ΘΕΜΑ 61

α) Να βρεθεί ο θετικός αριθμός α, ώστε για κάθε $x>0$ να ισχύει

$$x^x \geq \frac{\alpha^x}{e}.$$

β) Να βρεθεί το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης $x^x = \frac{\alpha^x}{e}$, για τις διάφορες θετικές τιμές του α.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ και να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

δ) Έστω $E(t)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την εφαπτομένη της C_f, η οποία σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον $x'x$, και την ευθεία $x=t$, $t>0$.

Να υπολογισθούν τα όρια (i) $\lim\limits_{t\to 0^+} E(t)$ και (ii) $\lim\limits_{t\to +\infty} E(e^t - t^e)$.

Σύντομη λύση

α) Η ανισότητα $x^x \geq \frac{\alpha^x}{e}$ γράφεται $\ln x^x \geq \ln\left(\frac{\alpha^x}{e}\right)$, δηλ. $x\ln x - x\ln\alpha + 1 \geq 0$.

Αν $g(x) = x\ln x - x\ln\alpha + 1$, $x>0$ και υπάρχει $x_0>0$ με $g(x_0)=0$, τότε $g'(x_0)=0$.

Από τις σχέσεις $g(x_0)=0$ και $g'(x_0)=0$ βρίσκουμε $x_0 = \frac{\alpha}{e}$ και $\alpha = e$. Εύκολα, τώρα, επαληθεύεται ότι η $g(x) = x\ln x - x + 1$ έχει ελάχιστο το $g(1)=0$.

β) Η εξίσωση γράφεται: $g(x)=0$, με $g(x) = x\ln x - x\ln\alpha + 1$, $x>0$.

$g'(x) = \ln\left(\frac{x}{\alpha}\right) + 1$

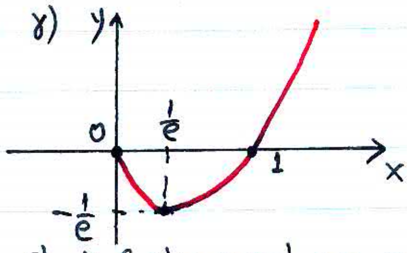
x	0		$\frac{\alpha}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac{e-\alpha}{\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$

Αν $0<\alpha<e$, έχει μία ρίζα.

Αν $\alpha=e$, έχει μία ρίζα, την $x=1$.

Αν $\alpha>e$, έχει ακριβώς δύο ρίζες.

γ)



Για $x>0$ ισχύει $f(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x = \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)' - \frac{x^2}{2}(\ln x)' = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2\right)'$.

Τελικά, οι παράγουσες της f είναι $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c, & x>0 \\ c, & x=0 \end{cases}$.

$I = F(1) - F(0) = \left(-\frac{1}{4}+c\right) - c = -\frac{1}{4}$.

δ) Η f είναι κυρτή και η εφαπτομένη με κλίση 1 έχει εξίσωση $y=x-1$. Για $t\in(0,1)$ έχουμε

$E(t) = \int_t^1 (f(x)-x+1)\,dx = \frac{3}{4}t^2 - t + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t^2\ln t$ και $\lim\limits_{t\to 0^+} E(t) = \frac{1}{4}$.

Για $t>1$ έχουμε

$E(t) = \int_1^t (f(x)-x+1)\,dx = \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{3}{4}t^2 + t - \frac{1}{4}$. Ισχύει $\lim\limits_{t\to +\infty} E(e^t - t^e) = \lim\limits_{u\to +\infty} E(u) = +\infty$.

ΘΕΜΑ 62

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{|\eta\mu x - x|}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η C_f εφάπτεται του άξονα $x'x$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρεθούν (i) το σύνολο τιμών της f και
(ii) οι ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^{\pi} f(x)\,dx < \pi^{3/2}$.

ε) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \left(\frac{f(x)}{e^{x/2}}\right)^2$, τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x = \pi$.

Σύντομη λύση

α) Αρκεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = 0$ και $f'(x_0) = 0$.

Η $f(x)$ μηδενίζεται όταν $\eta\mu x = x$, δηλ. $x = 0$.

Για $x > 0$ ισχύει $\eta\mu x > x$, ενώ για $x < 0$ ισχύει $\eta\mu x < x$. Έτσι, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - \eta\mu x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{\eta\mu x - x}, & x < 0. \end{cases}$

— $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x - \eta\mu x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{x - \eta\mu x}{x^2}} = 0$, διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x - \eta\mu x}{x^2} = \ldots = 0$

— ομοίως $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$. Άρα, η f είναι παρ/μη στο 0 με $f'(0) = 0$ κ.λπ.

β) $f'(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x - \eta\mu x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{2\sqrt{\eta\mu x - x}}, & x < 0 \end{cases}$, οπότε $f \uparrow [0, +\infty)$ και $f \downarrow (-\infty, 0]$.

γ) (i) Για $x > 0$ ισχύει $f(x) = \sqrt{x - \eta\mu x} \geq \sqrt{x - 1}$ και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Για $x < 0$ ισχύει $f(x) = \sqrt{\eta\mu x - x} \geq \sqrt{-1 - x}$ και ομοίως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Άρα, $f(\mathbb{R}) = [f(0), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)) \cup [f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = [0, +\infty)$.

(ii) Κατακόρυφη ασύμπτωτη δεν υπάρχει, αλλά ούτε οριζόντια ή πλάγια.
($\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$).

δ) Για $x \in [0, \pi]$ ισχύει $f(x) \leq f(\pi)$ και $\int_0^{\pi} f(x)\,dx < \int_0^{\pi} f(\pi)\,dx = \pi f(\pi) = \pi\sqrt{\pi} = \pi^{3/2}$.

ε) $g(x) = \frac{f^2(x)}{e^x} = \frac{x - \eta\mu x}{e^x} = xe^{-x} - e^{-x}\cdot\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$.

$$E = \int_0^{\pi} xe^{-x}\,dx - \int_0^{\pi} e^{-x}\cdot\eta\mu x\,dx = (1 - \pi e^{-\pi} - e^{-\pi}) - \frac{e^{-\pi} + 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-\pi} - \pi e^{-\pi}.$$

ΘΕΜΑ 63

Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ με $\pi, 2\pi \in \Delta$, $f(\pi) = \ln\pi$, $f'(2\pi) = 0$ και

$$f''(x)\cdot e^{f(x)} + (f'(x))^2 \cdot e^{f(x)} = ημx \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

α) Να βρεθεί το διάστημα Δ και να αποδειχθεί ότι
$$f(x) = \ln(x - ημx),\ x > 0.$$

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f και να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)\cdot(f^2(x) - 6f(x) + 12) = 2017$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα.

γ) Να αποδειχθεί ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $(0, \pi]$.

δ) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 > 0$, ώστε για κάθε $\alpha > x_0$ να ισχύει
$$\int_{x_0}^{\alpha} f(x)\,dx > 0.$$

ε) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{\pi/2}^{\pi} e^{f(x) - x}\,dx$.

Σύντομη λύση

α) $(f'(x)\cdot e^{f(x)})' = (-συνx)' \ \ldots\ (e^{f(x)})' = (x - ημx)'$ και $e^{f(x)} = x - ημx$ (1)

Η $g(x) = x - ημx$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $g(0) = 0$, $g(x) > 0$ για $x < 0$ και $g(x) < 0$ για $x < 0$.
Έτσι, η (1) αληθεύει στο $\Delta = (0, +\infty)$ και ισχύει $f(x) = \ln(x - ημx)$, $x > 0$.

β) • Επειδή $f'(x) = \dfrac{1 - συνx}{x - ημx} \geq 0$, είναι $f \nearrow (0, +\infty)$ και $f((0, +\infty)) = \mathbb{R}$

$\left(x - ημx \geq x - 1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty, \text{ οπότε } \lim_{x\to+\infty}(x - ημx) = +\infty \right)$.

• Η εξίσωση γράφεται
$$f^3(x) - 6f^2(x) + 12f(x) - 8 = 2009 \Leftrightarrow (f(x) - 2)^3 = 2009 \Leftrightarrow f(x) = 2 + \sqrt[3]{2009}$$
και έχει ακριβώς μία θετική ρίζα.

γ) $f''(x) = \dfrac{xημx - 2 + 2συνx}{(x - ημx)^2}$. Αν $h(x) = xημx - 2 + 2συνx$, τότε $h'(x) = xσυνx - ημx$ και $h''(x) = -xημx < 0$ στο $(0, \pi)$, οπότε $h' \searrow [0, \pi]$ και $h'(x) < h'(0) = 0$, $h \searrow [0, \pi]$ και $h(x) < h(0) = 0$ για κάθε $x \in (0, \pi]$.

δ) Ελέγχουμε πότε ισχύει $f(x) > 0$, δηλ. $x - ημx > 1$. Αν $\varphi(x) = x - ημx - 1$, τότε $\varphi \nearrow \mathbb{R}$, $\varphi(1) = -ημ1 < 0$, και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 2 < 0$, $\varphi(2) = 1 - ημ2 > 0$. Άρα, υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ με $\varphi(x_0) = 0$ και για κάθε $x > x_0$, ισχύει $\varphi(x) > \varphi(x_0) = 0$, δηλ. $x - ημx > 1$.

ε) $$I = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x - ημx}{e^x}\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi} x e^{-x}\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} ημx \cdot e^{-x}\,dx = \ldots = \frac{1}{2}(\pi+1)e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}(2\pi+3)e^{-\pi}.$$

ΘΕΜΑ 64

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με
$(x-1)f'(x) + 2f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την καμπύλη $y = xe^x$ και την ευθεία $x = 1$.

γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi(x) = \dfrac{\eta\mu x}{f(x)}$.

δ) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I(a) = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x f(x)}{e^x + 1}dx$, $a \in \mathbb{R}$ και να βρεθούν οι τιμές του a ώστε να ισχύει $|I(a)| \le \dfrac{8}{15}$.

Σύντομη λύση

α) Με $x \neq 1$ η δοσμένη ισότητα γράφεται

$(x-1)^2 f'(x) + 2(x-1)f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow \left((x-1)^2 f(x)\right)' = \left(x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x\right)' \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 f(x) = \begin{cases} x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x + c_1, & x < 1 \\ x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x + c_2, & x > 1 \end{cases}$. Παίρνοντας πλευρικά όρια στο 1, έχουμε $c_1 = c_2 = 0$.

Έτσι, για $x \neq 1$ έχουμε $f(x) = \dfrac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)(x^4 - x^3 + x^2 - x)}{(x-1)^2} = x^3 + x$.

Η αρχική σχέση για $x = 1$ δίνει $f(1) = 2$.

Άρα, $f(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Βρίσκουμε το πρόσημο της συνάρτησης $g(x) = xe^x - f(x) = x \cdot (e^x - x^2 - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν $h(x) = e^x - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, τότε η $h'(x)$ έχει ελάχιστο το $h'(\ln 2) = 2(1 - \ln 2) > 0$, οπότε $h'(x) > 0$ και $h \uparrow \mathbb{R}$. Επίσης, $h(0) = 0$, $g(0) = 0$ και $h(x) \ge 0$, όπως και $g(x) \ge 0$, στο $[0, +\infty)$.

Άρα, $E = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{4}$.

γ) Η $\varphi(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x} \cdot \dfrac{1}{x^2+1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ και $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 1$, οπότε η C_φ δεν έχει κατακόρυφη ασύμ.

Επίσης, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x)$, οπότε η C_φ έχει ασύμπτωτη τον $x'x$ στο $+\infty$ και $-\infty$.

δ) Θέτουμε $x = -t$, οπότε το $I(a) = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x^4 + x^2}{e^x + 1}dx$ (1) γράφεται τελικά $I(a) = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{(x^4 + x^2)e^x}{e^x + 1}dx$ (2).

Προσθέτουμε τις (1), (2) κατά μέλη και έχουμε

$2I(a) = \displaystyle\int_{-a}^{a} (x^4 + x^2)dx$, οπότε $I(a) = \dfrac{a^5}{5} + \dfrac{a^3}{3}$. Η συνάρτηση $I(a)$ είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει

$|I(a)| \le \dfrac{8}{15} \Leftrightarrow -\dfrac{8}{15} \le I(a) \le \dfrac{8}{15} \Leftrightarrow I(-1) \le I(a) \le I(1) \Leftrightarrow -1 \le a \le 1$.

Θαν. Ξένος

ΘΕΜΑ 65

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Αν ε είναι το ελάχιστο της f, να αποδειχθεί ότι:

α) $\varepsilon(\beta-\alpha) < \int_\alpha^\beta f(x)dx < 0$.

β) Υπάρχουν $x_1, x_2\in(\alpha,\beta)$ με $f'(x_1)-f'(x_2) \le \frac{4\varepsilon}{\beta-\alpha}$.

γ) Αν επιπλέον υπάρχει η f'', τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f''(\xi)\ge \frac{-4\varepsilon}{(\beta-\alpha)^2}$.

Σύντομη λύση

α) Για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $\varepsilon \le f(x)\le 0$ και οι ισότητες δεν αληθεύουν σ' όλα τα x. Επομένως, $\int_\alpha^\beta \varepsilon dx < \int_\alpha^\beta f(x)\,dx < 0$, δηλαδή $\varepsilon(\beta-\alpha) < \int_\alpha^\beta f(x)dx<0$.

β) Έστω $\varepsilon=f(x_0)$, όπου $x_0\in(\alpha,\beta)$. Υπάρχουν $x_1\in(\alpha,x_0)$ και $x_2\in(x_0,\beta)$ με

$$f'(x_1)-f'(x_2) = \frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha} - \frac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0} = \varepsilon\cdot\left(\frac{1}{x_0-\alpha}+\frac{1}{\beta-x_0}\right).$$

Αν $g(x)=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{\beta-x}$, $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $g'(x)=\frac{1}{(\beta-x)^2}-\frac{1}{(x-\alpha)^2}=\frac{2(\beta-\alpha)x+\alpha^2-\beta^2}{(x-\alpha)^2(\beta-x)^2}$

x	α		$\frac{\alpha+\beta}{2}$		β
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	min	↗	

Η g έχει ελάχιστο το $g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{4}{\beta-\alpha}$, οπότε ισχύει $g(x_0)\ge\frac{4}{\beta-\alpha}$ και αφού $\varepsilon<0$, έχουμε $f'(x_1)-f'(x_2)=\varepsilon\cdot g(x_0)\le\frac{4\varepsilon}{\beta-\alpha}$.

γ) Υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(\alpha,\beta)$ με $f''(\xi)=\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}\ge-\frac{4\varepsilon}{(\beta-\alpha)(x_2-x_1)}$, διότι

$f'(x_2)-f'(x_1)\ge\frac{-4\varepsilon}{\beta-\alpha}$ (από το β)) και $x_2-x_1>0$.

Επειδή $x_2-x_1=d(x_1,x_2)<d(\alpha,\beta)=\beta-\alpha$, ισχύει $\frac{1}{x_2-x_1}>\frac{1}{\beta-\alpha}$ και άρα

$$f''(\xi)\ge\frac{-4\varepsilon}{(\beta-\alpha)^2}.$$

ΘΕΜΑ 66

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{2^x + a^x}{4^x + 5^x}$, όπου α θετική σταθερά.

α) Να βρεθεί ο α, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) \geq 1$.

Έστω ότι $\alpha = 10$.

β) Να βρεθούν τα όρια της f στο $-\infty$ και $+\infty$, καθώς και το σύνολο τιμών της f.

γ) Να εξετασθεί αν η C_f έχει ασύμπτωτες.

δ) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x(1+5^x)}{f(x)}dx$.

Σύντομη λύση

α) Η ανισότητα $f(x) \geq 1$ γράφεται $2^x + a^x \geq 4^x + 5^x$ ή $2^x + a^x - 4^x - 5^x \geq 0$ (1)

Αν ισχύει η (1), τότε η $g(x) = 2^x + a^x - 4^x - 5^x$ έχει ελάχιστο το $g(0) = 0$, οπότε $g'(0) = 0$...

Για $a = 10$ έχουμε $g(x) = 2^x + 10^x - 4^x - 5^x = 2^x(1-2^x) - 5^x(1-2^x) = (2^x - 5^x)\cdot(1-2^x) \geq 0$, διότι για $x \geq 0$ ισχύει $2^x \leq 5^x$ και $1 \leq 2^x$, ενώ για $x<0$ ισχύει $2^x \geq 5^x$ και $1 \geq 2^x$.

β). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \dfrac{1+5^x}{1+\left(\frac{5}{4}\right)^x}\right] = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2^x \cdot \dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^x + 1}{\left(\frac{4}{5}\right)^x + 1}\right] = +\infty$.

- Επειδή $f(x) \geq 1 = f(0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και η f είναι συνεχής, η f παίρνει κάθε τιμή στο διάστημα $[1, +\infty)$ και άρα $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty)$.

γ) • Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2^x}{x} \cdot \dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^x + 1}{\left(\frac{4}{5}\right)^x + 1}\right] = +\infty$, οπότε η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x\cdot 2^x} \cdot \dfrac{1+5^x}{1+\left(\frac{5}{4}\right)^x}\right] = -\infty$, οπότε η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

δ)
$$I = \int_0^1 \frac{x\cdot(1+5^x)\cdot(4^x+5^x)}{2^x+10^x}dx = \int_0^1 \frac{x\,(4^x+5^x)}{2^x}dx = \int_0^1 x\cdot 2^x dx + \int_0^1 x\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 x\cdot(2^x)'dx + \frac{1}{\ln\frac{5}{2}}\cdot\int_0^1 x\cdot\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x\right)'dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\cdot\left[x\cdot 2^x\right]_0^1 - \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 2^x dx + \frac{1}{\ln\frac{5}{2}}\cdot\left[x\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x\right]_0^1 - \frac{1}{\ln\frac{5}{2}}\int_0^1\left(\frac{5}{2}\right)^x dx =$$

$$= \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2} + \frac{5}{2\ln\frac{5}{2}} - \frac{3}{2\ln^2\frac{5}{2}}.$$

ΘΕΜΑ 67

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x)\cdot[e^{2f(x)}+1] = (f'(x))^2\cdot[1-e^{2f(x)}] \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και η C_f εφάπτεται της ευθείας $y=-x$ στο σημείο της $M(0, f(0))$.

Να αποδειχθεί ότι:

α) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Η f είναι αντιστρέψιμη με $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Η εξίσωση $f(f(x)+f^{-1}(x))=0$ έχει μόνο μία πραγματική ρίζα.

δ) Το χωρίο μεταξύ της C_f και των ευθειών $y=-x$ και $x=1$ έχει εμβαδόν $E = \ln(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

Σύντομη λύση

α) $f''(x)\cdot e^{f(x)} + (f'(x))^2\cdot e^{f(x)} = (f'(x))^2\cdot e^{-f(x)} - f''(x)\cdot e^{-f(x)}$ (διαίρεση με $e^{f(x)}$)

$\Leftrightarrow \quad (f'(x)\cdot e^{f(x)})' = (-f'(x)\cdot e^{-f(x)})' \quad \dots \quad (f(0)=0$ και $f'(0)=-1)$

$\Leftrightarrow \quad f'(x)\cdot e^{f(x)} + f'(x)\cdot e^{-f(x)} = -2$

$\Leftrightarrow \quad (e^{f(x)}-e^{-f(x)})' = (-2x)' \quad \dots \quad e^{f(x)}-e^{-f(x)} = -2x \quad \dots \quad (e^{f(x)}+x)^2 = x^2+1$.

Η $g(x) = e^{f(x)}+x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, δε μηδενίζεται και $g(0)=1>0$, οπότε $g(x)>0$ και $e^{f(x)}+x = \sqrt{x^2+1}$ ...

β) $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 0$, $f\downarrow \mathbb{R}$ κ.λπ.

γ) $f(f(x)+f^{-1}(x)) = f(0) \Leftrightarrow f(x)+f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow x=0$,

διότι η $h(x) = f(x)+f^{-1}(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και $g(0)=0$.

δ) Η ευθεία $y=-x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής $(0,0)$ και ισχύει $f(x)\geq -x$ για κάθε $x\geq 0$, αφού η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

$$E = \int_0^1 (f(x)-(-x))\,dx = \int_0^1 (x)'\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\,dx + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \left[x\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + \frac{1}{2} = \ln(\sqrt{2}-1) + \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 + \frac{1}{2} =$$

$$= \ln(\sqrt{2}-1)+\sqrt{2}-\frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 68

Θεωρούμε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
με:
1) $x^4 \cdot f'(x) + 2x \ln x = 0$ για κάθε $x > 0$
2) $e^{\frac{g(x)}{x}} \cdot (xg'(x) - g(x)) = x^2$ για κάθε $x > 0$
3) $g(1) = 0$
4) Η C_f εφάπτεται της ευθείας $y = \frac{1}{2}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \dfrac{2\ln x + 1}{2x^2}$, $x > 0$.

β) Να αποδειχθεί ότι $g(x) = x \ln x$, $x > 0$.

γ) Να βρεθεί το πλήθος των κοινών σημείων των C_f και C_g.

δ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = e$ και $x = 3$.

Σύντομη λύση

α) Επειδή $\left(\dfrac{2\ln x + 1}{2x^2}\right)' = \dots = -\dfrac{2\ln x}{x^3} = f'(x)$, ισχύει $f(x) = \dfrac{2\ln x + 1}{2x^2} + c$.

Αν $A(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής της C_f με την ευθεία $y = \frac{1}{2}$, τότε
$f(x_0) = \frac{1}{2}$ και $f'(x_0) = 0$ ... $x_0 = 1$ και $c = 0$.

β) Ισχύει
$$e^{\frac{g(x)}{x}} \cdot \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{g(x)}{x}}\right)' = (x)' \dots$$

γ) Η εξίσωση $f(x) = g(x)$ γράφεται $2x^3 \ln x - 2\ln x - 1 = 0$ (1)
Αν $h(x) = 2x^3 \ln x - 2\ln x - 1$, $x > 0$, τότε $h'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x}$ με $\varphi(x) = 6x^3 \ln x + 2x^3 - 2$.
$\varphi(x) = 6x^3 \ln x + 2(x-1)(x^2 + x + 1)$. Για $x > 1$ ισχύει $\varphi(x) > 0$, για $x \in (0, 1)$ ισχύει $\varphi(x) < 0$
και $\varphi(1) = 0$ ($\ln x$, $x - 1$ ομόσημοι)

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Η $h(x)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες και άρα οι C_f, C_g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.

δ) Αρχικά, θα βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $K(x) = f(x) - g(x)$ στο διάστημα $[e, 3]$.
Σύμφωνα με το γ), η συνάρτηση αυτή έχει μοναδική ρίζα στο $(1, +\infty)$ και αφού $K(1) \cdot K(e) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2e^2} - e\right) < 0$, η ρίζα ανήκει στο διάστημα $(1, e)$. Στο $[e, 3]$ η $K(x)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται. Επειδή $K(e) < 0$, ισχύει $K(x) < 0$ στο $[e, 3]$.
Άρα,
$$E = \int_e^3 (g(x) - f(x))\,dx = \int_e^3 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x\,dx + \int_e^3 \left(\frac{1}{x}\right)' \ln x\,dx + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}\right]_e^3 = \frac{29}{6}\ln 3 - \frac{5}{2e} - \frac{e^2}{4} - \frac{7}{4}.$$

ΘΕΜΑ 69

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ με $f(\xi)=\int_0^1 f(x)\,dx$.

β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ υπάρχει $x_0\in[0,1]$ με

$$\int_0^1 x^\nu\cdot f(x)\,dx=\frac{1}{\nu+1}\cdot f(x_0).$$

γ) Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot\int_0^x \frac{f(t)}{t-1}\,dt\right]$.

δ) Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη με $f(0)=1$ και $f(1)=2$.

(i) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x)=f^2(x)-2f(x)-2$, $x\in[0,1]$.

(ii) Αν η f είναι παραγωγίσιμη με $f(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$ και $f(x)\le\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ για κάθε x σ' ένα διάστημα $\Delta\subseteq(0,1)$ με $\frac{1}{2}\in\Delta$, να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ είναι εφαπτομένη της C_f και ότι η f' δεν είναι αντιστρέψιμη.

Σύντομη λύση

α) Αν m είναι το ελάχιστο της f και M το μέγιστο, επειδή $m\le f(x)\le M$, ισχύει $\int_0^1 m\,dx\le\int_0^1 f(x)\,dx\le\int_0^1 M\,dx$, δηλ. $m\le\int_0^1 f(x)\,dx\le M$. Άρα, υπάρχει $\xi\in[0,1]$ με $f(\xi)=\int_0^1 f(x)dx$.

β) $m\le f(x)\le M$ και $x^\nu\ge 0$, οπότε $mx^\nu\le x^\nu f(x)\le Mx^\nu$ και $\int_0^1 mx^\nu dx\le\int_0^1 x^\nu f(x)dx\le\int_0^1 Mx^\nu\ldots$
$m\le(\nu+1)\int_0^1 f(x)\cdot x^\nu dx\le M$. Άρα, υπάρχει $x_0\in[0,1]$ με $f(x_0)=(\nu+1)\int_0^1 x^\nu f(x)dx$.

γ) Για $x\in(0,1)$ και $t\in[0,x]$ έχουμε
$m\le f(t)\le M\Rightarrow\frac{m}{t-1}\ge\frac{f(t)}{t-1}\ge\frac{M}{t-1}\Rightarrow\int_0^x\frac{m}{t-1}dt\ge\int_0^x\frac{f(t)}{t-1}dt\ge\int_0^x\frac{M}{t-1}dt\Rightarrow\ldots$
$m\ln(1-x)\ge\int_0^x\frac{f(t)}{t-1}dt\ge M\ln(1-x)\Rightarrow m(x-1)\ln(1-x)\le(x-1)\cdot\int_0^x\frac{f(t)}{t-1}dt\le M(x-1)\ln(1-x)$.
Επειδή $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\ln(1-x)=0$, είναι και $\lim\limits_{x\to1}\left[(x-1)\cdot\int_0^x\frac{f(t)}{t-1}dt\right]=0$.

δ) (i) $g(x)=(f(x)-1)^2-3$, $f\uparrow[0,1]$, $f(0)\le f(x)\le f(1)\ldots\ -3\le g(x)\le-2$.
Η g έχει ελάχιστο το $g(0)=-3$ και μέγιστο το $g(1)=-2$.

(ii) Αν $h(x)=f(x)-\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$, τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $h(x)\le 0=h(\frac{1}{2})$, οπότε $h'(\frac{1}{2})=0$ και $f'(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(\frac{1}{2},f(\frac{1}{2}))$ έχει εξίσωση $\ldots\ y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$.
Υπάρχουν $x_1\in(0,\frac{1}{2})$ και $x_2\in(\frac{1}{2},1)$ με $f'(x_1)=\frac{f(\frac{1}{2})-f(0)}{\frac{1}{2}-0}=1$ και $f'(x_2)=\frac{f(1)-f(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}=1\ \ldots$

ΘΕΜΑ 70

Μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f'(x)+x\cdot\left[(f'(x))^2+f''(x)\right]=e^{x-f(x)}\cdot(x+1) \text{ για κάθε } x>0.$$

Επίσης, η C_f εφάπτεται της ευθείας $y=(1-\frac{1}{e})x+\frac{1}{e}$ στο σημείο της $A(1,f(1))$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\ln(e^x-\ln x)$, $x>0$.

β) Να αποδειχθεί ότι $f((0,+\infty))\subseteq(0,+\infty)$.

γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζουν τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου με $1\le x\le e$ και $-x\le y\le \frac{e^{f(\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}$.

Σύντομη λύση

α) Ισχύει $f(1)=(1-\frac{1}{e})\cdot 1+\frac{1}{e}=1$ και $f'(1)=1-\frac{1}{e}$. Επίσης, έχουμε:

$e^{f(x)}\cdot f'(x)+x\,e^{f(x)}\cdot[(f'(x))^2+f''(x)]=e^x\cdot(x+1) \Leftrightarrow (e^{f(x)})'+x\cdot(e^{f(x)}f'(x))'=(xe^x)' \Leftrightarrow$

$(x\cdot e^{f(x)}f'(x))'=(xe^x)' \ \dots\ x e^{f(x)}f'(x)=xe^x-1 \Leftrightarrow e^{f(x)}\cdot f'(x)=e^x-\frac{1}{x} \ \dots\ e^{f(x)}=e^x-\ln x \ (1)$

Επειδή $e^x\ge x+1>x>x-1\ge \ln x$, η (1) γράφεται $f(x)=\ln(e^x-\ln x)$ για κάθε $x>0$.

β) Αρκεί να αποδειχθεί ότι $f(x)>0$, δηλ. $e^x-\ln x>1$ για κάθε $x>0$.

Πράγματι, $e^x\ge x+1>\ln x+1 \Rightarrow e^x-\ln x>1$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$, οπότε η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$.

Επίσης, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{(\frac{+\infty}{+\infty})}{=}\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-\frac{1}{x}}{e^x-\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{xe^x}}{1-\frac{\ln x}{e^x}}=\frac{1-0}{1-0}=1$ και

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln(e^x-\ln x)-\ln e^x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{\ln x}{e^x}\right)=\ln(1-0)=0$,

οπότε η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

δ)

$$E=\int_1^e\left(\frac{e^{f(\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}-(-x)\right)dx=\int_1^e\frac{e^{\sqrt{x}}-\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx+\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \ \underline{\underline{\sqrt{x}=t}}$$

$$=2\int_1^{\sqrt{e}}(e^t-\ln t)\,dt+\frac{1}{2}(e^2-1)=2e^{\sqrt{e}}+\frac{1}{2}e^2+\sqrt{e}-2e-\frac{5}{2}.$$

ΘΕΜΑ 71

Μια περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+\eta\mu 2x}{x} = 0$ και $f''(x) = e^x - e^{-x} - 2x + a$, $a \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η C_f εφάπτεται της ευθείας $y = -2x$.

β) Να αποδειχθεί ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

γ) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = e^x - e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 - 4x$, $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες x_1, x_2 και x_3 με $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

ε) Για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ με $f(\xi) \cdot g(\xi) = \xi^3 - \frac{1}{2}$.

στ) Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = e^x \cdot (e^{2x} - 1)$ και $\varphi(x) = \frac{1}{3} x e^{2x} \cdot (x^2 + 12)$ έχουν ακριβώς τρία κοινά σημεία.

ζ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $K(x) = x f(x)$, τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x = 1$.

Σύντομη λύση

α) $\lim_{x\to 0} (f(x) + \eta\mu 2x) = 0 \ldots f(0) = 0$. $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x)+\eta\mu 2x}{x} - 2 \cdot \frac{\eta\mu 2x}{2x} \right) = -2 \ldots$

β) f περιττή $\Rightarrow$ f' άρτια $\Rightarrow$ f'' περιττή. Από τη σχέση $f''(-x) = -f''(x)$ για $x=0$ έχουμε $f''(0) = 0$.
Επειδή $f'''(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$, είναι $f'' \uparrow \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$ για $x > 0$ και $f''(x) < 0$ για $x < 0$.

γ) Επίσης, ισχύει $f''(0) = a$, οπότε $a = 0$.
$f'(x) = e^x + e^{-x} - x^2 + c_1 \ldots c_1 = -4$, $f(x) = e^x - e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 - 4x + c_2 \ldots c_2 = 0$.

δ)

x	$-\infty$		ρ_1		0		ρ_2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$			0	$+$			
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$			-2	$\nearrow$			$+\infty$

$f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = 0$

x	$-\infty$	x_1	ρ_1	0	1	ρ_2	x_3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$ -2 $-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$		$f(\rho_1)$ $\searrow$	0		$\searrow$ $f(\rho_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\rho_1) > 0$, $f(\rho_2) < 0$

$f(x_1) = f(0) = f(x_3) = 0$ και $f(-x_1) = -f(x_1) = 0$, οπότε $x_3 = -x_1$.

ε) Επειδή $f(1) < 0$, είναι $\rho_2 > 1$ και $x_3 > 1$. Θεώρημα Bolzano για την $P(x) = f(x)g(x) - x^3 + \frac{1}{2}$ στο $[0, x_3]$.

στ) Η εξίσωση $h(x) = \varphi(x)$ γράφεται $f(x) = 0$.

ζ) Στο $[0,1]$ ισχύει $f(x) \leq 0$ και $K(x) \leq 0$, οπότε $E = -\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{25}{12} - \frac{2}{e}$.

ΘΕΜΑ 72

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^3(x)+2f(x)=x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f\uparrow\mathbb{R}$. β) Να βρεθεί η συνάρτηση f^{-1}.

γ) Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$ και $f'(1)=\frac{1}{2}$.

δ) Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ε) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{2+3f^2(x)}$.

στ) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα.

ζ) Να αποδειχθεί ότι $\int_1^2 f(x)\,dx<\frac{1}{4}$.

η) Να σχεδιασθούν στο ίδιο σχήμα οι C_f και $C_{f^{-1}}$.

θ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, $C_{f^{-1}}$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=4$.

Σύντομη λύση

α) Έστω $g(x)=x^3+2x$, $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει $x_1-1<x_2-1$, οπότε

$f^3(x_1)+2f(x_1)<f^3(x_2)+2f(x_2)\Rightarrow g(f(x_1))<g(f(x_2))\xRightarrow{g\uparrow\mathbb{R}}f(x_1)<f(x_2)$. Άρα, $f\uparrow\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $y\in\mathbb{R}$ θεωρούμε τον αριθμό $x=y^3+2y+1$ και έχουμε

$x-1=y^3+2y\Leftrightarrow f^3(x)+2f(x)=y^3+2y\Leftrightarrow g(f(x))=g(y)\Leftrightarrow f(x)=y$. Άρα, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

… $f^{-1}(x)=x^3+2x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Ισχύει $f(x)=\dfrac{x-1}{f^2(x)+2}$ και $|f(x)|=\dfrac{|x-1|}{f^2(x)+2}\le\dfrac{|x-1|}{2}$, οπότε $-\dfrac{|x-1|}{2}\le f(x)\le\dfrac{|x-1|}{2}$ …

Για $x=1$ έχουμε $f^3(1)+2f(1)=0$, οπότε $f(1)=0$.

Επίσης, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{f^2(x)+2}=\dfrac{1}{2}$, δηλ. $f'(1)=\frac{1}{2}$.

δ) Για κάθε $x,x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $\left(f^3(x)+2f(x)\right)-\left(f^3(x_0)+2f(x_0)\right)=(x-1)-(x_0-1)$, οπότε

$f(x)-f(x_0)=\dfrac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}$ και $|f(x)-f(x_0)|=\dfrac{|x-x_0|}{\left(f(x)+\frac{1}{2}f(x_0)\right)^2+\frac{3}{4}f^2(x_0)+2}\le\dfrac{|x-x_0|}{2}$ …

ε) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+2}=\dfrac{1}{3f^2(x_0)+2}$.

στ) $f''(x)=\left(\dfrac{1}{3f^2(x)+2}\right)'=\dfrac{-6f(x)f'(x)}{(3f^2(x)+2)^2}$, $f'(x)>0$ και η $f(x)$ έχει το πρόσημο του $x-1$.

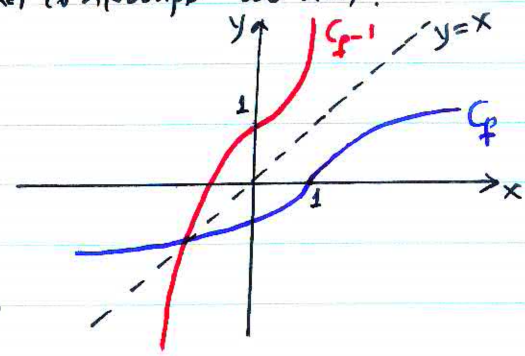
Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,1]$ και κοίλη στο $[1,+\infty)$.

ζ) Στο $[1,+\infty)$ ισχύει $f(x)\le\frac{1}{2}(x-1)$ … ($y=\frac{1}{2}(x-1)$ εφαπτομένη) η)

θ) Στο $[1,4]$ ισχύει $f^{-1}(x)>x>f(x)$

$E=\int_1^4\left(f^{-1}(x)-f(x)\right)dx=\int_1^4(x^3+2x+1)\,dx-I=80$,

διότι στο $I=\int_1^4 f(x)\,dx$ θέτουμε $f(x)=t$, οπότε $I=\int_0^1 t(3t^2+2)\,dt=\frac{7}{4}$.



ΘΕΜΑ 73

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x} - \eta\mu x}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Αν $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, να αποδειχθεί ότι η f έχει μέγιστο σε σημείο $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

γ) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x - \alpha}{\sqrt{x} - \eta\mu x}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

δ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{x\,\eta\mu x}{f(x)}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{\pi}{2}$ και $x = \pi$.

ε) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση

$$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \sigma\upsilon\nu x - 1$$

και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Σύντομη λύση

α) Ισχύει $|\eta\mu x| \le |x| = x$ για κάθε $x > 0$. Αν $x \in (0, 1] \subseteq (0, \frac{\pi}{2})$, τότε $\sqrt{x} - \eta\mu x > x - \eta\mu x > 0$.
Αν $x > 1$, τότε $\sqrt{x} > 1 \ge \eta\mu x$. Άρα, $D_f = (0, +\infty)$.

β) $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x} - \eta\mu x)^2}$, όπου $\varphi(x) = 2x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

x	0		x_0		$\frac{\pi}{2}$
$\varphi'(x)$	1	$+$	0	$-$	$-\pi$
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$\varphi(x_0)$	$\searrow$	-1

Ισχύει $\varphi''(x) < 0$, $\varphi' \downarrow (0, \frac{\pi}{2})$ και η φ' έχει σύνολο τιμών το $(-\pi, 1)$, οπότε έχει ρίζα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$.
Η φ μηδενίζεται σε σημείο $\xi \in (x_0, \frac{\pi}{2})$,
οπότε $f'(\xi) = 0$, $f'(x) < 0$ για $x > x_0$
και $f'(x) > 0$ για $x < x_0$.

x	0		ξ		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	

Η f έχει μέγιστο στο $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

γ) Αν $\alpha = 0$, το όριο γράφεται $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{\sqrt{x} - \eta\mu x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\eta\mu x}{x}} = 0$, αφού $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Αν $\alpha \ne 0$, τότε $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x - \alpha}{\sqrt{x} - \eta\mu x} = \lim\limits_{x \to 0} \left[(\eta\mu x - \alpha)\cdot \dfrac{1}{\sqrt{x} - \eta\mu x}\right] = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } \alpha > 0 \\ +\infty, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$.

δ) $$E = \int_{\pi/2}^{\pi} g(x)\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi} x(\sqrt{x} - \eta\mu x)\,dx = \frac{2}{5}\pi^2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{8}\right) + 1 - \pi.$$

ε) $g'(x) = \sqrt{x} - \eta\mu x \ge 0$. Άρα $g \uparrow [0, +\infty)$ και $g([0, +\infty)) = [g(0), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)) = [0, +\infty)$,
διότι $g(x) \ge \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\right) = +\infty$.

ΘΕΜΑ 74

Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση $f\circ f$ και να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

γ) Να σχεδιαστούν στο ίδιο σχήμα οι C_f και $C_{f^{-1}}$

δ) Να βρεθεί το πλήθος των κοινών σημείων των C_f, $C_{f^{-1}}$ και να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απ' αυτές, τον $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

ε) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

στ) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{f(x^2)}\,dx$.

Σύντομη λύση

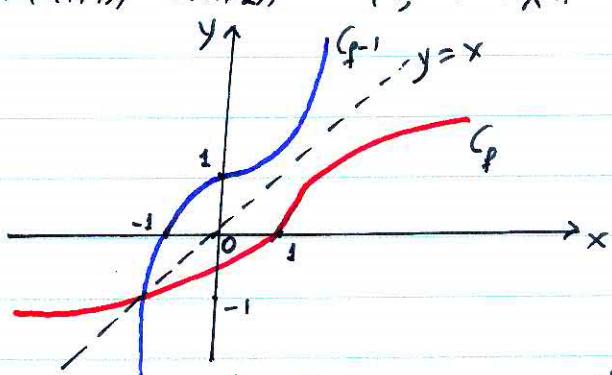
α) $f^{-1}(x)=x^3+1,\ x\in\mathbb{R}$. $\quad f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1}, & x\geq 1\\ -\sqrt[3]{1-x}, & x<1\end{cases}$.

β) $D_{f\circ f}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}=\mathbb{R}$ και $(f\circ f)(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{f(x)-1}, & \text{αν } f(x)\geq 1, \text{ δηλ. } x\geq 2\\ -\sqrt[3]{1-f(x)}, & \text{αν } f(x)<1, \text{ δηλ. } x<2\end{cases}$, οπότε

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{\sqrt[3]{x-1}-1}, & x\geq 2\\ -\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{x-1}}, & 1\leq x<2\\ -\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1-x}}, & x<1\end{cases}$$

Για $x_1<x_2$ ισχύει $x_1-1<x_2-1$, δηλ. $f^3(x_1)<f^3(x_2)$ και $f(x_1)<f(x_2)$. Άρα, $f\uparrow\mathbb{R}$ και $f(f(x_1))<f(f(x_2))$. Άρα, $f\circ f\uparrow\mathbb{R}$.

γ) Κατασκευάζουμε πρώτα την $C_{f^{-1}}$. Η C_f είναι συμμετρική της $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία $y=x$. (Το πλήθος των κοινών σημείων θα διαπιστωθεί στο ερώτημα (δ)).



δ) Η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ έχει μόνο μία ρίζα (Μελετήστε την $h(x)=f^{-1}(x)-x$). Για $x\geq 0$ ισχύει $f^{-1}(x)\geq x\geq f(x)$.

$$E=\int_0^1\left(f^{-1}(x)-f(x)\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}+x-\frac{3}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}}\right]_0^1=2.$$

ε) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}, & x>1\\ -\dfrac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}, & 0<x<1\end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}}\right)=0$.

Ασύμπτωτες: $x=0$, $x=1$, $y=0$.

στ) $I=\displaystyle\int_2^3\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,dx=\frac{1}{2}\int_2^3(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}(x^2-1)'\,dx=\frac{3}{4}\left[(x^2-1)^{\frac{2}{3}}\right]_2^3=\frac{3}{4}\left(2-\sqrt[3]{3}\right).$

ΘΕΜΑ 75

Μια συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $\sigma\upsilon\nu x\cdot(f''(x)-f(x))=2\eta\mu x\cdot f'(x)$ και η C_f εφάπτεται της ευθείας $y=x$ στο σημείο $A(0,f(0))$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\dfrac{x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $x\in[-1,1]$.

β) Αν $\alpha,\beta\in(0,1]$ με $\alpha<\beta$, να αποδειχθεί ότι $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta}>\dfrac{\alpha}{\beta}$.

γ) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$I_1=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx \quad \text{και} \quad I_2=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

δ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=\dfrac{\pi}{4}$.

ε) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα.

Σύντομη λύση

α) $f(0)=0$ και $f'(0)=1$.

$\sigma\upsilon\nu x\cdot f''(x)-\eta\mu x\cdot f'(x)=\eta\mu x\cdot f'(x)+\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)\Leftrightarrow(f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x)'=(f(x)\cdot\eta\mu x)'\ \dots\ (f(x)\sigma\upsilon\nu x)'=1\ \dots$

β) $f'(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$, $f\uparrow[0,1]$ και $f(\alpha)>f(\beta)$.

γ) $$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}dx\ \overset{x=-t}{=\!=}\ \int_{1}^{-1}\frac{-t}{\sigma\upsilon\nu t}(-dt)=-I_1,\ \text{οπότε } I_1=0.$$

$$I_2=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x}dx\ \overset{\eta\mu x=t}{=\!=}\ \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{1-t^2}dt=\dots=\ln(1+\sqrt{2})-\frac{1}{2}\ln 3.$$

δ) $$E=\int_0^{\pi/4}\frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=\int_0^{\pi/4}x\cdot(\varepsilon\varphi x)'dx=\left[x\varepsilon\varphi x+\ln(\sigma\upsilon\nu x)\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

ε) $$f''(x)=\frac{x+x\eta\mu^2x+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x},\quad [-1,1]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \sigma\upsilon\nu x>0$$

- Αν $x\in[0,1]$, τότε $f''(x)\geq 0$ και η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,1]$.
- Αν $x\in[-1,0]$, τότε $f''(x)\leq 0$ και η f είναι κοίλη στο διάστημα $[-1,0]$.