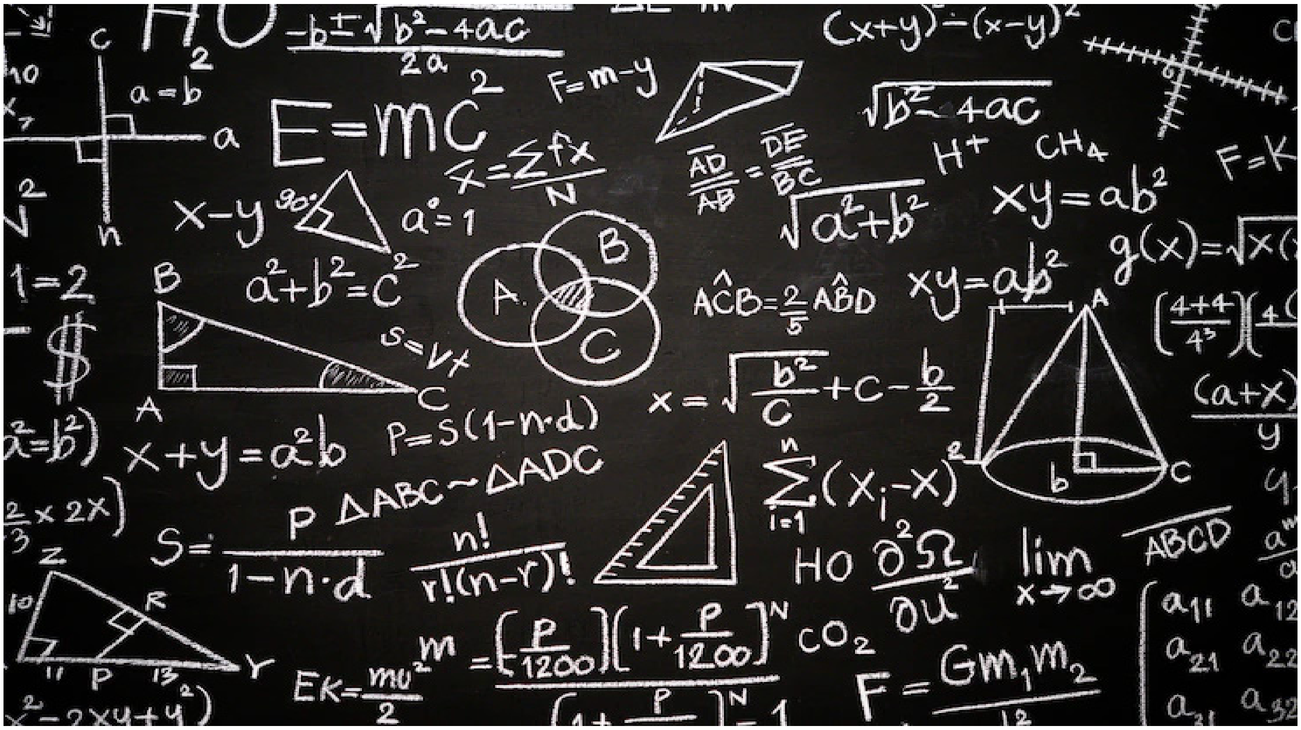

Μαθηματικά ομάδων Προσανατολισμού θετικών σπουδών & σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής

<u>επαναληπτικές εξετάσεις 2022</u>

θέματα και ενδεικτικές λύσεις

Επιμέλεια Λύσεων: Χρήστος Κ. Λοΐζος

www.liveyourmaths.com/

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$.

γ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

δ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

ε) Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|}\text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}^*.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ και

$g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\ln x$.

Β1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e, e^2).

Μονάδες 8

Β3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\varphi=g\circ f$.

Μονάδες 6

Β4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο $h(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$. Αν

$$\varphi(x)=\ln x-\ln(x-1),\quad x\in(1,\ +\infty),$$

να εξετάσετε αν $\varphi=h$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\eta\mu x}{x}=0$.
- $f'(x)f''(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. i. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και $f'(0)=1$ (μονάδες 4).

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} (μονάδες 5).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}-x^3+3x+1, & -1\le x\le 0\\ x^x, & 0<x\le \dfrac{2}{e}\end{cases}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Μονάδες 6

Δ2. i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f (μονάδες 3).

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (μονάδες 5).

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\left[-1,\dfrac{2}{e}\right]$ υπάρχει $\xi\in\left[-1,\dfrac{2}{e}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x f(x)\,dx>\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}}-\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ - ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 99

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 162

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 128-129 (η πρώτη παράγραφος + σχήμα)

Α4.
α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R} \text{ με } f(x)=\frac{x}{x-1} \text{ και } g:(0,+\infty)\to\mathbb{R} \text{ με } g(x)=\ln x$$

Για την κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\left(x\cdot\frac{1}{x-1}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x\to1^+ \Leftrightarrow x>1\Leftrightarrow x-1>0 \\ \lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to1^+}\left(x\cdot\frac{1}{x-1}\right)=+\infty$, οπότε η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=1$ από δεξιά.

Για την οριζόντια ασύμπτωτη:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}\underset{\text{(DLH)}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1}=1 \text{ ή } \lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

Άρα, η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=1$ καθώς $x\to+\infty$.

B2. Έχουμε την εξίσωση $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$.

Θεωρούμε συνάρτηση $k(x)=f(x)-g(x),\ x\in\left[e,e^2\right]$.

- Η k είναι συνεχής στο $\left[e,e^2\right]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
- $k(e)=f(e)-g(e)=\dfrac{e}{e-1}-1=\dfrac{e-(e-1)}{e-1}=\dfrac{1}{e-1}>0$

  $k\left(e^2\right)=f\left(e^2\right)-g\left(e^2\right)=\dfrac{e^2}{e^2-1}-2=\dfrac{e^2-2\cdot\left(e^2-1\right)}{e^2-1}=\dfrac{e^2-2e^2+2}{e^2-1}=\dfrac{2-e^2}{e^2-1}<0,$

  διότι $e>1 \Leftrightarrow e^2>1 \Leftrightarrow e^2-1>0$

  $e>\sqrt{2} \Leftrightarrow e^2>2 \Leftrightarrow 2-e^2<0$

Συνεπώς, είναι $k(e)\cdot k\left(e^2\right)<0$ και άρα, από **Θεώρημα Bolzano**, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(e,e^2\right)$, τέτοιο ώστε:

$$k(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$$

B3. Θα ορίσουμε τη συνάρτηση $\varphi=g\circ f$. Έχουμε:

- $D_{g\circ f}=\left\{x\in D_f \text{ και } f(x)\in D_g\right\}=\left\{x>1 \text{ και } \dfrac{x}{x-1}>0\right\}=\left\{x>1 \text{ και } x>0\right\}=$

  $=(1,+\infty)\neq\varnothing$
- $(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=\ln\left(f(x)\right)=\ln\dfrac{x}{x-1},\ x>1$

Άρα, $(g\circ f)(x)=\ln\dfrac{x}{x-1},\ x\in(1,+\infty)$.

B4. Είναι: $\varphi(x)=\ln x-\ln(x-1),\ x>1$ και επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\ln\dfrac{x}{x-1}$, για την οποία ισχύει:

$$D_h=\left\{\frac{x}{x-1}>0,\ x-1\neq 0\right\}=\left\{x(x-1)>0 \text{ και } x\neq 1\right\}=\left\{x^2-x>0 \text{ και } x\neq 1\right\}=$$

$$=\left\{x<0 \text{ ή } x>1 \text{ και } x\neq 1\right\}=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$$

Συνεπώς, είναι $h(x)=\ln\dfrac{x}{x-1},\ x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$, ενώ $\varphi(x)=\ln x-\ln(x-1),\ x>1$.

Για να είναι $\varphi=h$, πρέπει:

- $D_\varphi=D_h=D$ και
- Για κάθε $x\in D$, να ισχύει $\varphi(x)=h(x)$

Όμως, είναι $D_h \neq D_\varphi$, επομένως συμπεραίνουμε πως οι φ και h <u>δεν</u> είναι ίσες.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. (i) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε είναι και συνεχής. Δηλαδή:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \qquad (1)$$

Ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\eta\mu x}{x} = 0$$

Θέτουμε:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)-\eta\mu x}{x} \qquad (2)$$

με $\lim_{x\to 0}\lambda(x) = 0$.

Από (2), έχουμε:

$$x\cdot\lambda(x) = f(x)-\eta\mu x \Leftrightarrow f(x) = x\cdot\lambda(x)+\eta\mu x$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x\cdot\lambda(x)+\eta\mu x\right) = 0\cdot 0+0 = 0, \text{ δηλαδή } \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad (3)$$

Από (1) και (3), προκύπτει $f(0)=0$.

Επιπλέον:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\lambda(x)+\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\lambda(x)+\frac{\eta\mu x}{x}\right) =$$
$$= 0+1 = 1$$

Οπότε, $f'(0)=1$.

(ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $(0, f(0))$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \underset{\substack{f(0)=0 \\ f'(0)=1}}{\overset{\text{(i)}}{\Rightarrow}} y = 1\cdot(x-0) \Rightarrow y = x$$

Άρα, η εφαπτομένη της f στο $(0, f(0))$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ (διχοτόμος 1^{ου}-3^{ου} τεταρτημορίου).

Γ2. Γνωρίζουμε ότι $f'(x)\cdot f''(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ εξ υποθέσεως, οπότε:

$$2\cdot f'(x)\cdot f''(x)=2x\Rightarrow\left[\left(f'(x)\right)^2\right]'=\left(x^2\right)'$$

Άρα, από **Συνέπειες** του **Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Διαφορικού Λογισμού)**, ισχύει:

$$\left(f'(x)\right)^2=x^2+c,\ c\in\mathbb{R}$$

Θέτουμε στην παραπάνω σχέση $x=0$ και προκύπτει:

$$\left(f'(0)\right)^2=0^2+c\overset{\Gamma1(i)}{\Leftrightarrow}1^2=0+c\Leftrightarrow c=1$$

Άρα, $\left(f'(x)\right)^2=x^2+1$.

Είναι:

$$x^2+1\neq 0,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(f'(x)\right)^2\neq 0\Leftrightarrow f'(x)\neq 0,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Η f′ είναι συνεχής, αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με $f'(x)\neq 0$, δηλαδή η f′ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και αφού $f'(0)=1>0$, θα είναι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τελικά, $\left(f'(x)\right)^2=x^2+1\Rightarrow\left|f'(x)\right|=\sqrt{x^2+1}$ και αφού $f'(x)>0$, τότε θα ισχύει:

$$f'(x)=\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$$

Γ3. Η f′ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f''(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x^2+1\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Είναι:

- $f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow x=0$
- $f''(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0\Leftrightarrow x>0$
- $f''(x)<0\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}<0\Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		-	0	+	
f'		$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	

Ο πίνακας μεταβολών της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Συνεπώς, η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$. Στο σημείο $\left(0,f(0)\right)$, η f παρουσιάζει σημείο καμπής.

Γ4. Από το ερώτημα **Γ2**, είναι $f'(x)=\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

Όμως, είναι $\sqrt{x^2+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $f'(x)>0$ και, αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ από γνωστό θεώρημα. Κατά συνέπεια, είναι και «1-1».

Για το πεδίο ορισμού της f^{-1}, ισχύει:

$$D_{f^{-1}}=f(\mathrm{A})$$

Δηλαδή, αρκεί να βρούμε το σύνολο τιμών της f. Είναι:

$$f(\mathrm{A})\underset{f\nearrow\ \text{στο}\ \mathbb{R}}{\overset{f\ \text{συνεχής στο}\ \mathbb{R}}{=}}\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Όμως, η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ με την $y=x$ να εφάπτεται στο $\mathrm{O}(0,0)$. Οπότε, ισχύει: $f(x)\geq x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ με την ισότητα να ισχύει στο σημείο επαφής. Κατά συνέπεια, είναι $x\leq f(x)$ και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, θα είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Τελικά:

$$f(\mathrm{A})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

Και άρα:

$$D_{f^{-1}}=f(\mathrm{A})=\mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}-x^3+3x+1, & -1\leq x\leq 0\\ x^x, & 0<x\leq\dfrac{2}{e}\end{cases}$$

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=0$, πρέπει και αρκεί $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$. Είναι:

- $f(0)=-0^3+3\cdot0+1=1\Rightarrow f(0)=1$
- $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(-x^3+3x+1\right)=1$
- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x^x=0^0$ (απροσδιόριστη μορφή)

Είναι $x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$, άρα $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot(-\infty)$ (απροσδιόριστη μορφή). Ωστόσο, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$.

Από τα παραπάνω, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

Συνεπώς, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Έχουμε:

- $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x^3+3x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{3x-x^3}{x} =$$
  $$= \lim_{x\to 0^-}\frac{3-x^2}{1} = 3$$
- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right),\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}=1}{\underset{(DLH)}{=}}$$
  $$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{x\ln x}-1\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln x}(x\ln x)'}{1} =$$
  $$= \lim_{x\to 0^+}\left[e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)\right] = 1\cdot(-\infty+1) = -\infty$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Δ2. **(i)** Αναζητούμε τα κρίσιμα σημεία της f στα εσωτερικά σημεία του $\left[-1,\frac{2}{e}\right]$, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή είναι $f'(x) = 0$.

Από ερώτημα **Δ1**, η f δεν παραγωγίζεται στη θέση $x_0 = 0$ και το 0 είναι εσωτερικό σημείο του

$\left[-1,\frac{2}{e}\right]$, άρα στη θέση $x_0=0$ έχουμε **κρίσιμο σημείο**.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x)=\left(-x^3+3x+1\right)'=-3x^2+3=3-3x^2=3\left(1-x^2\right)$$

Όμως, $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-1,0)$, οπότε η f δεν παρουσιάζει κρίσιμα σημεία στο $(-1,0)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{2}{e}\right)$ ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x)=\left(x^x\right)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)=x^x\cdot(\ln x+1)$$

Είναι:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^x\cdot(\ln x+1)=0\underset{x\in\left(0,\frac{2}{e}\right)}{\overset{x^x>0}{\Leftrightarrow}}\ln x+1=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x=-\ln e\Leftrightarrow \ln x=\ln e^{-1}\underset{1-1}{\overset{\ln}{\Leftrightarrow}}x=\frac{1}{e}$$

Συνεπώς, η f παρουσιάζει **<u>δύο</u> κρίσιμα σημεία**, το $x_0=0$ και το $x_1=\frac{1}{e}$.

(ii) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=\left(-x^3+3x+1\right)'=-3x^2+3$$

Είναι:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3-3x^2=0\Leftrightarrow 3\cdot\left(1-x^2\right)=0\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1$$

Άρα, $f'(x)=3-3x^2>0$, για κάθε $x\in(-1,0)$ και αφού η f είναι συνεχής, τότε από γνωστό θεώρημα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,0]$.

Συνεπώς, αν $A_1=[-1,0]$, θα είναι:

$$f(A_1)\underset{f\nearrow}{\overset{f\text{ συνεχής στο }A_1}{=}}\left[f(-1),f(0)\right]=\left[-(-1)^3+3(-1)+1,\ 1\right]=\left[1-3+1,\ 1\right]=[-1,1]$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{2}{e}\right)$ με:

$$f'(x)=\left(x^x\right)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)=x^x\cdot(\ln x+1)$$

Όμως:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow x^x\cdot(\ln x+1)=0\overset{x^x>0}{\Leftrightarrow}\ln x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow x^x\cdot(\ln x+1)>0\overset{x^x>0}{\Leftrightarrow}\ln x+1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{e}$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow x^x\cdot(\ln x+1)<0\overset{x^x>0}{\Leftrightarrow}\ln x+1<0\Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{e}$

Συνεπώς, αν $A_2=\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$ και $A_3=\left[\dfrac{1}{e},\dfrac{2}{e}\right]$, τότε:

x	0		1/e		+∞
f'		-	0	+	
f		↘		↗	

$$f(A_2)\overset{f\text{ συνεχής στο }A_2}{\underset{f\searrow}{=}}\left[f\left(\frac{1}{e}\right),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}},1\right) \text{ αφού } \lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^0=1$$

$$f(A_3)\overset{f\text{ συνεχής στο }A_3}{\underset{f\nearrow}{=}}\left[f\left(\frac{1}{e}\right),f\left(\frac{2}{e}\right)\right]=\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}},\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}}\right]$$

Το ζητούμενο σύνολο τιμών είναι:

$$f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=[-1,1]\cup\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}},1\right)\cup\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}},\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}}\right]=$$

$$=[-1,1]$$

διότι $2<e\Leftrightarrow\dfrac{2}{e}<1\underset{\left[\frac{1}{e},+\infty\right)}{\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}}f\left(\dfrac{2}{e}\right)<f(1)\Rightarrow\left(\dfrac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}}<1$.

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $\left[-1,\dfrac{2}{e}\right]$ με $f(A)=[-1,1]$, δηλαδή

$$-1\le f(x)\le1,\ \text{για κάθε } x\in\left[-1,\frac{2}{e}\right] \qquad (1)$$

- Για $x=\alpha\in\left[-1,\dfrac{2}{e}\right]$ στην (1): $-1\le f(\alpha)\le1\Leftrightarrow-2\le2f(\alpha)\le2$ (2)
- Για $x=\beta\in\left[-1,\dfrac{2}{e}\right]$ στην (1): $-1\le f(\beta)\le1\Leftrightarrow-3\le3f(\beta)\le3$ (3)

Από (2) και (3) προσθέτοντάς τις:

$$-5 \le 2f(\alpha)+3f(\beta) \le 5 \Leftrightarrow -1 \le \frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5} \le 1$$

Άρα, από **Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών**, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(-1, \frac{2}{e}\right)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$ και επειδή η f λαμβάνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές, θα είναι $\xi \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ με $f(\xi) = \frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$.

Δ4. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x)\,dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} &\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x)\,dx > f\left(\frac{2}{e}\right) - f\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x)\,dx > \left[f(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x)\,dx > \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} f'(x)\,dx \qquad (1)\end{aligned}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}xf(x) > f'(x) &\Leftrightarrow xf(x) - f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \cdot x^x - \left(x^x\right)' > 0 \Leftrightarrow x \cdot x^x - x^x(\ln x + 1) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^x \cdot \left(x - (\ln x + 1)\right) > 0 \Leftrightarrow x^x \cdot (x - \ln x - 1) > 0\end{aligned}$$

που ισχύει διότι $\ln x \le x - 1$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$. Όμως, $x \in \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right]$, συνεπώς:

$$\ln x < x - 1 \Leftrightarrow -\ln x + x - 1 > 0 \Leftrightarrow x - \ln x - 1 > 0$$

Κατά συνέπεια:

$$xf(x) - f'(x) > 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x)\,dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$$