

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

## 40<sup>η</sup> ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

18 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2023

Θέματα τάξεων Γυμνασίου

### Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab^3 + bc^3 + ca^3 = 0 \end{cases}.$$

### Πρόβλημα 2

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα σημεία  $M, N$  είναι τα μέσα των πλευρών του  $AB, A\Gamma$ , αντίστοιχα. Θεωρούμε δύο σημεία  $\Delta$  και  $E$  πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα  $BN$ , έτσι ώστε  $\Gamma\Delta \parallel ME$  και  $B\Delta < BE$ . Να αποδείξετε ότι:  $B\Delta = 2 \cdot EN$ .

### Πρόβλημα 3

Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων που έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (α) Έχουν κορυφές σημεία  $(x, y)$  του επιπέδου  $Oxy$ , με  $x, y$  μη αρνητικούς ακεραίους και  $x \leq 8, y \leq 8$ .
- (β) Έχουν πλευρές παράλληλες στους άξονες.
- (γ) Έχουν εμβαδόν  $E$ , με  $30 < E \leq 40$ .

### Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους  $\alpha, \beta$ , με  $\alpha > 1$ , που είναι τέτοιοι ώστε ο  $\beta$  είναι διαιρέτης του  $\alpha - 1$  και ο  $2\alpha + 1$  είναι διαιρέτης του  $5\beta - 3$ .

*Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

*Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες*

*Καλή επιτυχία!*