πραγματι λοιπον εχουμε $V = V_1 \oplus V_2$. Οτι οι V_i ειναι F-αναλλοιωτοι φαινεται παλι αμεσως, διοτι

$$\mathbf{x} \in V_i \quad \text{συνεπαγεται} \quad p_i(F)(F(\mathbf{x}))=F(p_i(F)\mathbf{x})= \mathbf{O}.$$

Αρα $F(\mathbf{x}) \in V_i$. Για την αποδειξη του δευτερου ισχυρισμου ας υποθεσουμε οτι $\hat{p}_i(x)$ ειναι το ελαχιστο πολυωνυμο του F_i για $i=1,2$. Τοτε το $\hat{m}(x)=\hat{p}_1(x)\hat{p}_2(x)$ ικανοποιει την $\hat{m}(F)=0$.

Πραγματι εστω για τυχον $\mathbf{x}$ του V η αναλυση σε ευθυ αθροισμα

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \quad \text{με } \mathbf{x}_i \text{ απο το } V_i \text{ για } i=1,2.$$

Τοτε διαπιστωνουμε αμεσως οτι

$$\hat{m}(F)\mathbf{x}=\hat{p}_2(F)\hat{p}_1(F)\mathbf{x}_1+\hat{p}_1(F)\hat{p}_2(F)\mathbf{x}_2 = \mathbf{O}.$$

Αρα το $m(x)$ διαιρει το $\hat{m}(x)$. Επισης, για $\mathbf{x} \in V_i$ εξ ορισμου $p_i(F)\mathbf{x}=\mathbf{O}$, αρα το $\hat{p}_i(x)$ διαιρει το $p_i(x)$. Συγκρινοντας λοιπον τους βαθμους των πολυωνυμων, θα εχουμε $\hat{p}_i(x)=p_i(x)$ για $i=1,2$. ο.ε.δ.

Παρατηρησε μια συνεπεια της (*):

$$\mathbf{x} \in V_1 \quad \text{συνεπαγεται} \quad \mathbf{x}=p_2(F)(q_2(F)\mathbf{x}) \in \mathrm{Im}(p_2(F)).$$

Το αντιστροφο ειναι προφανες, αρα

$$V_1 = \mathrm{Im}(p_2(F)) \quad \text{και αναλογα} \quad V_2 = \mathrm{Im}(p_1(F)).$$

Εφαρμοζοντας την προταση-1 διαδοχικα στα γινομενα πρωτων πολυωνυμων $p_1(x)$, $(p_2(x)\ldots p_k(x))$ κατοπιν στα $p_2(x)$, $(p_3(x)\ldots p_k(x))$ κ.ο.κ αποδεικνυουμε το γενικωτερο

ΘΕΩΡΗΜΑ-2 Αν το ελαχιστο πολυωνυμο $m(x)$ του τελεστη F, ειναι γινομενο k το πληθος πρωτων μεταξυ τους πολυωνυμων, $m(x) = p_1(x)\ldots p_k(x)$, τοτε ο V διασπαται σ ενα ευθυ αθροισμα k το πληθος υποχωρων του $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$ οπου:

1) $V_i = \{ \mathbf{x}$ του V για τα οποια $p_i(F)\mathbf{x}=\mathbf{O} \}$ για $i=1,\ldots,k$.
2) Το ελαχιστο πολυωνυμο του περιορισμου $F_i = F|V_i : V_i \longrightarrow V_i$ ειναι το $p_i(x)$.

Διαφαινεται εδω ο ρολος του σωματος K στην διασπαση. Καθε πολυωνυμο του $K[x]$ αρα και το ελαχιστο ενος τελεστη F, γραφεται σαν γινομενο αναγωγων πολυωνυμων του $K[x]$. Στην διασπαση λοιπον του θεωρηματος-2 θα παιζει σημαντικο ρολο η μορφη των αναγωγων πολυωνυμων του $K[x]$, τα οποια σημειωτεον διαφερουν απο σωμα σε σωμα. Ετσι στο C και γενικωτερα σε καθε αλγεβρικα κλειστο σωμα τα αναγωγα πολυωνυμα ειναι γραμμικα, της μορφης $(x-\lambda)$. Στο R ειναι τετραγωνικα $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και στο Q μπορουν να ειναι οποιουδηποτε βαθμου (πραγμα που δυσκολευει πολυ την αναγωγη). Το ζητημα ειναι οτι οσο πιο απλοι ειναι οι παραγοντες του ελαχιστου πολυωνυμου, τοσο πιο απλη ειναι και η μορφη του ιδιου του τελεστη F. Για παραδειγμα οι απλουστεροι τελεστες, οι διαγωνιοποιησιμοι εχουν το εξης χαρακτηριστικο:

ΠΡΟΤΑΣΗ-2 Ο τελεστης F ειναι διαγωνιοποιησιμος τοτε και μονον τοτε, οταν το ελαχιστο πολυωνυμο του $m(x)$ ειναι γινομενο διαφορετικων μεταξυ τους γραμμικων παραγοντων

$$m(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_k).$$

Πραγματι, αν ο F ειναι διαγωνιοποιησιμος, τοτε υπαρχει βαση απο ιδιοδιανυσματα του F, ως προς την οποια ο F εχει την μητρα παραστασης

$$\begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1 I_1} & & & & \\ & \boxed{\lambda_2 I_2} & & & \\ & & \boxed{\lambda_3 I_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{\lambda_k I_k} \end{bmatrix}$$

οπου $I_1,\ldots,I_k$ μοναδιαιες μητρες. Διαπιστωνουμε αμεσως οτι

$$(F-\lambda_1 I)(F-\lambda_2 I)\ldots(F-\lambda_k I) = 0.$$

Αρα το ελαχιστο πολυωνυμο $m(x)$ θα διαιρει το $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_k)$.

Τουτο σημαινει οτι το ελαχιστο πολυωνυμο θα ειναι γινομενο ορισμενων εκ των $(x-\lambda_i)$. Ομως διαπιστωνουμε αμεσως οτι κανενας γραμμικος παραγοντας δεν μπορει να λειπει π.χ. αν ηταν $m(x)=(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_k)$, τοτε θα ηταν $m(F)\mathbf{x}\neq 0$ για καθε ιδιοδιανυσμα $\mathbf{x}$ ως προς την ιδιοτιμη λ_1. Τουτο ομως αντιφασκει τον ορισμο του $m(x)$. Αρα το $m(x)$ θα συμπιπτει με το γινομενο $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_k)$.
Αντιστροφα, αν το ελαχιστο πολυωνυμο συμπιπτει με το παραπανω γινομενο, τοτε το θεωρημα 2 δινει μια διασπαση του V σε F-αναλλοιωτους υποχωρους $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ σε καθε ενα απο τους οποιους το ελαχιστο πολυωνυμο του περιορισμου $F_i= F|V_i$ ειναι $(x-\lambda_i)$. Τουτο σημαινει οτι $F_i = \lambda_i I_i$ και συνολικα οτι ο F ειναι διαγωνιοποιησιμος. ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι ομοιες μητρες εχουν το ιδιο χαρακτηριστικο και το ιδιο ελαχιστο πολυωνυμο.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι τετραγωνικη μητρα A και η αναστροφη της A^t εχουν το ιδιο χαρακτηριστικο πολυωνυμο και το ιδιο ελαχιστο πολυωνυμο.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Αν A, B ειναι μητρες απο το $M_K(n,n)$ και η A αντιστρεψιμη, δειξε οτι οι μητρες AB και BA εχουν το ιδιο χαρακτηριστικο πολυωνυμο και το ιδιο ελαχιστο πολυωνυμο.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Αν $A \in M_R(n,n)$ και το n ειναι περιττο δειξε οτι η A εχει μια τουλαχιστο πραγματικη ιδιοτιμη. Αν το n ειναι αρτιο και $|A| < 0$, δειξε οτι η A εχει δυο τουλαχιστον διαφορετικες πραγματικες ιδιοτιμες.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Λογαριασε την adj(A-xI) και γραψε την στην μορφη $x^k A_k + \ldots + xA_1 + A_0$, οπου $A_0, \ldots, A_k$ σταθερες μητρες, για τις

α) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ΑΣΚΗΣΗ-6 Επαληθευσε το θεωρημα-1 για τις προηγουμενες μητρες.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Δειξε οτι μια μητρα $A \in M_R(n,n)$ που εχει πραγματικες και διαφορετικες μεταξυ τους ιδιοτιμες ειναι διαγωνιοποιησιμη.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Εστω $V = V_1 \oplus V_2$, οπου V_1, V_2 ειναι F-αναλλοιωτοι υποχωροι του τελεστη F. Δειξε οτι το χαρακτηριστικο πολυωνυμο $\chi(x)$ του F ειναι $\chi(x)=\chi_1(x)\chi_2(x)$ οπου $\chi_i(x)$ το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του περιορισμου $F_i = F|V_i$. Δειξε οτι το ελαχιστο πολυωνυμο

$m(x)$ του F ειναι $m(x)$ = ε.κ.π.$(m_1(x), m_2(x))$ (το ελαχιστο κοινο πολλαπλασιο) οπου $m_i(x)$ το ελαχιστο πολυωνυμο του περιορισμου F_i.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Εστω W ενας F-αναλλοιωτος υποχωρος του V και $\overline{F} : V/W \longrightarrow V/W$ η απεικονιση του χωρου-πηλικον για την οποια ισχυει $\overline{F}([\mathbf{x}])=[F(\mathbf{x})]$ (δες σελ. 56). Δειξε οτι το χαρακτηριστικο πολυωνυμο $\chi(x)$ της F ειναι $\chi(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$, οπου $\chi_1(x)$ το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του περιορισμου της F στον W και $\chi_2(x)$ το χαρακτ. πολ. της απεικονισης $\overline{F}$.

ΑΣΚΗΣΗ-10 Εστω οτι το ελαχιστο πολυωνυμο του τελεστη F ειναι της μορφης $m(x) = p(x)^k$, οπου το $p(x)$ ειναι αναγωγο πολυωνυμο του $K[x]$. Δειξε οτι

α) Ο υποχωρος $\mathrm{Im}(p(F)^{k-1}) = W$ ειναι F-αναλλοιωτος.

β) Το ελαχιστο πολυωνυμο του περιορισμου $F_1 = F|W$ ειναι το $p(x)$.

γ) Το ελαχιστο πολυωνυμο του $\overline{F} : V/W \longrightarrow V/W$ ειναι $p(x)^{k-1}$.

ΑΣΚΗΣΗ-11 Εστω οτι το ελαχιστο πολυωνυμο του τελεστη F ειναι αναγωγο πολυωνυμο $p(x) = x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$. Δειξε οτι

α) Για καθε μη μηδενικο διανυσμα $\mathbf{a}$ τα n το πληθος διανυσματα $\mathbf{a}, F(\mathbf{a}), F^2(\mathbf{a}),\ldots,F^{n-1}(\mathbf{a})$ ειναι ανεξαρτητα και παραγουν ενα F-αναλλοιωτο υποχωρο $W(\mathbf{a})$ του V.

β) Ως προς αυτη τη βαση, η μητρα παραστασης του περιορισμου $F|W(\mathbf{a})$ ειναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 \;\ldots & 0 & -a_2 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots\; 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

γ) Για δυο διαφορετικα διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ του V οι αντιστοιχοι χωροι $W(\mathbf{a}_1), W(\mathbf{a}_2)$ ειτε συμπιπτουν, ειτε εχουν τομη το $\{\mathbf{O}\}$.

δ) Υπαρχουν ανεξαρτητα μεταξυ τους διανυσματα $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ ετσι ωστε $V = W(\mathbf{a}_1)\oplus\ldots\oplus W(\mathbf{a}_k)$.

ε) Το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του F ειναι $(-1)^{kn}p(x)^k$ με το k που οριζεται στο δ).

Η προηγουμενη ασκηση ειναι σημαντικη γιατι δειχνει οτι το χαρακτηριστικο πολυωνυμο ενος τελεστη που εχει αναγωγο ελαχιστο πολυωνυμο $p(x)$ ειναι ακριβως μια δυναμη $\pm p(x)^k$ του $p(x)$. Τουτη γενικευεται στο επομενο θεωρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ-3 Εστω οτι το ελαχιστο πολυωνυμο του τελεστη F του K-διανυσματικου χωρου V ειναι της μορφης $m(x) = p(x)^r$, οπου $p(x)$ αναγωγο πολυωνυμο του $K[x]$. Τοτε το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του F ειναι κι αυτο μια δυναμη του $p(x)$ (μεγαλυτερη ή ιση του r).

Η αποδειξη γινεται με επαγωγη ως προς r. Για r=1 ειναι ακριβως η ασκηση-11. Εστω οτι το θεωρημα ισχυει για δυναμεις μεχρι το r-1. Θα δειξω οτι ισχυει και για το r. Πραγματι, συμφωνα με την ασκηση 10 ο υποχωρος $Im(p(F)^{r-1}) = W$ ειναι F-αναλλοιωτος και το ελαχιστο πολυωνυμο του περιορισμου $F_1 = F|W$ ειναι το $p(x)$. Αρα το χαρακτηριστικο πολυωνυμο $\chi_1(x)$ του F_1 θα ειναι, παλι κατα την ασκηση 11 μια δυναμη $\pm p(x)^s$. Απο την ασκηση 10 παλι, ξερουμε οτι το ελαχιστο πολυωνυμο του $\bar{F} : V/W \longrightarrow V/W$ ειναι $p(x)^{r-1}$. Αρα κατα την επαγωγικη υποθεση, το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του $\bar{F}$ θα ειναι μια δυναμη $\pm p(x)^t$, με $t \geqq r-1$. Εφαρμοζοντας τωρα την ασκηση 9 συμπεραινουμε οτι το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του F θα ειναι $\chi(x)= \pm p(x)^{s+t}$. ο.ε.δ.

Το θεωρημα-3 εχει την εξης συνεπεια που βελτιωνει το θεωρημα-1:

ΘΕΩΡΗΜΑ-4 Το χαρακτηριστικο πολυωνυμο $\chi(x)$ του τελεστη F αναλυεται στους ιδιους ακριβως πρωτους παραγοντες με το ελαχιστο πολυωνυμο $m(x)$ του F, και συγκεκριμενα, αν

$$m(x) = p_1(x)^{k_1} \ldots p_r(x)^{k_r}$$

τοτε

$$\chi(x) = \pm p_1(x)^{n_1} \ldots p_r(x)^{n_r}$$

με $n_1 \geqq k_1, \ldots, n_r \geqq k_r$.

Πραγματι, απο το θεωρημα-2 γνωριζουμε οτι $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$, οπου οι V_i ειναι F-αναλλοιωτοι υποχωροι και το ελαχιστο πολυωνυμο του $F_i = F|V_i$ ειναι το $p_i(x)^{k_i}$. Απο το θεωρημα-3 συμπεραινουμε οτι το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του F_i ειναι $\chi_i(x) = \pm p_i(x)^{n_i}$ με $n_i \geqq k_i$ κι απο την ασκηση-8 οτι το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του F ειναι $\chi(x) = \chi_1(x) \ldots \chi_r(x)$. ο.ε.δ.

Το να γνωριζεις ειναι το να μη γνωριζεις και η κατανοηση αυτης της αληθειας, οτι η γνωση δεν μπορει ποτε να λυση τ' ανθρωπινα προβληματα μας ειναι νοημοσυνη.

Κρισναμουρτι

§18 ΜΗΔΕΝΟΔΥΝΑΜΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Σ αυτη την παραγραφο εξεταζουμε και αναγουμε στην πιο απλη μορφη (δηλαδη βρισκουμε μια απλη μητρα παραστασης) ορισμενους τελεστες που λεγονται <u>μηδενοδυναμοι</u> και χαρακτηριζονται απο την απλη μορφη του ελαχιστου πολυωνυμου τους που ειναι $m(x) = x^k$. Το k λεγεται δυναμη του τελεστη και ειναι ο ελαχιστος ακεραιος για τον οποιο $F^k = 0$. Το χαρακτηριστικο πολ. ενος τετοιου τελεστη διαιρειται απο το m(x) και ειναι βαθμου n=dimV αρα ειναι $\chi(x) = (-x)^n$. Παραδειγμα τετοιου τελεστη ειναι μια οποιαδηποτε τριγωνικη μητρα με μηδενικα στην διαγωνιο

$$A = \begin{bmatrix} 0 & * & * & & * \\ & 0 & * & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Για μια τετοια μητρα διαστασεων nxn, ισχυει $A^n = 0$. Η δυναμη της ειναι ο ελαχιστος ακεραιος k για τον οποιο συμβαινει $A^k = 0$.

Μηδενοδυναμοι τελεστες οριζουν F-αναλλοιωτους υποχωρους με πολυ απλο τροπο και αξιοσημειωτες ιδιοτητες. Πραγματι αφου για καθε $\mathbf{a} \in V$ $F^k(\mathbf{a}) = \mathbf{O}$, θα υπαρχει ενας ελαχιστος ακεραιος s (εξαρτωμενος απο το $\mathbf{a}$) ετσι ωστε $F^s(\mathbf{a}) = \mathbf{O}$. Τοτε τα διανυσματα

$$\mathbf{a},\ F(\mathbf{a}),\ F^2(\mathbf{a}),\dots,F^{s-1}(\mathbf{a}) \qquad (*)$$

ειναι οχι μονον ολα διαφορα του $\mathbf{O}$, αλλα και γραμμικα ανεξαρτητα. Πραγματι, αν ηταν

$$\lambda_1\mathbf{a}+\lambda_2F(\mathbf{a})+\lambda_3F^2(\mathbf{a})+\dots+\lambda_sF^{s-1}(\mathbf{a}) = \mathbf{O},$$

τοτε εφαρμοζοντας στην ισοτητα διαδοχικα τους τελεστες F^{s-1}, F^{s-2},.. παιρνουμε αντιστοιχα $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$,.... Ευκολα επισης διαπιστωνουμε οτι ο υποχωρος $W(\mathbf{a})$ που παραγεται απ αυτα τα διανυσματα ειναι F-αναλλοιωτος, εχει τα διανυσματα αυτα σαν βαση και ο περιορισμος της F $F|W$ εχει ως προς αυτη τη βαση την μητρα παραστασης

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \qquad (**)$$

Ο $W(\mathbf{a})$ λεγεται <u>κυκλικος υποχωρος</u> (του $\mathbf{a}$). Η φιλοσοφια της αναλυσης ενος μηδενοδυναμου τελεστη, ειναι να βρουμε καταλληλα διανυσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,\dots, \mathbf{a}_s$ ετσι ωστε ο V να διασπαται σ ευθυ αθροισμα των κυκλικων υποχωρων του

$$V = W(\mathbf{a}_1)\oplus W(\mathbf{a}_2)\oplus\ldots\oplus W(\mathbf{a}_s)\ .$$

Σε καθε κυκλικο υποχωρο διαλεγουμε τοτε βαση της μορφης (*) οποτε συνολικα προκυπτει μια βαση του V ως προς την οποια ο τελεστης εχει την (κανονικη ή Jordan) μητρα παραστασης

$$\begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & & \\ & \boxed{J_2} & & & \\ & & \boxed{J_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{J_s} \end{bmatrix}$$

οπου οι μητρες J_i ειναι της μορφης (**).

(***)

ΛΗΜΜΑ Για καθε βαση $F^{k-1}(\mathbf{a}_1),\ldots,F^{k-1}(\mathbf{a}_r)$ του υποχωρου $Im(F^{k-1})$ ενος μηδενοδυναμου τελεστη δυναμης k, ισχυει :

α) Οι κυκλικοι υποχωροι $W(\mathbf{a}_i)$ ειναι διαστασης k.

β) $W(\mathbf{a}_i)\cap W(\mathbf{a}_j) = \{\mathbf{O}\}$ για $i \neq j$.

γ) $Kern(F^{k-1})\cap\langle\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r\rangle = \{\mathbf{O}\}$.

δ) $V = Kern(F^{k-1})\oplus\langle\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r\rangle$

Το α) το δειξαμε προηγουμενως. Για το β) εστω

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2F(\mathbf{a}_1)+\lambda_3F^2(\mathbf{a}_1)+\ldots = \mu_1\mathbf{a}_2+\mu_2F(\mathbf{a}_2)+\ldots$$

Εφαρμοζοντας σ αυτην την ισοτητα διαδοχικα τους τελεστες $F^{k-1}, F^{k-2},\ldots$ παιρνουμε αντιστοιχα $\lambda_1=\mu_1,\ \lambda_2=\mu_2,\ldots$

Το γ): Εστω οτι $\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1+\ldots+\lambda_r\mathbf{a}_r$ εχει $F^{k-1}(\mathbf{b})=\mathbf{O}$. Τοτε $\lambda_1F^{k-1}(\mathbf{a}_1)+\ldots+\lambda_rF^{k-1}(\mathbf{a}_r)=\mathbf{O}$, αρα $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_r=0$.

Για το δ) παρατηρησε οτι τα $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r$ ειναι ανεξαρτητα, αρα $\dim\langle\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r\rangle= r$. Το δ) επεται απο το γ) και την ισοτητα

$$\dim(Im(F^{k-1}))+\dim(Kern(F^{k-1})) = n = \dim(V).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Για καθε μηδενοδυναμο τελεστη F (δυναμης k) ενος n-διαστατου K-διανυσματικου χωρου V, υπαρχουν κυκλικοι υποχωροι $W(\mathbf{a}_1),\ldots, W(\mathbf{a}_s)$ του V, ετσι ωστε $V = W(\mathbf{a}_1)\oplus W(\mathbf{a}_2)\oplus\ldots\oplus W(\mathbf{a}_s)$.

Η αποδειξη γινεται με κατ επαναληψη εφαρμογη του ληματος, μεσω της οποιας κατασκευαζεται μια βαση του V συμπληρωνοντας διαδοχικα τους υποχωρους

$$(V_0=V)\supset(V_1=KernF^{k-1})\supset(V_2=KernF^{k-2})\supset\ldots\supset(V_{k-1}=KernF)\supset(V_k=\{\mathbf{O}\}).$$

Η περιγραφη της κατασκευης συνοψιζεται στον επομενο πινακα.

$a_1,\ldots,a_{r_1}$ Συμπληρωνουν	το: V_1	εν: V_0
$F(a_1),\ldots,F(a_{r_1}),a_{r_1+1},\ldots,a_{r_2}$	V_2	V_1
$F^2(a_1),\ldots,F^2(a_{r_1}),F(a_{r_1+1}),\ldots,F(a_{r_2}),a_{r_2+1},\ldots,a_{r_3}$	V_3	V_2
$F^3(a_1),\ldots,F_3(a_{r_1}),F^2(a_{r_1+1}),\ldots,F^2(a_{r_2}),F(a_{r_2+1}),\ldots,F(a_{r_3}),a_{r_3+1},\ldots,a_{r_4}$	V_4	V_3
....	....	..
$F^i(a_1),\ldots,F^i(a_{r_1}),F^{i-1}(a_{r_1+1}),\ldots,F^{i-1}(a_{r_2}),\ldots,F(a_{r_{i-1}}),\ldots,F(a_{r_i}),a_{r_i+1},\ldots,a_{r_{i+1}}$	V_{i+1}	V_i
....	....	..
$F^{k-1}(a_1),\ldots,F^{k-1}(a_{r_1}),\ F^{k-2}(a_{r_1+1}),\ldots,F(a_{r_{k-2}+1}),\ldots,F(a_{r_{k-1}}),a_{r_{k-1}+1},\ldots,a_{r_k}$	$V_k=\{O\}$	V_{k-1}

1. $V_0=V\supset V_1=\mathrm{Kern}F^{k-1}\supset V_2=\mathrm{Kern}F^{k-2}\supset\ldots\supset V_{k-1}=\mathrm{Kern}F\supset V_k=\{O\}$
2. Η πρωτη γραμμη περιεχει r_1 ανεξαρτητα διαν. που παραγουν το W_1 με $V_0=V=W_1\oplus V_1$.
3. Η i-γραμμη αποτελειται απο ανεξαρτητα διανυσματα που παραγουν υποχωρο W_i με $V_{i-1}=W_i\oplus V_i$.
4. Τα διανυσματα της i-γραμμης αποτελουνται απο
   α) Τις εικονες μεσω της F των διανυσματων της προηγουμενης γραμμης. Ισχυει $F(W_{i-1})\cap V_i=\{O\}$.
   β) Προσθετα διανυσματα $a_{r_{i-1}},\ldots,a_{r_i}$ που συμπληρωνουν τα προηγουμενα.
5. Τα διανυσματα που περιεχονται στην i-γραμμη κι ολες τις επομενες αποτελουν βαση του V_{i-1}, αρα ολα τα διανυσματα του πινακα αποτελουν βαση του V.
6. Τα διανυσματα μιας στηλης του πινακα παραγουν τους κυκλικους υποχωρους μιας διασπασης του V σε κυκλικους υποχωρους:

$$V = W(a_1)\oplus\ldots\oplus W(a_{r_k}) .$$

Το κλειδι για την αποδειξη των προηγουμενων ισχυρισμων ειναι η ισοτητα δ) του λημματος $V = Kern(F^{k-1}) \oplus \langle a_1,\ldots,a_r \rangle$ και η παρατηρηση οτι οι κυκλικοι υποχωροι $W(a_1),\ldots,W(a_r)$ οριζουν ενα ευθυ αθροισμα $W(a_1) \oplus \ldots \oplus W(a_r)$. Τουτο αποδεικνυεται ως εξης:
Αν υποθεσουμε οτι υπαρχουν σταθερες λ_{ij} ετσι ωστε

$$\sum_{ij} \lambda_{ij} F^j(a_i) = 0 , \qquad (i=1,..,r,\ j=0,..,k-1)$$

τοτε εφαρμοζοντας στην προηγουμενη ισοτητα τον τελεστη F^{k-1} παιρνουμε $\lambda_{10}=\ldots=\lambda_{r0}=0$. Εφαρμοζοντας κατοπιν στην ιδια τον F^{k-2} παιρνουμε $\lambda_{11}=\ldots=\lambda_{r1}=0$. Συνεχιζοντας κατ αυτο τον τροπο με τις δυναμεις του F, βρισκουμε οτι ολα τα $\lambda_{ij}=0$, πραγμα που αποδεικνυει τον ισχυρισμο.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Αποδειξε τους ισχυρισμους της σελ. 72 και το προηγουμενο θεωρημα. Δειξε οτι $r_1,\ r_2-r_1,\ r_3-r_2,\ldots,\ r_k-r_{k-1}$ ειναι αντιστοιχα το πληθος των κυκλικων υποχωρων του F διαστασεων (k-1), (k-2),..., 1.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε οτι καθε αναλυση του V σε ευθυ αθροισμα κυκλικων υποχωρων συμπεριλαμβανει $r = \dim(Im(F^{k-1}))$ κυκλικους υποχωρους μεγιστης διαστασης k (=δυναμη του F). Καθενας τους περιεχει ενα ακριβως διανυσμα $F^{k-1}(a_i)$ μιας βασης $F^{k-1}(a_1),\ldots,F^{k-1}(a_r)$ του $Im(F^{k-1})$.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι καθε μηδενοδυναμη μητρα ειναι ομοια προς μια μητρα της μορφης (***) (τουτη λεγεται μορφη Jordan της μηδενοδυναμης μητρας). Δειξε αναλογα οτι καθε μηδενοδυναμος τελεστης F οριζει καποια βαση, ως προς την οποια εχει μητρα παραστασης την (***).

ΑΣΚΗΣΗ-4 Εστω F μηδενοδυναμος τελεστης του οποιου η μορφη Jordan (***) περιλαμβανει d_1 μητρες 1x1 διαστασεων, d_2 μητρες 2x2 διαστασεων, ..., d_k μητρες kxk διαστασεων (k η δυναμη του F).
Δειξε οτι

$$\begin{aligned}
d_1+d_2+d_3+\ldots+d_k &= \dim(Kern F) = n_1\\
d_1+2d_2+2d_3+2d_4+\ldots+2d_k &= \dim(Kern F^2) = n_2\\
d_1+2d_2+3d_3+3d_4+\ldots+3d_k &= \dim(Kern F^3) = n_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
d_1+2d_2+3d_3+4d_4+\ldots+(k-1)d_k &= \dim(Kern F^{k-1}) = n_{k-1}\\
d_1+2d_2+3d_3+\ldots+(k-1)d_{k-1}+kd_k &= \dim(Kern F^k) = n_k = n = \dim V.
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ-5 Λυσε το προηγουμενο συστημα ως προς d_i και δειξε οτι

$$d_1 = 2n_1-n_2$$
$$d_2 = 2n_2-n_3-n_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$d_{k-2} = 2n_{k-2}-n_{k-3}-n_{k-1}$$
$$d_{k-1} = 2n_{k-1}-n_{k-2}-n_k$$
$$d_k = n_k-n_{k-1}.$$

Συμπερανε οτι δυο μηδενοδυναμες μητρες A,B του $M_K(n,n)$ που ικανοποιουν τις ισοτητες

$$\dim(\mathrm{Kern}A) = \dim(\mathrm{Kern}B) = n_1$$
$$\dim(\mathrm{Kern}A^2) = \dim(\mathrm{Kern}B^2) = n_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dim(\mathrm{Kern}A^k) = \dim(\mathrm{Kern}B^k) = n_k = n,$$

ειναι ομοιες.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι για τον προσδιορισμο της κανονικης μορφης μιας μηδενοδυναμης μητρας A του $M_K(n,n)$ δυναμης k, αρκει να λυσουμε τα (k-1) το πληθος γραμμικα συστηματα:

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0},\ A^2\mathbf{x}=\mathbf{0},\dots,\ A^{k-1}\mathbf{x}=\mathbf{0}.$$

ΑΣΚΗΣΗ-7 Εστω F μηδενοδυναμος τελεστης δυναμης k του n-διαστατου K-διανυσματικου χωρου V. Κατα το λημμα, αν $F^{k-1}(\mathbf{a}_1),\dots,F^{k-1}(\mathbf{a}_r)$ ειναι βαση του $\mathrm{Im}(F^{k-1})$, θα ισχυει

$$V = \mathrm{Kern}(F^{k-1})\oplus\langle\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_r\rangle.$$

Δειξε οτι ο υποχωρος του V, $U = W(\mathbf{a}_1)\oplus\dots\oplus W(\mathbf{a}_r)$ ειναι F-αναλλοιωτος και η εισαγομενη απεικονιση στον χωρο πηλικον $F_1: V/U\longrightarrow V/U$ ειναι επισης μηδενοδυναμος τελεστης, δυναμης $m\leqq k-1$.
Κατα το λημμα παλι θα ισχυει

$$V/U = \mathrm{Kern}(F_1^{m-1})\oplus\langle[\mathbf{b}_1],\dots,[\mathbf{b}_s]\rangle\ ,$$

οπου $F_1^{m-1}([\mathbf{b}_1]),\dots,F_1^{m-1}([\mathbf{b}_s])$ ειναι βαση του $\mathrm{Im}(F_1^{m-1})$.
Δειξε οτι

για $i=1,..,s$: $\langle\mathbf{b}_i,F(\mathbf{b}_i),\dots,F^{m-1}(\mathbf{b}_i)\rangle\cap U = \{\mathbf{0}\}$.

Επισης $F^m(\mathbf{b}_i)=F^m(\mathbf{u}_i)$ για καποιο $\mathbf{u}_i\in U$. Συμπερανε οτι το $\bar{\mathbf{b}}_i= \mathbf{b}_i-\mathbf{u}_i$ οριζει κυκλικο υποχωρο $W(\bar{\mathbf{b}}_i)$ διαστασης m και οτι το $W(\bar{\mathbf{b}}_1)+W(\bar{\mathbf{b}}_2)+\dots+W(\bar{\mathbf{b}}_s)+U$ ειναι ευθυ αθροισμα υποχωρων του V.

Στους χαλκεντερους που εχουν ακομη υπομονη για μια δευτερη αποδειξη του θεωρηματος, η προηγουμενη ασκηση υποβαλλει την εξης ιδεα:

Υποθεσε οτι το θεωρημα ισχυει για διαστασεις του V μικροτερες απο το n. Για n=1 ισχυει τετριμμενα. Θα δειξουμε οτι ισχυει και για διασταση του V ιση με n (επαγωγικη αποδειξη). Με τους συμβολισμους του λημματος εστω $U = W(\mathbf{a}_1)\oplus\ldots\oplus W(\mathbf{a}_r)$ και θεωρησε τον χωρο πηλικον V/U. Ο U ειναι F-αναλλοιωτος υποχωρος του V, αρα η F εισαγει απεικονιση $F_1\colon V/U \longrightarrow V/U$. Η F_1 ειναι μηδενοδυναμος τελεστης, δυναμης $m\leqq k-1$ στον χωρο V/U, που ειναι διαστασης μικροτερης του n. Κατα την επαγωγικη υποθεση λοιπον θα εχουμε

$$V/U = W([\mathbf{b}_1])\oplus W([\mathbf{b}_2])\oplus\ldots\oplus W([\mathbf{b}_p]), \qquad (+)$$

οπου $W([\mathbf{b}_i])$ ειναι κυκλικος υποχωρος του F_1 διαστασης n_i $(i=1,\ldots,p)$. Εστω παλι ο υποχωρος του V, $W_i = \langle \mathbf{b}_i, F(\mathbf{b}_i),\ldots,F^{n_i-1}(\mathbf{b}_i)\rangle$. Το κακο μ αυτον ειναι οτι $F^{n_i}(\mathbf{b}_i)\in U$ (και δεν ειναι το $\mathbf{O}$ ωστε ο W_i να ειναι κυκλικος). Παντως ισχυει

$$(W_1+W_2+\ldots+W_p)\cap U = \{\mathbf{O}\}\ . \qquad (++)$$

Πραγματι, αν υπηρχαν σταθερες λ_{ij} ετσι ωστε $\Sigma\lambda_{ij}F^i(\mathbf{b}_j) = \mathbf{u}\in U$, τοτε θα ειχαμε $[\Sigma\lambda_{ij}F^i(\mathbf{b}_j)] = \Sigma\lambda_{ij}F_1^i([\mathbf{b}_j]) = [\mathbf{u}] = [\mathbf{O}]$ (χρησιμοποιω εδω την ιδιοτητα της εισαγομενης απεικονισης: $F_1^t([\mathbf{b}])=[F^t(\mathbf{b})]$). Λογω της (+) τα $F_1^i([\mathbf{b}_j])$ ειναι ανεξαρτητα, αρα ολα τα $\lambda_{ij}=0$. Τουτο αποδεικνυει την (++). Τουτη παλι αποδεικνυει οτι

$$V = W_1\oplus W_2\oplus\ldots\oplus W_p\oplus U \qquad (+++)$$

και θα ειχαμε τελειωσει, αν οι W_i ηταν κυκλικοι. Τους "διορθωνουμε" λοιπον ωστε να γινουν. Εν γενει εχουμε οτι

$$F^{n_i}(\mathbf{b}_i)\in U \quad \text{αρα} \quad F^{n_i}(\mathbf{b}_i)=F^{n_i}(\mathbf{u}_i)$$

για καποιο $\mathbf{u}_i\in U$. Πραγματι αν γραψουμε $F^{n_i}(\mathbf{b}_i)=\Sigma\lambda_{\nu\mu}F^{\nu}(\mathbf{a}_\mu)$ και εφαρμοσουμε σ αυτη την ισοτητα τις δυναμεις του F:

$$F^{k-n_i},\ F^{k-n_i+1},\ F^{k-n_i+2},\ldots$$

βλεπουμε οτι ολα τα $\lambda_{\nu\mu}$ με $\nu<n_i$ μηδενιζονται. "Διορθωνουμε" λοιπον τα $\mathbf{b}_i$ και παιρνουμε αντι αυτων τα $\bar{\mathbf{b}}_i = \mathbf{b}_i-\mathbf{u}_i$. Προφανως $[\bar{\mathbf{b}}_i] = [\mathbf{b}_i]$, οι αντιστοιχοι χωροι $\bar{W}_i$ (για τα $\bar{\mathbf{b}}_i$) ειναι κυκλικοι και οι (+),(++),(+++) ισχυουν για τα $\bar{W}_i$ οπως ακριβως και για τα W_i. Η Αποδειξη ειναι πληρης.

§19 ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ (JORDAN)

Η δουλεια εχει γινει ηδη στην προηγουμενη παραγραφο. Εδω υποθετουμε οτι το σωμα K ειναι αλγεβρικα κλειστο, αρα τα αναγωγα πολυωνυμα του K[x] ειναι γραμμικα: $(x-\lambda)$. Ετσι το ελαχιστο $m(x)$ και το χαρακτηριστικο $\chi(x)$ πολυωνυμο ενος τελεστη F του n-διαστατου K-διανυσματικου χωρου V, εχουν την μορφη:

$$m(x)=(x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}\ ,\quad \chi(x)=(x-\lambda_1)^{p_1}\cdots(x-\lambda_k)^{p_k}\ ,$$

οπου $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ οι διαφορετικες μεταξυ τους ιδιοτιμες του F και

$$m_1\leqq p_1,\ldots,\ m_k\leqq p_k \quad \text{ενω} \quad p_1+p_2+\ldots+p_k=n.$$

Συμφωνα με το θεωρημα-2(§17) ο V γραφεται σαν ευθυ αθροισμα των υποχωρων του

$$V_i=\{\mathbf{x} \text{ του V για τα οποια } (F-\lambda_i I)^{m_i}\mathbf{x}=\mathbf{O}\}.$$

Ο περιορισμος $F_i=F|V_i$ εχει ελαχιστο πολυωνυμο το $(x-\lambda_i)^{m_i}$ και χαρακτηριστικο το πολυωνυμο $(x-\lambda_i)^{p_i}$. Η διασταση του V_i ειναι p_i. Βλεπουμε λοιπον οτι ο τελεστης G_i του V_i

$$G_i=F_i-\lambda_i I_i \quad (I_i \text{ ο ταυτοτικος του } V_i),$$

ειναι μηδενοδυναμος. Αρα θα υπαρχει βαση του V_i ως προς την οποια ο G_i θα εχει μητρα παραστασης της γνωστης μορφης:

$$\begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_s} \end{bmatrix} \quad \text{οπου } J_r \text{ της μορφης} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τοτε ο $F_i=G_i+\lambda_i I_i$ θα εχει την μορφη:

$$\begin{bmatrix} \boxed{H_1} & & & \\ & \boxed{H_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{H_s} \end{bmatrix} \quad \text{οπου } H_r \text{ της μορφης} \quad \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Παιρνοντας σε καθε V_i αυτη τη βαση, βρισκουμε συνολικα μια βαση του V ως προς την οποια η μητρα παραστασης του F εχει την μορφη:

$$\begin{bmatrix} \boxed{H_1} & & & \\ & \boxed{H_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{H_\sigma} \end{bmatrix} \quad \text{οπου καθε } H_\kappa \text{ εχει την διπλανη μορφη για καποια ιδιοτιμη } \lambda \text{ του F.} \quad \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Αποδειξαμε λοιπον το

ΘΕΩΡΗΜΑ-1 Για καθε τελεστη F ενος n-διαστατου K-διανυσματικου χωρου V, με K αλγεβρικα κλειστο σωμα, υπαρχει μια βαση του V ως προς την οποια η μητρα παραστασης του F εχει την λεγομενη <u>κανονικη μορφη (Jordan)</u> (*).

Προχωρω τωρα στην λεγομενη <u>Jordan-Chevalley</u> διασπαση ενος τελεστη.

ΛΗΜΜΑ-1 Καθε αντιστρεψιμος τελεστης F ενος n-διαστατου K-διανυσματικου χωρου V στον εαυτο του εχει αντιστροφο F^{-1} που εκφραζεται σαν πολυωνυμο $F^{-1} = p(F)$ του F για καποιο πολυωνυμο $p(x)$.

Πραγματι απο το θεωρημα Cayley-Hamilton, αν $\chi(x)=a_n x^n+\ldots+a_1x+a_0$ το χαρακτηριστικο πολυωνυμο του F, τοτε

$$a_nF^n+a_{n-1}F^{n-1}+\ldots+a_1F+a_0I = 0.$$

Ομως $a_0 = |F| \neq 0$ (οριζουσα μιας οποιασδηποτε μητρας παραστασης).
Επομενως

$$F\left(-\frac{a_n}{a_0}F^{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_0}F^{n-2}-\ldots-\frac{a_1}{a_0}I\right) = I ,$$

που δειχνει οτι μεσα στην παρενθεση ειναι η αντιστροφη της F και εκφραζεται ταυτοχρονα σαν πολυωνυμο του F. ο.ε.δ.

ΛΗΜΜΑ-2 Με τις υποθεσεις του θεωρηματος, οι κανονικες προβολες $\pi_i : V_1\oplus V_2\oplus\ldots\oplus V_k \longrightarrow V_i$ με $\pi_i(x_1+\ldots+x_k)=x_i$ εκφραζονται σαν πολυωνυμα του F.

Πραγματι, εφαρμοζοντας την προταση-1 (σελ.64) στα πολυωνυμα

$$p_1(x) = (x-\lambda_i)^{m_i} \quad \text{και} \quad p_2(x) = \prod_{j\neq i}(x-\lambda_j)^{m_j} ,$$

βλεπουμε οτι ο πολυωνυμικος ως προς F τελεστης $T = p_2(F)$ εχει $\mathrm{Kern}T = \bigoplus_{j\neq i} V_j$ και $\mathrm{Im}T = V_i$. Αρα ο περιορισμος $T_i = T|V_i$ ειναι αντιστρεψιμος και κατα το λημμα-1 ο T_i^{-1} θα ειναι πολυωνυμικος ως προς T_i: $T_i^{-1} = q(T_i)$ οπου $q(x)\in K[x]$. Διαπιστωνουμε αμεσως οτι

$$\pi_i = q(p_2(F))p_2(F). \qquad \text{ο.ε.δ.}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ-2 Καθε τελεστης F ενος n-διαστατου K-διανυσματικου χωρου V, με K αλγεβρικα κλειστο σωμα, διασπαται με ενα και μονο τροπο σε αθροισμα $F = S + N$ ενος ημιαπλου S και ενος μηδενοδυναμου τελεστη N με την ιδιοτητα $SN = NS$. Οι τελεστες S και N εκφραζονται πολυωνυμικα ως προς F.

Με τους συμβολισμους αυτης της παραγραφου ο τελεστης

$$S = \lambda_1\pi_1+\lambda_2\pi_2+\ldots+\lambda_k\pi_k$$

ειναι ημιαπλος (διαγωνιοποιησιμος) και συμφωνα με το προηγουμενο λημμα ειναι ταυτοχρονα πολυωνυμικη συναρτηση του F, αρα μετατιθεται με τον F. Το ιδιο συμβαινει και με τον $N = F - S$ του οποιου ο περιορισμος σε καθε V_i συμπιπτει με τον μηδενοδυναμο G_i (δυναμης m_i). Συμπεραινομε οτι ο N ειναι μηδενοδυναμος (δυναμης $\max_i(m_i)$). Η σχεση SN=NS επεται απο την FS=SF (S+N)S=S(S+N).

Αν $F = S_1+N_1$ ειναι μια αλλη διασπαση σε ημιαπλο και μηδενοδυναμο που μετατιθενται μεταξυ τους, τοτε οι S_1,N_1 μετατιθενται και με τον F, αρα και με τα S και N που ειναι πολυωνυμα ως προς F. Επισης η $S+N=S_1+N_1$ διδει $S-S_1 = N_1-N$. Τουτο συμαινει οτι ο $S-S_1$ ειναι ταυτοχρονα ημιαπλος και μηδενοδυναμος με μοναδικη ιδιοτιμη το 0. Αρα $S-S_1=0$ και επομενως και $N-N_1=0$. ο.ε.δ.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε με καποιο παραδειγμα οτι εν γενει το αθροισμα ημιαπλων τελεστων δεν ειναι παλι ημιαπλος. Παρομοια το αθροισμα δυο μηδενοδυναμων δεν ειναι εν γενει μηδενοδυναμος. Οταν εν τουτοις οι τελεστες μετατιθενται τοτε το αθροισμα ημιαπλων ειναι παλι ημιαπλος και παρομοια το αθροισμα μετατιθεμενων μηδενοδυναμων ειναι παλι μηδενοδυναμος.

Για πραγματικες μητρες nxn διαστασεων η διασπαση A=S+N (οπου η A ταυτιζεται με τελεστη του μιγαδικου χωρου C^n) δινει πραγματικη S (διαγωνιοποιησιμη στο C^n αλλα οχι κατ αναγκην στο R^n) και πραγματικη μηδενοδυναμη N. Πραγματι παιρνοντας τους μιγαδικους συζηγεις εχουμε $\bar{A}=A=\bar{S}+\bar{N}$ και $\bar{S}\bar{N}=\bar{N}\bar{S}$. Αρα κατα το θεωρημα-2 $\bar{N}=N$ και $\bar{S}=S$. Σημειωνω ακομη οτι υπαρχουν εν γενει πολλες διασπασεις σε ημιαπλο και μηδενοδυναμο τελεστη για τις οποιες ομως $SN\neq NS$. π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = S+N$$

δεν ειναι η Jordan-Chevalley διασπαση διοτι $SN\neq NS$. Μαλιστα η A θεωρουμενη σαν τελεστης του C^2 ειναι ημιαπλη.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Για μια 2x2 πραγματικη μητρα με μιγαδικες ιδιοτιμες, δειξε οτι η Jordan-Chevalley διασπαση ειναι A=A+0 (με αλλα λογια η A σαν τελεστης του C^2 ειναι ημιαπλη).

ΑΣΚΗΣΗ-3 Δειξε οτι τα δυο θεωρηματα της παραγραφου ισχυουν για οποιοδηποτε σωμα K και τελεστη F του οποιου ολες οι ιδιοτιμες περιεχονται στο K.

Ερχομαι τωρα στην κανονικη μορφη (Jordan) μιας <u>πραγματικης</u> nxn μητρας A. Ταυτιζω την A με τον τελεστη $F_A: C^n \longrightarrow C^n$. O C^n ειναι C-διανυσματικος χωρος (μιγαδικος), το C αλγεβρικα κλειστο, αρα κατα το θεωρημα-1 βρισκουμε βαση του C^n ως προς την οποια ο F_A αναγεται σε κανονικη μορφη. Με καθε μιγαδικη ιδιοτιμη λ του A και η συζηγης μιγαδικη $\bar{\lambda}$ ειναι επισης ιδιοτιμη του A αφου $|A-\lambda I| = 0$ συνεπαγεται και την $|A-\bar{\lambda}I| = 0$. Συμφωνα με την θεωρια μας η αναγωγη σε κανονικη μορφη γινεται διασπωντας σε κυκλικους υποχωρους τους ιδιοχωρους:

$$V_\lambda = \{\mathbf{x} \text{ του } V \text{ με } (A-\lambda I)^k\mathbf{x}=\mathbf{O} \text{ για καποιο } k\}.$$

Διαλεγουμε λοιπον προσεκτικα μια βαση στον υποχωρο $V_\lambda \oplus V_{\bar{\lambda}}$ ως εξης:

ΛΗΜΜΑ-3 Ο υποχωρος $V_\lambda \oplus V_{\bar{\lambda}}$ του $V=C^n$ διασπαται σε κυκλικους υποχωρους

$$V_\lambda \oplus V_{\bar{\lambda}} = W(\mathbf{a}_1)\oplus W(\bar{\mathbf{a}}_1)\oplus\ldots\oplus W(\mathbf{a}_s)\oplus W(\bar{\mathbf{a}}_s)$$

οπου $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{x} - i\mathbf{y}$ συμβολιζει το συζηγες διανυσμα του $\mathbf{a}=\mathbf{x}+i\mathbf{y}$.

Πραγματι, αν $V_\lambda= W(\mathbf{a}_1)\oplus W(\mathbf{a}_2)\oplus\ldots\oplus W(\mathbf{a}_s)$ ειναι η διασπαση του V σε κυκλικους υποχωρους του $(A-\lambda I)$, τοτε ο $W(\bar{\mathbf{a}}_1)\oplus\ldots\oplus W(\bar{\mathbf{a}}_s)$ ειναι υποχωρος του $V_{\bar{\lambda}}$ και για λογους διαστασης ταυτιζεται μ αυτον.

Σε καθε $W(\mathbf{a})\oplus W(\bar{\mathbf{a}})$ αντι της βασης

$$\mathbf{e}_1=\mathbf{a},\ \mathbf{e}_2=(A-\lambda I)\mathbf{a},\ldots,\mathbf{e}_k=(A-\lambda I)^{k-1}\mathbf{a}\quad (k=\dim W(\mathbf{a})),$$
$$\bar{\mathbf{e}}_1=\bar{\mathbf{a}},\ \bar{\mathbf{e}}_2=(A-\bar{\lambda} I)\bar{\mathbf{a}},\ldots,\bar{\mathbf{e}}_k=(A-\bar{\lambda} I)^{k-1}\bar{\mathbf{a}},$$

διαλεγουμε τη βαση που αποτελειται απο το πραγματικο και φανταστικο μερος αυτων των διανυσματων:

$$\mathbf{f}_1=\tfrac{1}{2}(\mathbf{e}_1+\bar{\mathbf{e}}_1),\ldots,\ \mathbf{f}_k=\tfrac{1}{2}(\mathbf{e}_k+\bar{\mathbf{e}}_k)$$
$$\mathbf{g}_1=\tfrac{1}{2i}(\mathbf{e}_1-\bar{\mathbf{e}}_1),\ldots,\ \mathbf{g}_k=\tfrac{1}{2i}(\mathbf{e}_k-\bar{\mathbf{e}}_k).$$

Γνωριζοντας οτι ως προς την βαση των $\mathbf{e}_j,\bar{\mathbf{e}}_j$ η F_A παριστaται με μητρες της μορφης $\begin{bmatrix}\lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \lambda\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}\bar{\lambda} & & & \\ 1 & \bar{\lambda} & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & \bar{\lambda}\end{bmatrix}$ βρισκουμε τη μητρα παραστασης της F_A ως προς τη νεα βαση.

Πραγματι, η προηγουμενη μορφη των μητρων σημαινει οτι

$$A\mathbf{e}_i=\lambda\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{i+1} \text{ για } i<k,\quad A\mathbf{e}_k=\lambda\mathbf{e}_k.$$
$$A\bar{\mathbf{e}}_i=\bar{\lambda}\bar{\mathbf{e}}_i+\bar{\mathbf{e}}_{i+1} \text{ για } i<k,\quad A\bar{\mathbf{e}}_k=\bar{\lambda}\bar{\mathbf{e}}_k.$$

Εστω λοιπον $\lambda = \mu + i\nu$. Τοτε ως προς την βαση των $\mathbf{f}_i,\mathbf{g}_i$ εχουμε:

$$A\mathbf{f}_j = A(\tfrac{1}{2}(\mathbf{e}_j+\bar{\mathbf{e}}_j)) = \tfrac{1}{2}(\lambda\mathbf{e}_j+\bar{\lambda}\bar{\mathbf{e}}_j) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{e}_{j+1}+\bar{\mathbf{e}}_{j+1})$$
$$= \tfrac{1}{2}((\mu+i\nu)(\mathbf{f}_j+i\mathbf{g}_j)+(\mu-i\nu)(\mathbf{f}_j-i\mathbf{g}_j)) + \mathbf{f}_{j+1}$$
$$= \mu\mathbf{f}_j-\nu\mathbf{g}_j + \mathbf{f}_{j+1} \quad ,$$
$$A\mathbf{g}_j = A(\tfrac{1}{2i}(\mathbf{e}_j-\bar{\mathbf{e}}_j)) = \tfrac{1}{2i}(\lambda\mathbf{e}_j-\bar{\lambda}\bar{\mathbf{e}}_j) + \tfrac{1}{2i}(\mathbf{e}_{j+1}-\bar{\mathbf{e}}_{j+1})$$
$$= \tfrac{1}{2i}((\mu+i\nu)(\mathbf{f}_j+i\mathbf{g}_j)-(\mu-i\nu)(\mathbf{f}_j-i\mathbf{g}_j)) + \mathbf{g}_{j+1}$$
$$= \nu\mathbf{f}_j+\mu\mathbf{g}_j + \mathbf{g}_{j+1} \quad .$$

Τουτες για $j<k$. Αναλογα

$$A\mathbf{f}_k = \mu\mathbf{f}_k-\nu\mathbf{g}_k \quad , \qquad A\mathbf{g}_k = \nu\mathbf{f}_k+\mu\mathbf{g}_k \; .$$

Ως προς αυτη λοιπον τη βαση η μητρα παραστασης της $F|W(\mathbf{a})\oplus W(\bar{\mathbf{a}})$ ειναι

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}\mu & \nu\\ -\nu & \mu\end{matrix}} & & & & & \\ \boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}\mu & \nu\\ -\nu & \mu\end{matrix}} & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}\mu & \nu\\ -\nu & \mu\end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix}\mu & \nu\\ -\nu & \mu\end{matrix}} & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}\mu & \nu\\ -\nu & \mu\end{matrix}} \end{bmatrix} . \qquad (**)$$

Διαλεγοντας λοιπον τετοιες βασεις των κυκλικων υποχωρων ως προς τις μιγαδικες ιδιοτιμες της A προσεχοντας οτι τα διανυσματα αυτων των βασεων περιεχονται στο R^n και την βαση $\mathbf{a},(A-\lambda I)\mathbf{a},\dots,(A-\lambda I)^{k-1}\mathbf{a}$ των κυκλικων υποχωρων $W(\mathbf{a})$ που αποτελειται παλι απο διανυσματα του R^n, βλεπουμε οτι ισχυει το

ΘΕΩΡΗΜΑ-3 Καθε nxn πραγματικη μητρα A ειναι ομοια προς μητρα της μορφης $\begin{bmatrix} \boxed{H_1} & & & \\ & \boxed{H_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{H_\sigma} \end{bmatrix}$ οπου καθε $H_\varkappa$ ειναι της μορφης (**) και $\lambda=\mu \pm i\nu$ ειναι μιγαδικη ιδιοτιμη της A ή το $H_\varkappa$ ειναι της μορφης $\begin{bmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 \;\; \lambda \end{bmatrix}$ και το λ ειναι πραγματικη ιδιοτιμη της A.

Σημειωσε οτι τα μονοδιαστατα $H_{\varkappa}$ που αντιστοιχουν σε πραγματικες ιδιοτιμες λ ειναι της μορφης $H_{\varkappa} = [\lambda]$ (μονοδιαστατες μητρες) ενω η μικροτερης διαστασης $H_{\varkappa}$ της μορφης (**) ειναι η $\begin{bmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{bmatrix}$. Παραδειγμα μιας κανονικης μορφης ειναι λ.χ. η

$$\left[\begin{array}{ccccccccccccccc}
2 & 3 & & & & & & & & & & & & & \\
-3 & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
1 & 0 & 2 & 3 & & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & -3 & 2 & & & & & & & & & & & \\
& & & & 2 & 3 & & & & & & & & & \\
& & & & -3 & 2 & & & & & & & & & \\
& & & & & & 2 & 3 & & & & & & & \\
& & & & & & -3 & 2 & & & & & & & \\
& & & & & & & & 5 & & & & & & \\
& & & & & & & & 1 & 5 & & & & & \\
& & & & & & & & & 1 & 5 & & & & \\
& & & & & & & & & & & 5 & & & \\
& & & & & & & & & & & 1 & 5 & & \\
& & & & & & & & & & & & & 5 & \\
& & & & & & & & & & & & & & 5
\end{array}\right].$$

ΑΣΚΗΣΗ-4 Προσδιορισε ελαχιστο και χαρακτηριστικο πολυωνυμο της προηγουμενης μητρας. Ακομη βρες την Jordan-Chevalley διασπαση της σε ημιαπλο και μηδενοδυναμο μερος.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Δειξε οτι καθε 2x2 πραγματικη μητρα ειναι ομοια προς μια εκ των α) $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{bmatrix}$.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Βρες ολες τις δυνατες κανονικες μορφες των 3x3 καθως και των 4x4 πραγματικων μητρων.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Μια nxn πραγματικη μητρα A λεγεται <u>αδυναμη</u> οταν $A^2=A$. Βρες παραδειγματα τετοιων μητρων. Βρες το ελαχιστο πολυωνυμο και δειξε οτι τετοιες μητρες ειναι διαγωνιοποιησιμες και εχουν ιδιοτιμες 1 ή 0 . Εξηγησε γιατι μια τετοια μητρα λεγεται "προβολη στον υποχωρο ImA".

ΑΣΚΗΣΗ-8 Μια nxn πραγματικη μητρα A λεγεται <u>ενελιξη (Involution)</u> οταν $A^2=I$. Βρες παραδειγματα τετοιων μητρων. Βρες το ελαχιστο πολυωνυμο και δειξε οτι τετοιες μητρες ειναι διαγωνιοποιησιμες και οι ιδιοτιμες τους ειναι ±1. Εξηγησε γιατι μια τετοια μητρα λεγεται "κατοπτρισμος ως προς τον λ=1 ιδιοχωρο V_1" (οταν $A\neq\pm I$).

ΑΣΚΗΣΗ-9 Δειξε οτι δυο nxn πραγματικες μητρες ειναι ομοιες οταν εχουν την ιδια μορφη Jordan (εκτος απο αναδιαταξη των $H_1,\dots,H_\sigma$) και αντιστροφως.

ΑΣΚΗΣΗ-10 Δειξε οτι μια nxn μιγαδικη μητρα A και η αναστροφος της A^t ειναι ομοιες δειχνοντας πρωτα την αναλογη ιδιοτητα για τις μητρες της μορφης
$$\begin{bmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

ΑΣΚΗΣΗ-11 Βρες την κανονικη μορφη της
$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ΑΣΚΗΣΗ-12 Δειξε οτι μια nxn μιγαδικη μητρα A που ικανοποιει την $A^\kappa=I$ ειναι διαγωνιοποιησιμη. Βρες την κανονικη μορφη Jordan μιας 3x3 πραγματικης μητρας που ικανοποιει την $A^3=I$.

ΑΣΚΗΣΗ-13 Δειξε οτι το ελαχιστο πολυωνυμο ενος τελεστη F του K-διανυσματικου χωρου V, διαιρηται με το ελαχιστο πολυωνυμο του $F|W$, για καθε F-αναλλοιωτο υποχωρο W του V.

ΑΣΚΗΣΗ-14 Βρες ολες τις κανονικες μορφες μητρων με χαρακτηριστικο πολυωνυμο $(x-2)^3(x-5)^2$.

ΑΣΚΗΣΗ-15 Βρες ολες τις πραγματικες 7x7 κανονικες μορφες που αντιστοιχουν στο ελαχιστο πολυωνυμο $(x-2)^3(x^2+5)$.

ΑΣΚΗΣΗ-16 Βρες ολες τις πραγματικες κανονικες μορφες με χαρακτηριστικο πολυωνυμο $(x-5)^4(x-3)^2$ και ελαχιστο πολυωνυμο $(x-5)^2(x-3)^2$.

ΑΣΚΗΣΗ-17 Δειξε οτι ολες οι πραγματικες nxn μητρες A που ικανοποιουν την $A^n=I$, με n πρωτο $A\neq\pm I$, ειναι ομοιες μεταξυ τους.

ΑΣΚΗΣΗ-18 Δειξε οτι ο τελεστης F ειναι αντιστρεψιμος τοτε και μονον τοτε, οταν ο σταθερος ορος του ελαχιστου πολυωνυμου του ειναι μη μηδενικος.

ΑΣΚΗΣΗ-19 Δειξε οτι καθε nxn μιγαδικη μητρα ειναι ομοια προς μια ανω τριγωνικη.

ΑΣΚΗΣΗ-20 Δειξε οτι καθε πραγματικη αντισυμμετρικη μητρα ειναι ομοια προς μητρα της διπλανης μορφης.
$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & & \\ \lambda_1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & \lambda_\kappa & & \\ & & & \lambda_\kappa & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix}$$

§20 Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

Οστις εξοδευει τον καιρον εις τα ανωφελη, ή πολλα ολιγον αξια, εις εκεινον καιρος δεν μενει δια τα αξιολογα και αν κατα δυστυχιαν ο εις εκεινα δαπανωμενος καιρος ηναι ο καιρος της νεοτητος, οι τυποι της ουτιδανοσχολιας μενουσι διαπαντος ανεξαλιπτοι εις την κεφαλην του, και την καμνουν ανεπιδεκτον πασης φιλοσοφικης θεωριας.

Α. Κοραης (Προλεγομενα εις τους αρχαιους Ελληνας συγγραφεις)

Εστω $F:V \longrightarrow V$ τελεστης του n-διαστατου C-διανυσματικου χωρου V. Οπως για καθε πολυωνυμο $p(x) \in C[x]$ μπορουμε ν αντικαταστησουμε το x με τον F και να παρουμε ενα νεο τελεστη p(F), ετσι και για ορισμενες σειρες με απειρους ορους

$$g(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{1}$$

εχει πολλες φορες νοημα ν αντικαταστησουμε το x με F, οποτε οριζεται τελεστης

$$g(F) = a_0I+a_1F+a_2F^2+a_3F^3+\ldots+a_nF^n+\ldots \quad . \tag{2}$$

Τουτο λ.χ. συμβαινει παντοτε, οταν ο F ειναι μηδενοδυναμος (αφου $F^n=0$ για $n\geq k$=δυναμη του F). Ιδιαιτερο ενδιαφερον παρουσιαζει η εκθετικη σειρα που συγκλινει για καθε μιγαδικο αριθμο x:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

Θα δουμε πιο κατω οτι η σειρα

$$e^F = I + F + \frac{1}{2!}F^2 + \frac{1}{3!}F^3 + \ldots + \frac{1}{n!}F^n + \ldots \tag{3}$$

εχει νοημα (συγκλινει) για καθε τελεστη F και οριζει ενα νεο τελεστη που ονομαζω <u>εκθετικο του F</u> (συμβολιζω με e^F ή expF). Τεσσερις ειναι οι σηματικες ιδιοτητες της εκθετικης:

1. $e^Fe^G = e^{F+G}$ οταν $FG = GF$
2. $|e^F| = e^{tr(F)}$
3. $G^{-1}(e^F)G = e^{(G^{-1}FG)}$ για καθε αντιστρεψιμο τελεστη G
4. $Fe^F = e^FF$

Στην περιπτωση που F ειναι nxn μιγαδικη μητρα (τελεστης του C^n) η συγκλιση μπορει να ορισθη χρησιμοποιωντας τα στοιχεια της μητρας. Ετσι λεμε οτι η ακολουθια μητρων $A^{(r)}=[a_{ij}^{(r)}]$ συγκλινει στην $A=[a_{ij}]$, και γραφουμε $\lim A^{(r)}= A$, οταν για καθε i,j ισχυει $\lim a_{ij}^{(r)}= a_{ij}$.

Παρομοια για τη σειρα μητρων

$$a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n + \dots$$

λεμε οτι συγκλινει στην μητρα A_o, οταν για τις μητρες (μερικα αθροισματα) $A^{(n)} = a_0I + a_1A + \dots + a_nA^n$

ισχυει $\lim A^{(n)} = A_o$.

Μ αυτη την εννοια συγκλισης προχωρησε στις επομενες ασκησεις.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Δειξε οτι η εκθετικη διαγωνιας μητρας $\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \ddots \\ & & & \omega \end{bmatrix}$ συγκλινει στην διαγωνια μητρα $e^{\Lambda} = \begin{bmatrix} e^{\alpha} & & & \\ & e^{\beta} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\omega} \end{bmatrix}$.

ΑΣΚΗΣΗ-2 Δειξε τις τεσσερις ιδιοτητες της εκθετικης για διαγωνιες μητρες.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Για μητρες A της μορφης $A = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_\varkappa} \end{bmatrix}$ οπου A_i τετραγωνικες μητρες μικροτερων διαστασεων, δειξε -υποθετωντας συγκλιση και την ιδιοτητα 1- οτι $\exp A = \begin{bmatrix} \boxed{e^{A_1}} & & & \\ & \boxed{e^{A_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{e^{A_\varkappa}} \end{bmatrix}$.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Εστω t πραγματικος αριθμος και $A = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$ μηδενοδυναμη nxn μητρα. Δειξε οτι

$$\exp(tA) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ t & 1 & & & & \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & & & \\ \frac{t^3}{3!} & \frac{t^2}{2!} & t & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \dots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{bmatrix} . \qquad (4)$$

ΑΣΚΗΣΗ-5 Υποθετοντας συγκλιση και την πρωτη ιδιοτητα της εκθετικης δειξε για την προηγουμενη μητρα A και την μοναδιαια I_n οτι $\exp(t(A+\lambda I_n)) = e^{t\lambda}\exp(tA)$.

Απο την προηγουμενη ασκηση και την ασκηση-3 συμπεραινουμε την συγκλιση της εκθετικης για καθε μητρα J σε Jordan μορφη. Απ αυτη μπορουμε να συμπερανουμε την συγκλιση της e^A για καθε μητρα A. Πραγματι, κατα τα προηγουμενα θα υπαρχει καταλληλη αντιστρεψιμη Q ετσι ωστε $QAQ^{-1} = J$ να ειναι η Jordan μορφη της A. Τοτε η σειρα για την e^J συγκλινει επομενως και η σειρα για την $e^A = Q^{-1}e^JQ$ συγκλινει. Στο θεμα της συγκλισης γενικωτερα για τελεστες F καθως και στην αποδειξη των 4 ιδιοτητων της εκθετικης θα επανελθω πιο κατω. Εδω χρησιμοποιω σαν δεδομενη τοσο τη συγκλιση καθως και τις ιδιοτητες που εχουν μεταξυ αλλων και τη συνεπεια e^{-A} να ειναι η αντιστροφη της e^A. Προχωρω λοιπον σε μια σημαντικη εφαρμογη της εκθετικης στα συστηματα διαφορικων εξισωσεων. Το προβλημα εδω ειναι για δοθησα μητρα $A = [a_{ij}]$ να βρεθουν συναρτησεις παραγωγισιμες μιας πραγματικης μεταβλητης $(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$ οι οποιες να ικανοποιουν το συστημα των διαφορικων εξισωσεων:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{aligned}$$

τουτο για καθε t και για t=0 να ισχυει η "αρχικη συνθηκη" $x_1(0)=u_1,\ldots,x_n(0)=u_n$. Συμβολικα σε διανυσματικη μορφη τουτο γραφεται

$$\mathbf{x}'(t)= A\mathbf{x}(t) \quad \text{και} \quad \mathbf{x}(0)= \mathbf{u}. \tag{5}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ-1 Η καμπυλη του C^n, $\mathbf{x}(t)= e^{tA}\mathbf{u}$, ειναι η μοναδικη λυση του προβληματος (5).

Πραγματι, κατ αρχην η καμπυλη αυτη ειναι παραγωγισιμη και ικανοποιει την (5):

$$\lim \frac{1}{h}(\mathbf{x}(t+h)-\mathbf{x}(t)) = \lim \frac{1}{h}(e^{tA+hA}-e^{tA})\mathbf{u} =$$

$$= e^{tA}\lim \frac{1}{h}(e^{hA}-I)\mathbf{u} = e^{tA}A\mathbf{u} = Ae^{tA}\mathbf{u}.$$

Αν τωρα $\mathbf{x}_1(t)$ ηταν μια αλλη λυση της (5), τοτε η καμπυλη του C^n

$$\mathbf{y}(t) = e^{-tA}\mathbf{x}_1(t)$$

θα ειχε παραγωγο

$$\mathbf{y}'(t) = -Ae^{-tA}\mathbf{x}_1(t) + e^{-tA}(A\mathbf{x}_1(t)) = 0$$

και $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_1(0) = \mathbf{u}$, αρα θα ηταν σταθερα $\mathbf{y}(t)=\mathbf{u}$ για καθε t. Τοτε ομως θα ειχαμε $e^{-tA}\mathbf{x}_1(t)=\mathbf{u}$, αρα $\mathbf{x}_1(t)= e^{tA}\mathbf{u}$. ο.ε.δ.

Το θεωρημα οχι μονον εξασφαλιζει λυση και μονοσημαντο του (5) αλλα δινει και την μορφη των λυσεων αν λαβουμε υπ οψιν την ασκηση-5. Ετσι συμφωνα μ αυτην και τον (4) τα στοιχεια της e^{tJ} για μητρα J σε μορφη Jordan θα ειναι της μορφης $c_{ij}e^{t\lambda}x^s$, οπου λ ιδιοτιμη της J. Αρα για τυχουχα μητρα A τα στοιχεια της $e^{tA} = Q^{-1}e^{tJ}Q$, οπου $J=QAQ^{-1}$ η μορφη Jordan της A, θα ειναι γραμμικοι συνδυασμοι συναρτησεων: $e^{t\lambda}p(x)$ οπου p(x) πολυωνυμο του x και λ ιδιοτιμη της A.

Απο το θεωρημα λοιπον συμπεραινουμε οτι οι συναρτησεις $x_i(t)$ θα ειναι εν γενει γραμμικοι συνδυασμοι συναρτησεων της παραπανω μορφης.

Στο προβλημα (5) αναγεται επισης και το "προβλημα αρχικων τιμων γραμμικων διαφορικων εξισωσεων ανωτερας ταξεως". Τουτο μπορει να διατυπωθει ως εξης:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Να βρεθη συναρτηση } x(t) \text{ που εχει i-στη παραγωγο} \\ x^{(i)}(t) \text{ για } i=1,2,\ldots,n \text{, ετσι ωστε} \\ x^{(n)}(t)= a_1x(t)+a_2x^{(1)}(t)+ \ldots +a_nx^{(n-1)}(t) \\ \text{και για } t=0 \text{ παιρνει τις αρχικες τιμες} \\ x(0) = u_1,\ x^{(1)}(0) = u_2,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = u_n.\end{array}\right\} \quad (6)$$

Παιρνοντας "βοηθητικες μεταβλητες" τις παραγωγους της αγνωστης συναρτησης: $x_1(t)=x(t)$, $x_2(t)=x^{(1)}(t),\ldots,x_n(t)=x^{(n-1)}(t)$ βλεπουμε οτι το (6) μετατρεπεται σε προβλημα της μορφης (5) για τις $x_1,\ldots,x_n$, με μητρα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & & & a_n \end{bmatrix}$$

της οποιας το χαρακτηριστικο πολυωνυμο ειναι (ασκηση 17-11)

$$\pm(x^n-a_1-a_2x-\ldots-a_nx^{n-1}).$$

Ετσι απο το προηγουμενο θεωρημα και την παρατηρηση που το ακολουθει εχουμε αμεσως την αποδειξη του επομενου θεωρηματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ-2 Το προβλημα (6) εχει μοναδικη λυση την πρωτη συντεταγμενη του διανυσματος $e^{tA}\mathbf{u}$, οπου A η προηγουμενη μητρα. Επισης η λυση αυτη ειναι γραμμικος συνδυασμος συναρτησεων της μορφης $e^{t\lambda}p(x)$, οπου p(x) πολυωνυμο του x και λ ριζα του πολυωνυμού (που οριζει την διαφορικη εξισωση) $x^n-a_1-a_2x-\ldots-a_nx^{n-1}$.

Για παραδειγμα η λυση του προβληματος (του αρμονικου ταλαντωτη)

$$\left.\begin{array}{l} x'' + K\,x = 0 \\ x(0)=u_1,\ x'(0)=u_2 \end{array}\right\} \qquad (*)$$

ειναι η πρωτη συντεταγμενη του διανυσματος e^{tA}, οπου $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & 0 \end{bmatrix}$. Λογαριαζεται τουτη ευκολα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{bmatrix} 0 & -K \\ K^2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^4}{4!}\begin{bmatrix} K^2 & 0 \\ 0 & K^2 \end{bmatrix} + \ldots =$$

$$\begin{bmatrix} 1-K\frac{t^2}{2!} + K^2\frac{t^4}{4!} - K^3\frac{t^6}{6!} + \ldots, & t-K\frac{t^3}{3!} + K^2\frac{t^5}{5!} + \ldots \\ ******* \quad , & ******* \end{bmatrix}$$

Οι σειρες αναλογα με το προσημο του K δινουν

$\begin{bmatrix} 1 & t \\ * & * \end{bmatrix}$ για $K=0$, $\begin{bmatrix} \cos\sqrt{K}t & (\sin\sqrt{K}t)/\sqrt{K} \\ * & * \end{bmatrix}$ για $K>0$,

και $\begin{bmatrix} \cosh\sqrt{|K|}\ t & (\sinh\sqrt{|K|}\ t)/\sqrt{|K|} \\ * & * \end{bmatrix}$ για $K<0$.

Κατα το θεωρημα λοιπον οι λυσεις του (*) θα ειναι

$x(t) = u_1 + tu_2$ για $K=0$,

$x(t) = u_1\cos(\sqrt{K}t) + u_2(\sin(\sqrt{K}t)/\sqrt{K})$ για $K>0$ και

$x(t) = u_1\cosh(\sqrt{|K|}t) + u_2(\sinh(\sqrt{|K|}t)/\sqrt{|K|})$ για $K<0$.

Ερχομαι τωρα στο θεμα της συγκλισης της εκθετικης σειρας για τυχοντες τελεστες. Μια συστηματικη εξεταση του ζητηματος μπορει να γινει με τη βοηθεια της εννοιας της norm ενος C-διανυσματικου χωρου. Τουτη ειναι απομιμηση της απολυτης τιμης των πραγματικων αριθμων ή του μηκους ενος Ευκλειδιου χωρου (ασκηση 11-2). Ειναι λοιπον η norm μια συναρτηση $|\mathbf{x}|$ του C-διανυσματικου χωρου V, με τις ιδιοτητες:

α) $|\mathbf{x}| > 0$ για καθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{O}$,

β) $|\lambda\mathbf{x}| = |\lambda|\,|\mathbf{x}|$ για καθε $\lambda \in C$ και $\mathbf{x} \in V$,

γ) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ για καθε $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Δειξε οτι η $|\mathbf{x}|_1 = \max_i(|x_i|)$ για $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ οριζει μια norm στο C^n.

Δειξε το ιδιο και για τη συναρτηση $|\mathbf{x}|_2 = |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$.

Ειναι αξιοσημειωτο οτι καθε norm στο V οριζει αυτοματα μια norm στο διανυσματικο χωρο L(V,V) των τελεστων του V :

$$|F| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{O}} \left\{\frac{|F(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|}\right\}$$

Δεχομενοι προς στιγμην την υπαρξη του supremum σ αυτο τον ορισμο, μπορουμε αμεσως να δειξουμε τις δυο ιδιοτητες

$$\text{(i)} \quad |F(x)| \leq |F||x|$$
$$\text{(ii)} \quad |FG| \leq |F||G|$$

Με τη βοηθεια της norm μπορουμε να ορισουμε οριο η συγκλιση σ ενα διανυσματικο χωρο μεταφεροντας το προβλημα στους πραγματικους αριθμους

$$\lim x_n = x_0 \xleftrightarrow{\text{ορ}} \lim|x_n - x_0| = 0 \ .$$

Για χωρους πεπερασμενης διαστασης οπως ο V, αποδεικνυεται οτι ολες οι δυνατες norm ειναι ισοδυναμες και η εννοια της συγκλισης ή του οριου,παρ ολο που οριζεται με καποια ειδικη norm,ειναι τελικα ανεξαρτητη απ αυτη. Πραγματι αποδεικνυεται οτι για δυο οποιεσδηποτε norm $|\ldots|_1$, $|\ldots|_2$ του V, υπαρχουν θετικες σταθερες m, M ετσι ωστε

$$m|x|_1 \leq |x|_2 \leq M|x|_1$$

Τουτη δειχνει αμεσως οτι

$$\lim|x_n - x_0|_1 = 0 \quad \text{τοτε και μονον οταν} \quad \lim|x_n - x_0|_2 = 0 \ .$$

Ενα αλλο σημαντικο γεγονος ειναι οτι η norm ειναι <u>πληρης</u> δηλαδη καθε ακολουθια $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ που ικανοποιει την

$$\lim|x_m - x_n| = 0 \tag{**}$$

(κριτηριο του Cauchy) οριζει ενα οριο $x_0 \in V$ προς το οποιο συγκλινει. Τουτες ειναι στοιχειωδεις γνωσεις που ο ενδιαφερομενος θα βρει σ ενα οποιοδηποτε εισαγωγικο βιβλιο αναλυσης. Για τους τελεστες μας εχουν την εξης συνεπεια :

ΛΗΜΜΑ Εστω $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ μια απολυτως συγκλινουσα σειρα για καθε $x \in C$. Τοτε η ακολουθια των τελεστων

$$g_n(F) = a_0I + a_1F + a_2F^2 + \ldots + a_nF^n \quad \text{(n-στο μερικο αθροισμα)}$$

συγκλινει και οριζει ενα τελεστη $g(F)$, για καθε $F \in L(V,V)$.

Η Αποδειξη στηριζεται στο οτι η ακολουθια των μερικων αθροισματων $g_n(F)$ ικανοποιει την (**) και στην απολυτη συγκλιση της $g(x)$:

$$|g_{n+k}(F) - g_n(F)| = |a_{n+1}F^{n+1} + \ldots + a_{n+k}F^{n+k}|$$
$$\leq |a_{n+1}||F|^{n+1} + \ldots + |a_{n+k}||F|^{n+k} \ .$$

Λογω της απολυτης συγκλισης της $g(x)$ η τελευταια παρασταση τεινει στο 0. ο.ε.δ. Το λημμα εφαρμοζεται ειδικα στην εκθετικη σειρα και εξασφαλιζει την υπαρξη του exp(F) για καθε τελεστη F. Η αποδειξη της πρωτης βασικης ιδιοτητας της εκθετικης γινεται με αναλογο τροπο, εκτιμωντας την διαφορα των μερικων αθροισματων των αντιστοιχων σειρων

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!}(F+G)^k - \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} F^m\right)\left(\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} G^r\right) = \sum \frac{1}{p!q!} F^p G^q ,$$

οπου το τελευταιο αθροισμα εκτεινεται σε ολα τα ζευγη (p,q) με $n < \max(p,q)$ και $p+q \leqq 2n$. Απο δαυτα υπαρχουν $n(n+1)$ το πληθος και αν υποθεσουμε οτι $|F| \leqq M$ και $|G| \leqq M$ για καποιο θετικο M, τοτε

$$\left|\sum \frac{1}{p!q!} F^p G^q\right| \leqq \sum \frac{1}{p!q!} M^{p+q} \leqq \frac{n(n+1)}{n!} M^{2n} .$$

Ο τελευταιος ορος ομως τεινει στο 0 και τουτο αποδεικνυει την ιδιοτητα $\exp(F+G)=\exp(F)\exp(G)$ της εκθετικης για μετατιθεμενους $FG=GF$. Σημειωσε οτι ο υπολογισμος της διαφορας των μερικων αθροισματων και κυριως η αναπτυξη του $(F+G)^k$ κατα τον διωνυμικο τυπο, δεν θα ηταν δυνατη χωρις την μεταθετικοτητα αυτων των τελεστων.

Απο τις υπολοιπες ιδιοτητες της εκθετικης η 3. και 4. ισχυουν για τα μερικα αθροισματα $e_n(F)$ της εκθετικης

$$F\, e_n(F) = e_n(F)\, F \quad \text{καθως και} \quad G^{-1}e_n(F)G = e_n(G^{-1}FG)$$

αρα θα ισχυουν και για το οριο αυτων που ειναι η exp(F).

Η ιδιοτητα 2. θελει καπως λεπτοτερη σκεψη. Κατ αρχην η ιδιοτητα αυτη ισχυει για μητρες. Πραγματι, διασπωντας την μητρα $A = S + N$ (Jordan-Chevalley διασπαση) σε ημιαπλη και μηδενοδυναμη εχουμε $\exp(A) = \exp(S+N) = \exp(S)\exp(N)$. Απο την ασκηση-5 συναγεται ομως οτι για μηδενοδυναμες μητρες N, $|\exp(N)| = 1$ και για ημιαπλες $|\exp(S)| = e^{tr(S)}$. Αναγοντας την A στην μορφη Jordan βλεπουμε οτι $tr(S) = tr(A)$ αρα τελικα εχουμε την αποδειξη της ιδιοτητας 2. για εκθετικες μητρων. Σ αυτη την περιπτωση αναγουμε τελικα την γενικη περιπτωση τελεστη F, διαλεγοντας μια βαση $a_1,\dots,a_n$ στον V και χρησιμοποιωντας την μητρα παραστασης Λ του F ως προς αυτη τη βαση $F_\Lambda = S_a \circ F \circ S_a^{-1}$. Τουτη η σχεση μεταφερεται και στα μερικα αθροισματα των εκθετικων και μεσω αυτων και στις εκθετικες οποτε συμπεραινομε οτι $\exp(\Lambda)= S_a \exp(F) S_a^{-1}$, που σημαινει οτι $\exp(\Lambda)$ ειναι η μητρα παραστασης ως προς την ιδια βαση του τελεστη $\exp(F)$. Εφ οσον λοιπον εξ ορισμου $|\exp(F)| = |\exp(\Lambda)|$ και $tr(F)=tr(\Lambda)$ η ιδιοτητα επεται απο την αντιστοιχη για μητρες.

ΑΣΚΗΣΗ-7 Για μια μητρα $A \in M_C(n,n)$ οριζεται η συζηγης $A^* = \bar{A}^t$. Δειξε οτι $\exp(A^*) = (\exp(A))^*$.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Δειξε οτι για μετατιθεμενες μητρες AB=BA ισχυει επισης $\exp(A)\exp(B)=\exp(B)\exp(A)$.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Υπολογισε την εκθετικη των μητρων $\begin{bmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{bmatrix}$, και γενικωτερα την εκθετικη της μητρας (**) σελ. 80 .

ΑΣΚΗΣΗ-10 Υπολογισε την εκθετικη της μητρας $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ [Προσοχη η μητρα δεν ειναι στην κανονικη της μορφη].

ΑΣΚΗΣΗ-11 Δειξε οτι καθε συμμετρικη θετικα ορισμενη μητρα A γραφεται $A = \exp(S)$ για καταλληλη επισης συμμετρικη S.

ΑΣΚΗΣΗ-12 Δειξε οτι για μητρες $A \in M_C(n,n)$ ισχυει

$$\lim \frac{1}{h}(e^{hA}-I) = A \quad .$$

ΑΣΚΗΣΗ-13 Δειξε τις ιδιοτητες (i),(ii) της norm σελ.88. Αποδειξε επισης (υποθετοντας την υπαρξη του supremum) οτι η $|F|$ οπως οριζεται στο τελος της σελ. 87 ειναι μια norm στο συνολο των τελεστων L(V,V).

ΑΣΚΗΣΗ-14 Δειξε οτι για αντισυμμετρικες μητρες nxn διαστασεων A, η exp(A) ειναι ορθογωνια.

ΑΣΚΗΣΗ-15 Λυσε το αντιστοιχο συστημα διαφορικων εξισωσεων (5) για την μητρα $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ και αρχικες συνθηκες: $x_1(0)=4$, $x_2(0)=8$, $x_3(0)=5$.

ΑΣΚΗΣΗ-16 Λυσε την διαφορικη εξισωση με σταθερους συντελεστες $x'' = 3x'-2x$ και αρχικες συνθηκες $x(0)=7$, $x'(0)=5$.

Ενας μαθητης ρωτησε τον δασκαλο Ντσονγκ, τι πρεπει να κανει ενας αξιωματουχος για να εχει επιτυχια. Ο δασκαλος ειπε: Αυτα που δεν ξερει πρεπει να τα μαθει. Γι αυτα που αμφιβαλλει πρεπει να ρωτηση. Αν θελει τη δραση, να συναναστρεφεται αξιους ανθρωπους. Μ αυτο τον τροπο θα φθαση στην επιτυχια, ακομη κι αν περπατα ξυπολυτος σ αποκρημνο μονοπατι. Σημερα ομως ειναι δυσαρεστο στους νεωτερους να βρισκονται σε κατωτερη θεση. Δεν ξερουν να υπηρετουν αξιους ανθρωπους, ντρεπονται να μην ξερουν, ωστοσο δεν ρωτουν. Οταν θελουν να δρασουν ειναι η γνωση τους ανεπαρκης και ψηλαφουν αβεβαιοι στο σκοταδι.

Λι Γκι

Ολες οι φιλοσοφιες ειναι διανοητικες και επομενως μη πληρεις. Οι φιλοσοφιες αυτες εχουν σκλαβωσει τον ανθρωπο. Εχουν επινοησει το τι θα επρεπε να ειναι η κοινωνια και εχουν θυσιασει τον ανθρωπο στις θεωριες τους.

Κρισναμουρτι

§21 ΟΜΑΔΕΣ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΕΣ ΤΟΥ LIE

> Χωρις της φιλοσοφιας τον λυχνον οστις ελπιζει εις τιποτε (και τουτο σημαινει να το κερδησει χωρις να ζημιωθει τον νουν και τα ηθη του), ελπιζει πραγμα αδυνατον.
>
> Α. Κοραης

Μεχρι τωρα ασχοληθηκαμε με προβληματα που αφορουν σ ενα και μονο τελεστη F. Εδω στρεφομαι τωρα σε μερικες ιδιοτητες υποσυνολων του $M_C(n,n)$ που αποτελουνται απο μητρες, που εχουν καποιο κοινο χαρακτηριστικο.
<u>Ομαδα</u> λεμε ενα υποσυνολο Ο του $M_C(n,n)$ που εχει τις ιδιοτητες:

(Ο1) για καθε $A,B \in O$ επεται οτι και $AB \in O$,

(Ο2) για καθε $A \in O$ υπαρχει η αντιστροφη $A^{-1} \in O$.

Μερικα παραδειγματα ομαδων με τους καθιερωμενους συμβολισμους ειναι:

$GL(n,C)$ = Συνολο των αντιστρεψιμων μητρων του $M_C(n,n)$. Λεγεται Γενικη γραμμικη (μιγαδικη) ομαδα n-διαστασεων.

$GL(n,R)$ = Συνολο των αντιστρεψιμων μητρων του $M_R(n,n)$. Λεγεται Γενικη πραγματικη γραμμικη ομαδα n-διαστασεων.

$SL(n,C)$ = Συνολο μητρων A του $M_C(n,n)$ με οριζουσα $|A| = 1$. Λεγεται Ειδικη γραμμικη (μιγαδικη) ομαδα n-διαστασεων.

$SL(n,R)$ = Συνολο μητρων A του $M_R(n,n)$ με οριζουσα $|A| = 1$. Λεγεται Ειδικη πραγματικη γραμμικη ομαδα n-διαστασεων.

$\{\exp(tA) \mid t \in R\}$ Λεγεται μονοπαραμετρικη ομαδα παραγομενη απο την μητρα $A \in M_C(n,n)$.

Ομαδες οπως οι προηγουμενες ειναι στενα συνδεδεμενες (μεσω της εκθετικης) με αλλα υποσυνολα του $M_C(n,n)$ που οριζονται ως εξης:
<u>Αλγεβρα του Lie</u> λεμε ενα υποσυνολο L του $M_C(n,n)$ που εχει τις ιδιοτητες:

(Α1) Το L ειναι C- (ή R-) διανυσματικος υποχωρος ,

(Α2) Για καθε $A,B \in L$, ο μεταθετης $[A,B]=AB-BA \in L$.

Τα επομενα ειναι παραδειγματα αλγεβρων του Lie και απεικονιζονται μεσω της εκθετικης στις προηγουμενες ομαδες :

$gl(n,C) = M_C(n,n)$ αλγεβρα Lie της $GL(n,C)$.

$gl(n,R) = M_R(n,n)$ αλγεβρα Lie της $GL(n,R)$.

$sl(n,C)$ = Συνολο μητρων A του $M_C(n,n)$ με $tr(A)=0$.

$sl(n,R)$ = Συνολο μητρων A του $M_R(n,n)$ με $tr(A)=0$.

$\{tA \mid t \in R\}$ Αλγεβρα Lie της μονοπαραμετρικης ομαδας που παραγεται απο την μητρα A του $M_C(n,n)$.

ΑΣΚΗΣΗ-1 Διαπιστωσε για τα πεντε παραδειγματα ομαδων οτι ικανοποιουν πραγματι τις (O1),(O2). Κανε το ιδιο για τα παραδειγματα αλγεβρων του Lie και τις αντιστοιχες ιδιοτητες (A1),(A2).

ΑΣΚΗΣΗ-2 Διαπιστωσε οτι ισχυει $\exp(sl(n,C)) \subset SL(n,C)$.

ΑΣΚΗΣΗ-3 Διαπιστωσε οτι για τον μεταθετη $[A,B]$ ισχυει η ταυτοτητα του Jacobi: $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]] = 0$ για καθε A,B, και C απο το $M_C(n,n)$.

Περισσοτερα παραδειγματα τετοιων υποσυνολων του $M_C(n,n)$ δινει το:

ΘΕΩΡΗΜΑ-1 Εστω $J \in M_C(n,n)$ αντιστρεψιμη μητρα και

$O_J = \{A \in M_C(n,n)$ με την ιδιοτητα $A^tJA = J\}$,

$L_J = \{A \in M_C(n,n)$ με την ιδιοτητα $A^tJ+JA = 0\}$.

Ισχυουν τα εξης:

(I) Η O_J ειναι ομαδα.

(II) Η L_J ειναι αλγεβρα του Lie.

(III) $\exp(L_J) \subset O_J$.

(I): Αν $A,B \in O_J$, τοτε $B^t(A^tJA)B = B^tJB = J$. Δηλαδη $AB \in O_J$. Επισης η $A^tJA = J$ συνεπαγεται $(A^t)^{-1}J(A^{-1}) = J$. Τουτη λογω της ταυτοτητας $(A^t)^{-1}= (A^{-1})^t$ δειχνει οτι $A^{-1} \in O_J$.

(II): Αν $A,B \in L_J$ και $\lambda,\mu \in C$ τοτε $(\lambda A+\mu B)^tJ+J(\lambda A+\mu B) = \lambda(A^tJ+JA)+\mu(B^tJ+JB) = 0$. Τουτη δειχνει οτι ο L_J ειναι διανυσματικος υποχωρος του $M_C(n,n)$. Τωρα ο μεταθετης: $[A,B]^tJ+J[A,B] =(AB-BA)^tJ+J(AB-BA)$ λογω της $A^tJ = - JA$ και $B^tJ = - JB$ γραφεται $= (B^tA^t-A^tB^t)J+J(AB-BA) = (-B^tJA+A^tJB) + J(AB-BA) = (JBA - JAB) + J(AB-BA) = 0$. Τουτη δειχνει οτι $[A,B] \in L_J$.

(III): Εστω $A \in L_J$, δηλαδη $A^tJ+JA=0$. Θεωρω την καμπυλη μητρων $Y(s) = \exp(sA^t)J\exp(sA)$. Τουτη εχει παραγωγο μηδεν:

$$Y(s)' = (\exp(sA^t))'J\exp(sA) + \exp(sA^t)J(\exp(sA))' =$$
$$= \exp(sA^t)A^tJ\exp(sA) + \exp(sA^t)JA\exp(sA) =$$
$$= -\exp(sA^t)JA\exp(sA) + \exp(sA^t)JA\exp(sA) = 0.$$

Η τελευταια σημαινει ακριβως οτι $Y(s) =$ σταθερα $= Y(0) = J$. Αρα $\exp(sA) \in O_J$. ο.ε.δ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Ισχυει κατι ισχυροτερο απο το θεωρημα, που ομως για να το αποδειξουμε χρειαζεται λιγη αναλυση (πολλων μεταβλητων). Συγκεκριμμενα αποδεικνυεται οτι αν $A_1, A_2, \ldots, A_\varkappa$ ειναι μια βαση της L_J τοτε οι μητρες

$$A = \exp(s_1 A_1)\exp(s_2 A_2)\ldots\exp(s_\varkappa A_\varkappa)$$

για s_i μεταβαλλομενα σε μια αρκετα μικρη περιοχη $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ του 0, παριστουν με μονοσημαντο τροπο ολες της μητρες μιας "καταλληλης μικρης περιοχης" της μοναδιαιας μητρας I του O_J.
Γι αυτο το λογο οι $A_1, \ldots, A_\varkappa$ λεγονται <u>γεννητορες</u> της O_J και τα $s_1, \ldots, s_\varkappa$ <u>παραμετροι</u> της O_J. Τελος το $\varkappa$ αναφερεται σαν <u>διασταση</u> της O_J (ενω ειναι η διασταση του διαν. χωρου L_J).

Συχνα στις εφαρμογες για ν αποδειξουμε μια ιδιοτητα που σχετιζεται με τις μητρες A μιας ορισμενης ομαδας O_J αρκει να την αποδειξουμε για μητρες της μορφης $\exp(sA_i)$ οπου οι A_i ειναι γεννητορες της O_J. Εκλέγοντας καταλληλα τις A_i πετυχαινουμε συχνα μια πολυ απλη μορφη για τις $\exp(sA_i)$ κι αυτο διευκολυνει τα μεγιστα τους υπολογισμους. Παραδειγμα αποτελουν ολες οι κλασσικες ομαδες που χρησιμοποιουνται στην φυσικη:

$O(n) = \{A \in M_R(n,n)$ με $A^t I A = I$ (συντομα: $A^t A = I$)$\}$ = Ορθογωνια ομαδα
$o(n) = \{A \in M_R(n,n)$ με $A^t + A = 0$ (αντισυμμετρικες)$\}$ = ορθογωνια Lie αλγ.
Μια βαση της $o(n)$ αποτελουν οι $n(n-1)/2$ το πληθος αντισυμμετρικες μητρες nxn διαστασεων

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & & & & \\ \vdots & & \ddots & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & -1 & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

που εχουν 1 στην ij-θεση, -1 στην ji-θεση και 0 σ ολες τις αλλες θεσεις (για $i<j$).
Τουτες λοιπον αποτελουν ενα συστημα γεννητορων της $O(n)$ και οι αντιστοιχες $\exp(sE_{ij})$ εχουν την πολυ απλη μορφη

$$\exp(sE_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & & & & & \\ . & & \ddots & & & & \\ . & \cos(s) & \ldots & \sin(s) & \ldots & & 0 \\ . & & 1 & & & & \\ . & & & \ddots & & & \\ . & -\sin(s) & \ldots & \cos(s) & \ldots & & 0 \\ . & & & 1 & & & \\ . & & & & . & & \\ 0 & . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

που εχει 1 σ ολη τη διαγωνιο, εκτος των ii- και jj- θεσεων που εχει cos(s) και 0 ολα τ αλλα στοιχεια εκτος των ij- και ji- θεσεων που εχει αντιστοιχα sin(s) και -sin(s).

Αλλο παραδειγμα εφαρμογης του θεωρηματος ειναι οι πραγματικες ομαδες Lorentz

$$O(n,k) = \{A \in M_R(n,n) \text{ με } A^tJA = J\}, \text{ οπου } J = \begin{bmatrix} -1 & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(με k το πληθος -1 στην διαγωνιο). Η αντιστοιχη Lie αλγεβρα ειναι

$$o(n,k) = \{A \in M_R(n,n) \text{ με } A^tJ+JA=0\}.$$

Για να βρουμε την διασταση του o(n,k) γραφουμε την μητρα A στην μορφη $A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ οπου B,C,D,E μητρες kxk,kx(n-k),(n-k)xk και (n-k)x(n-k) διαστασεων αντιστοιχως. Η συνθηκη $A^tJ+JA=0$ ισοδυναμει τοτε με την $\begin{bmatrix} B^t & D^t \\ C^t & E^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -I_k & \\ & I_{n-k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I_k & \\ & I_{n-k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} = 0.$

Τουτη γραφεται

$$\begin{bmatrix} -B^t-B & D^t-C \\ -C^t+D & E^t+E \end{bmatrix} = 0,$$

που σημαινει οτι οι B,E ειναι αντισυμμετρικες και οι C,E αναστροφη η μια της αλλης.

ΑΣΚΗΣΗ-4 Δειξε οτι η διασταση της o(n,k) ειναι n(n-1)/2. Με την βοηθεια της προηγουμενης αναλυσης των στοιχειων της o(n,k) προσδιορισε γεννητορες E_{ij} της ομαδας O(n,k) και υπολογισε τις αντιστοιχες μονοπαραμετρικες ομαδες $\exp(sE_{ij})$.

Ενα επισης ενδιαφερον παραδειγμα αποτελουν οι πραγματικες συμπλεκτικες ομαδες που οριζονται για αρτια n=2m και $J = \begin{bmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{bmatrix}$

$$SP(m,R) = \{A \in M_R(n,n) \text{ με } A^tJA=J\}.$$

με αντιστοιχη Lie αλγεβρα

$$sp(m,R) = \{A \in M_R(n,n) \text{ με } A^tJ+JA=0\}.$$

Την διασταση της sp(m,R) βρισκουμε παλι γραφοντας την $A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ και εκτελωντας τους πολλαπλασιασμους A^tJ+JA, οποτε βρισκουμε

$$\begin{bmatrix} -D^t+D & B^t+E \\ -E^t-B & C^t-C \end{bmatrix} = 0.$$

Τουτη σημαινει: $D^t=D$ και $C^t=C$ (συμμετρικες) και $B^t=-E$.

ΑΣΚΗΣΗ-5 Βρες με την βοηθεια της προηγουμενης αναλυσης γεννητορες E_{ij} της SP(m,R) και υπολογισε τις αντιστοιχες μονοπαραμετρικες ομαδες $\exp(sE_{ij})$. Δειξε οτι $\dim(sp(m,R)) = 2m^2+m$.

Ενας λιγο διαφορετικος τροπος ορισμου ομαδων μητρων ειναι ο εξης: Για $A \in M_C(n,n)$ οριζεται η <u>συζηγης</u> μητρα $A^* = \bar{A}^t$ που χαρακτηριζεται απο την ιδιοτητα

$$(A\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},A^*\mathbf{y}) \text{ για καθε } \mathbf{x},\mathbf{y} \in C^n, \qquad (+)$$

οπου $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \ldots + x_n\bar{y}_n$ το κανονικο (ερμιτιανο) εσωτερικο γινομενο του C^n. Η αποδειξη του προηγουμενου θεωρηματος μεταφερεται κατα λεξη και δειχνει οτι για αντιστρεψιμη μητρα $J \in M_C(n,n)$ τα συνολα

$$O_J^* = \{A \in M_C(n,n) \text{ με } A^*JA = J\},$$

$$L_J^* = \{A \in M_C(n,n) \text{ με } A^*J+JA = 0\},$$

αποτελουν ομαδα και Lie αλγεβρα αντιστοιχα και $\exp(L_J^*) \subset O_J^*$.

ΑΣΚΗΣΗ-6 Αποδειξε τους προηγουμενους χαρακτηρισμους καθως και την χαρακτηριστικη ιδιοτητα της συζηγους μητρας (+).

Η πιο γνωστη περιπτωση ειναι αυτη οπου $J = I_n$, οποτε η αντιστοιχη ομαδα και Lie αλγεβρα λεγονται <u>μοναδιαιες (unitary)</u> και διδονται απο τις

$$U(n) = \{A \in M_C(n,n) \text{ με } A^*A = I\},$$

$$u(n) = \{A \in M_C(n,n) \text{ με } A^*+A = 0\}.$$

ΑΣΚΗΣΗ-7 Δειξε οτι η $A \in U(n)$ τοτε και μονον τοτε, οταν $(A\mathbf{x},A\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{y})$ για καθε $\mathbf{x},\mathbf{y} \in C^n$. Συμπερανε οτι η $A \in U(n)$ τοτε και μονον, οταν τα στηλοδιανυσματα της αποτελουν ορθοκανονικη βαση του C^n.

ΑΣΚΗΣΗ-8 Εστω $A \in M_C(n,n)$. Δειξε οτι αν W ειναι A-αναλλοιωτος υποχωρος του C^n, τοτε το ορθογωνιο συμπληρωμα $W^\perp$ ειναι A^*-αναλλοιωτος υποχωρος του C^n. Συμπερανε οτι για $A \in U(n)$ ο $W^\perp$ ειναι επισης A-αναλλοιωτος αρα η A ειναι ημιαπλη.

ΑΣΚΗΣΗ-9 Δειξε οτι $O(n) \subset U(n)$. Δειξε οτι οι ιδιοτιμες μιας $A \in U(n)$ εχουν $|\lambda| = 1$, επισης με καθε λ και το λ^{-1} ειναι επισης ιδιοτιμη. Με τη βοηθεια του θεωρηματος-3 (§19,σελ.80) δειξε οτι καθε ορθογωνια μητρα ειναι ομοια προς μια μητρα της διπλανης μορφης, οπου I_k και I_r οι μοναδιαιες μητρες k και r διαστασεων αντιστοιχως (μπορει k=0 ή r=0) και οι μητρες J_i εχουν την επομενη μορφη

$$\begin{bmatrix} \boxed{I_k} & & & & \\ & \boxed{-I_r} & & & \\ & & \boxed{J_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{J_s} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

οπου $\lambda = \cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi)$ οι διαφορες μιγαδικες ιδιοτιμες της Α.

ΑΣΚΗΣΗ-10 Βρες ολες τις διαφορετικες Jordan κανονικες μορφες ορθογωνιων 3x3 μητρων. Εξηγησε γιατι αληθευει η προταση: "Καθε ορθογωνια 3x3 μητρα ειναι ή ενας κατοπτρισμος ή μια στροφη ως προς καποιον αξονα, κατα μια σταθερη γωνια φ."

ΑΣΚΗΣΗ-11 Βρες την κανονικη μορφη Jordan μια μητρας Α απο το U(n). Ποια ειναι η διαφορα απο την κανονικη μορφη μιας ορθογωνιας μητρας;

ΑΣΚΗΣΗ-12 Δειξε οτι οι ιδιοχωροι V_i, V_j μιας $A \in U(n)$ ως προς δυο διαφορετικες ιδιοτιμες $\lambda_i \neq \lambda_j$ ειναι καθετοι μεταξυ τους. Δειξε οτι υπαρχει $Q \in U(n)$ ετσι ωστε $Q^{-1}AQ = B =$ κανονικη μορφη Jordan της Α. Παρομοια για μια ορθογωνια μητρα Α, υπαρχει αλλη ορθογωνια μητρα Q, ετσι ωστε $Q^{-1}AQ = B =$ η κανονικη μορφη της Α.

ΑΣΚΗΣΗ-13 Δειξε οτι η διασταση της U(n) ειναι n^2 και οτι οι μητρες $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ αποτελουν γεννητορες της U(2). Υπολογισε τις αντιστοιχες μονοπαραμετρικες ομαδες.

ΑΣΚΗΣΗ-14 Δειξε οτι τα υποσυνολα μητρων

$$SU(n) = \{A \in M_C(n,n) \text{ με } A^*A=I \text{ και } |A| = 1\},$$

$$su(n) = \{A \in M_C(n,n) \text{ με } A^*+A=0 \text{ και } tr(A)=0\}$$

ειναι ομαδα και Lie αλγεβρα αντιστοιχα (λεγονται ειδικη μοναδιαια ομαδα και Lie αλγεβρα αντιστοιχως). Δειξε οτι $\exp(su(n)) \subset SU(n)$. Βρες γεννητορες E_i της SU(n) και υπολογισε τις αντιστοιχες μονοπαραμετρικες ομαδες $\exp(sE_i)$.

ΑΣΚΗΣΗ-15 Δειξε οτι το υποσυνολο $T(n) \subset M_C(n,n)$ των κατω τριγωνικων μητρων με οριζουσα διαφορο του μηδενος, ειναι ομαδα. Δειξε οτι το συνολο t(n) ολων των κατω τριγωνικων μητρων του $M_C(n,n)$ ειναι Lie αλγεβρα και $\exp(t(n)) \subset T(n)$. Ισχυει στην προηγουμενη σχεση η ισοτητα;

Ενα απο τα ενδιαφεροντα προβληματα για παραπερα μελετη ειναι εκεινο της αναγωγης μιας μητρας A σε κανονικη μορφη $K = S^{-1}AS$, οταν περιοριζουμε την S σε καποια ομαδα μητρων. Η Jordan μορφη της A λ.χ. προκυπτει οταν επιτρεπουμε στο S να ειναι ενα οποιοδηποτε στοιχειο της $GL(n,R)$. Ποια ομως ειναι η απλουστερη μορφη που παιρνει η K οταν το S περιοριζεται σε καποια μικροτερη ομαδα μητρων, οπως λ.χ. η $U(n)$; Προβληματα αυτης της μορφης εμφανιζονται στην ταξινομηση των Lie αλγεβρων και παρουσιαζουν αρκετες δυσκολιες. Μια απλη περιπτωση περιγραφεται στην επομενη προταση:

ΘΕΩΡΗΜΑ-2 Μια μητρα $A \in M_C(n,n)$ αναγεται σε διαγωνια $\Lambda = S^{-1}AS$ μεσω μιας $S \in U(n)$, τοτε και μονον, οταν $AA^* = A^*A$ (τοτε η A λεγεται κανονικη (normal)).

Πραγματι, οταν η διαγωνια Λ ειναι $\Lambda = S^{-1}AS$ με $S \in U(n)$, τοτε $S^{-1} = S^*$ και $A = S\Lambda S^*$, αρα $A^* = S\Lambda^*S^*$, αρα $AA^* = S\Lambda\Lambda^*S^* = S\Lambda^*\Lambda S^* = A^*A$.

Το αντιστροφο αποδεικνυεται με επαγωγη ως προς n. Για n=1 ειναι προφανες. Υποθετουμε οτι ισχυει για τετραγωνικες μητρες διαστασεων μεχρι $(n-1)x(n-1)$ και θα δειξουμε οτι ισχυει και για nxn μητρες. Πραγματι, εστω A μια τετοια μητρα λ μια ιδιοτιμη της A και V ο αντιστοιχος ιδιοχωρος $V = \{\mathbf{x} \in C^n$ με $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$. Συμπληρωσε μια ορθοκανονικη βαση $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ του V σε ορθοκανονικη βαση $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1},\ldots,\mathbf{a}_n$ ολοκληρου του C^n. Τοτε το ορθογωνιο συμπληρωμα $V^\perp = \langle \mathbf{a}_{k+1},\ldots,\mathbf{a}_n \rangle$ ειναι A-αναλλοιωτος υποχωρος. Τουτο διοτι για $\mathbf{x} \in V^\perp$ και $\mathbf{y} \in V$ εχουμε:

$$(A\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},A^*\mathbf{y}) = 0,$$

οπου η τελευταια ισοτητα ισχυει διοτι $AA^*\mathbf{y} = A^*A\mathbf{y} = \lambda A^*\mathbf{y}$ που φανερωνει οτι το $A^*\mathbf{y}$ ειναι λ-ιδιοδιανυσμα του A (ανηκει στο V). Η μητρα U που εχει στηλοδιανυσματα τα $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ ειναι μοναδιαια και ισχυει

$$AU = U\begin{bmatrix} \lambda I_k & \\ & B \end{bmatrix} \quad \text{ισοδυναμα:} \quad U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda I_k & \\ & B \end{bmatrix}.$$

Η σχεση $AA^* = A^*A$ συνεπαγεται αμεσως την $BB^* = B^*B$. Η B ειναι μικροτερων διαστασεων $(n-k)x(n-k)$, αρα κατα την επαγωγικη υποθεση θα υπαρχει $S_1 \in U(n-k)$ ετσι ωστε η $\Lambda_1 = S_1{}^*BS_1$ να ειναι διαγωνια. Τοτε ομως η μητρα $\begin{bmatrix} I_k & \\ & S_1 \end{bmatrix}$ καθως και η $S = U\begin{bmatrix} I_k & \\ & S_1 \end{bmatrix}$ ανηκουν στην $U(n)$ και

$$S^*AS = \begin{bmatrix} I_k & \\ & S_1^* \end{bmatrix} U^*AU \begin{bmatrix} I_k & \\ & S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & \\ & S_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I_k & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k & \\ & S_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda I_k & \\ & \Lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \text{που ειναι διαγωνια. ο.ε.δ.}$$

ΑΣΚΗΣΗ-16 Δειξε οτι η A ειναι κανονικη μητρα, τοτε και μονον, οταν $|A\mathbf{x}| = |A^*\mathbf{x}|$ για καθε $\mathbf{x} \in C^n$.

ΑΣΚΗΣΗ-17 Δειξε οτι για καθε ιδιοτιμη λ και αντιστοιχο ιδιοδιανυσμα $\mathbf{x}$ της κανονικης μητρας A, το συζηγες $\bar{\lambda}$ ειναι ιδιοτιμη της A^* και το $\mathbf{x}$ αντιστοιχο ιδιοδιανυσμα.

Υπαρχει πληθωρα ασκησεων που θα μπορουσε κανεις να επισυναψει στις προηγουμενες και να οδηγηση την ερευνα προς μια ταξινομηση των αλγεβρων του Lie και ευρεση των απλουστερων δυνατων γεννητορων για τις ομαδες O_J (ή O_J^*). Ας κλεισουμε ομως το μαθημα σ αυτο το σημειο κι ας αφησουμε τουτο το ωραιο θεμα για καποια μελλοντικη συζητηση.

Σα βγεις στον πηγαιμο για την Ιθακη
να ευχεσαι ναναι μακρυς ο δρομος,
γεματος περιπετειες, γεματος γνωσεις.
Τους Λαιστρυγονας και τους Κυκλωπας,
τον θυμωμενο Ποσειδωνα μη φοβασαι,
τετοια στον δρομο σου ποτε σου δεν θα βρεις,
αν μεν η σκεψις σου υψηλη, αν εκλεκτη
συγκινησις το πνευμα και το σωμα σου αγγιζει.
Τους Λαιστρυγονας και τους Κυκλωπας,
τον αγριο Ποσειδωνα δεν θα συναντησεις,
αν δεν τους κουβανεις μες στην ψυχη σου,
αν η ψυχη σου δεν τους στηνει εμπρος σου.

Να ευχεσαι ναναι μακρυς ο δρομος.
Πολλα τα καλοκαιρινα πρωια να ειναι
που με τι ευχαριστησι, με τι χαρα
θα μπαινεις σε λιμενας πρωτοειδωμενους·
να σταματησεις σ εμπορεια Φοινικικα,
και τες καλες πραγματειες ν αποκτεισεις
σεντεφια και κοραλλια, κεχριμπαρια κ εβενους,
....

Κ. Καβαφης

§22 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Θυμιζω οτι σωμα ειναι ενα μη κενο συνολο K εφοδιασμενο με δυο πραξεις που σε δυο στοιχεια (αριθμους) $\alpha,\beta \in K$ αντιστοιχουν δυο αλλα:

$$\alpha+\beta \in K \text{ (αθροισμα) και } \alpha\beta \in K \text{ (γινομενο)}$$

με τις ιδιοτητες:

(1) $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ και $\alpha\beta = \beta\alpha$ για καθε $\alpha,\beta \in K$.

(2) $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$ και $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ για καθε $\alpha,\beta,\gamma \in K$.

(3) Για καθε $\alpha,\beta \in K$ η εξισωση $\alpha+x = \beta$ εχει μια ακριβως λυση $x \in K$.

(4) Υπαρχει ενα στοιχειο $0 \in K$ με την ιδιοτητα $\alpha+0=\alpha$ για καθε $\alpha \in K$.

(5) Για καθε $\alpha\neq 0$, $\beta \in K$ η εξισωση $\alpha x = \beta$ εχει μια μονον λυση $x \in K$.

(6) Ισχυει $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma+\beta\gamma$ για καθε $\alpha,\beta,\gamma \in K$.

Παραδειγματα σωματων ειναι τα

Q = Σωμα των ρητων αριθμων,

R = Σωμα των πραγματικων αριθμων,

C = Σωμα των μιγαδικων αριθμων,

Z_n = Σωμα των ακεραιων υπολοιπων με διαιρεση δια n , n = πρωτος.
$= \{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$.

Για καθε σωμα K, οριζεται το συνολο $K[x]$ = συνολο ολων των πολυωνυμων $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$, με συντελεστες $a_i \in K$.

Πολυωνυμα προστιθενται και πολλαπλασιαζονται κατα προφανη τροπο. π.χ.

$$(x^3+1)+(2x^2+3) = x^3+2x^2+4, \quad (x^3+1)(2x^2+3)= 2x^5+3x^3+2x^2+3.$$

Οταν ο βαθμος του $p_1(x) \in K[x]$ ειναι μεγαλυτερος ή ισος του βαθμου του $p_2(x) \in K[x]$ τοτε οριζεται το πηλικον $q(x) \in K[x]$ και το υπολοιπον $v(x) \in K[x]$ μεσω των σχεσεων

$$p_1(x) = p_2(x)q(x)+v(x) \quad \text{και } \beta\alpha\vartheta(v(x))<\beta\alpha\vartheta(p_2(x)). \quad (*)$$

Ετσι αν ειναι

$$p_1(x) = a_n x^n+\ldots+a_0, \quad p_2(x) = b_m x^m+\ldots+b_0,$$

το πηλικον θα ειναι ενα πολυωνυμο βαθμου $k = n-m$, $q(x)=q_k x^k+\ldots+q_0$, και το υπολοιπο θα ειναι βαθμου το πολυ $m-1$, αρα της μορφης $v(x) = v_{m-1}x^{m-1}+\ldots+v_0$. Οι αγνωστοι $q_k,\ldots,q_0$, $v_{m-1},\ldots,v_0$ προσδιοριζονται απο την (*) συγκρινοντας τους ισοβαθμιους ορους των δυο πλευρων της ισοτητας. Για παραδειγμα, ας διαιρεσουμε το $p(x) = 15x^5+14x^4+13x^2+12x+11$ με το $p_2(x) = 3x^2+4x+5$.
Το πηλικον θα ειναι βαθμου 3 και το υπολοιπο βαθμου το πολυ 1.

Η (*) λοιπον θα εχει την μορφη

$$(15x^5+14x^4+13x^2+12x+11)=(3x^2+4x+5)(q_3x^3+q_2x^2+q_1x+q_0)+(v_1x+v_0).$$

Συγκρινοντας συντελεστες παιρνουμε το συστημα:

$$\begin{aligned}
15 &= 3q_4 \\
14 &= 4q_4 + 3q_3 \\
0 &= 5q_4 + 4q_3 + 3q_2 \\
13 &= 5q_3 + 4q_2 + 3q_1 \\
12 &= 5q_2 + 4q_1 + v_1 \\
11 &= 5q_1 + v_0
\end{aligned}$$

(προσοχη, το x^3 εχει συντελεστη 0 στο $p_1(x)$)

Τουτο ειναι γραμμικο συστημα και μαλιστα πολυ απλης μορφης (τριγωνικο) με οριζουσα μη μηδενικη. Αρα λυνεται και οριζονται τα $q(x)$ και $v(x)$ μονοσημαντα. Παρατηρουμε την μορφη του συστηματος και σημειωνουμε οτι και στην γενικη περιπτωση το γραμμικο συστημα που προκυπτει συγκρινοντας τους συντελεστες στις δυο πλευρες της (*) εχει την μορφη:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} b_m & & & \\ b_{m-1} & b_m & & \\ b_{m-2} & b_{m-1} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & b_m \\ b_0 & b_1 & & b_{m-1} \\ & b_0 & & \vdots \\ & & & b_1 \\ & & & b_0 \end{matrix}}_{n-m+1} & \underbrace{\begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{matrix}}_{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_k \\ q_{k-1} \\ \vdots \\ q_0 \\ v_{m-1} \\ \vdots \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (k=n-m).$$

Το συστημα αυτο εχει παντοτε οριζουσα μη μηδενικη, αρα λυνεται μονοσημαντα και προσδιοριζει πηλικον και υπολοιπο του $p_1(x)$ δια του $p_2(x)$.

Ο μεγιστος κοινος διαιρετης δυο πολυωνυμων $p_1(x)$, $p_2(x)$ με βαθμους π.χ. $\text{βαθ}(p_1(x)) \geqq \text{βαθ}(p_2(x))$ οριζεται με διαδοχικες διαιρεσεις:

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= p_2(x)q_1(x) + p_3(x) \\
p_2(x) &= p_3(x)q_2(x) + p_4(x) \\
p_3(x) &= p_4(x)q_3(x) + p_5(x) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_{k-2}(x) &= p_{k-1}(x)q_{k-2}(x) + p_k(x) \\
p_{k-1}(x) &= p_k(x)q_{k-1}(x)
\end{aligned}$$

Η διαδικασια θα τερματιζεται διοτι οι βαθμοι των $p_i(x)$ μικραινουν συνεχως. Οταν συμβει $p_{k+1}(x) = 0$, τοτε το $p_k(x)$ ειναι ο ζητουμενος μεγιστος κοινος διαιρετης των $p_1(x)$ και $p_2(x)$.

Αν την προτελευταια εξισωση λυσουμε ως προς $p_k(x)$ αντικαταστησουμε στην προηγουμενη, εκφρασουμε το $p_{k-1}(x)$ συναρτησει των προηγουμενων κ.ο.κ. συνεχισουμε απαλοιφοντας τα $p_i(x)$, θα καταληξουμε στο οτι ο μεγιστος κοινος διαιρετης $p_k(x)$ γραφεται με την βοηθεια των αρχικων πολυωνυμων

$$p_k(x) = p_1(x)h_1(x)+p_2(x)h_2(x)$$

οπου τα $h_i(x)$ ειναι καταλληλα πολυωνυμα που προκυπτουν κατα την προηγουμενη απαλοιφη των ενδιαμεσων πολυωνυμων $p_{k-1}(x),\ldots,p_3(x)$.

Τα πολυωνυμα $p_1(x)$, $p_2(x)$ λεγονται <u>πρωτα μεταξυ τους</u> οταν ο μεγιστος κοινος διαιρετης τους ειναι η μοναδα. Συμφωνα με τα προηγουμενα λοιπον, για τετοια πολυωνυμα θα υπαρχουν $h_1(x)$, $h_2(x)$ με

$$1 = p_1(x)h_1(x) + p_2(x)h_2(x).$$

Ολα μεχρι τωρα θυμιζουν πολυ γνωστες ιδιοτητες των ακεραιων αριθμων και δεν μενει παρα να ενισχυσουμε αυτη την αισθηση με το εξης αναλογο των πρωτων αριθμων (εκεινων που δεν διαιρουνται με κανεναν αλλο εκτος της 1 και του εαυτου τους). Πραγματι ενα πολυωνυμο $p(x)$ του $K[x]$ λεγεται <u>αναγωγο</u> (ή πρωτο) οταν δεν διαιρειται με κανενα αλλο $q(x)\in K[x]$ εκτος του εαυτου του και τις σταθερες $c\in K$. Στο $R[x]$ αναγωγα πολυωνυμα ειναι τετραγωνικα (π.χ. x^2+1) ή πρωτοβαθμια, στο $C[x]$ τα αναγωγα πολυωνυμα ειναι πρωτοβαθμια. Γενικα μπορουμε να πουμε οτι οι αλγεβρικες ιδιοτητες ενος σωματος ειναι τοσο απλουστερες οσο μικροτερου βαθμου ειναι τα αναγωγα πολυωνυμα του. Σωματα των οποιων τα αναγωγα πολυωνυμα ειναι πρωτοβαθμια λεγονται <u>αλγεβρικα κλειστα</u>. Τυπικο παραδειγμα τετοιου σωματος ειναι το C.

Ξεκινωντας με ενα οποιοδηποτε πολυωνυμο $p(x)$ μπορουμε να ρωτησουμε, αν ειναι αναγωγο. Αν ειναι εχει καλως. Αν δεν ειναι γραφεται σαν γινομενο $p(x)=p_1(x)p_2(x)$. Αν και τα δυο αυτα πολυωνυμα ειναι αναγωγα τοτε εχουμε αναλυση του $p(x)$ σε γινομενο αναγωγων πολυωνυμων. Αν καποιο απ αυτα, πες το $p_1(x)$ δεν ειναι αναγωγο, συνεχιζουμε με την αναλυση του $p_1(x)$ σε παραγοντες κ.ο.κ. Ειναι φανερο οτι μ αυτο τον τροπο το $p(x)$ τελικα θα αναλυθει σε γινομενο αναγωγων πολυωνυμων

$$p(x) = p_1(x)p_2(x)\ldots p_k(x).$$

(Οπως ενας ακεραιος π.χ. ο $420 = 2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7$ διασπαται σε γιν. πρωτων).

§23 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ

Υπαρχουν αρκετα αξιολογα κειμενα σε θεματα γραμμικης αλγεβρας στα Ελληνικα. Απο βιβλια μνημονευω δυο

A.O. Morris Μια εισαγωγη στην γραμμικη αλγεβρα, Αθηνα.

Σ. Ανδρεαδακη Γραμμικη αλγεβρα, Αθηνα.

Το πρωτο καλυπτει την υλη του πρωτου μερους τουτων των μαθηματων, το δευτερο καλυπτει το μεγαλυτερο μερος της υλης . Και τα δυο βιβλια ειναι καλογραμμενα, κατανοητα, περιεχουν εφαρμογες στην αναλυτικη γεωμετρια (που εχω τελειως παραληψει) καθως και αλλα παραδειγματα και ασκησεις. Στο Πανεπιστημιο Κρητης εχουν χρησιμοποιηθει με επιτυχια οι σημειωσεις του Γ. Ακριβη που καλυπτουν παλι το πρωτο μερος αυτων των μαθηματων και οι σημειωσεις του Ν. Τζανακη που εχουν επικαλυψεις με το δευτερο μερος. Τα κειμενα αυτα ειναι αναλυτικωτερα απο το παρον και θα μπορουσαν να χρησιμοποιηθουν με ωφελεια για τον αναγνωστη. Θελοντας να παρουσιασω ενα συμπαγες, συντομο κειμενο, αναγκασθηκα να περικοψω πληθος θεματων και εφαρμογων που με κανενα τροπο δεν ειναι μικροτερου ενδιαφεροντος απο τα θεματα που συζητησα. Τα προηγουμενα βιβλια που ανεφερα θιγουν ορισμενα απ αυτα. Απο την μεγαλη ξενη βιβλιογραφια αρκουμαι σε μια επιλογη:

I. Satake, Linear Algebra, Marcel Dekker, 1975.

K. Nomizu, Linear Algebra, Academic Press, 1978.

N. Kuiper, Linear Algebra and Geometry, North Holland, 1965.

G. Strang, Linear Algebra and its Applications, Academic Press, 1976.

M. Koecher, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Springer, 1983.

Απ αυτα, το πρωτο κανει και μια εισαγωγη στη θεωρια παραστασεων. Το δευτερο συζητα περισσοτερο εννοιες που χρησιμοποιουνται στην Διαφορικη Γεωμετρια. Το τριτο περιεχει πληθωρα εφαρμογων στην Γεωμετρια (Αναλυτικη και Προβολικη). Το τεταρτο προσανατολιζεται σε υπολογιστηκες εφαρμογες. Το τελευταιο περιεχει αξιολογα ιστορικα σχολια.

Ελλησι τε και βαρβαροις, σοφοις τε και
ανοητοις οφειλετης ειμι.

προς Ρωμαιους α.14

ΓΛΩΣΣΑΡΙΟ