ΝΤΟΥΛΑΣ.Κ

13-04-2023

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 2022-23

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Α ΘΕΜΑ

Α1.Να δείξετε ότι **(α)** $\left(x^{\nu}\right)' = \nu x^{\nu-1}, \nu \in N - \{0,1\}$,όπου $x \in R$.

(4 Μονάδες)

(β) $\left(x^{-\nu}\right)' = -\nu x^{-\nu-1}, \nu \in N - \{0\}$,όπου $x \in R - \{0\}$.

(3 Μονάδες)

Α2.(α)Να δώσετε τον ορισμό του κρίσιμου σημείου για μία συνάρτηση f ορισμένη στο Α.

(β)Θεωρούμε την πρόταση
«Όλα τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης είναι θέσεις τοπικών ακρότατων».

(β1)Να την χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ψευδή.

(1 Μονάδα)

(β2) Να αιτιολογήσετε την απάντηση, δηλαδή αν είναι αληθής να το αποδείξετε ενώ, αν είναι ψευδής να δώσετε (αντι)παράδειγμα.

(3 Μονάδες)

Α4. α) Να δώσετε τον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

(2 Μονάδες)

β) Η συνάρτηση $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x-2}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση
(Να επιλέξετε το σωστό) i. $x = 2$ ii. $y = 2$ iii. $y = x$ iv. $x = 3$.

(2 Μονάδες)

Α5.Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

(10 Μονάδες)

i. Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α είναι γνησίως αύξουσα στο Α όταν υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$, ώστε να ισχύει : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

ii. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$ είναι θετική κοντά στο $x_0 = 0$.

iii. Η συνάρτηση f με $f'(x) = (x-1)^2(x-2), x \in R$ παρουσιάζει στη θέση $x = 1$ ακρότατο.

iv. Αν η f είναι κυρτή σ΄ ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ τότε ισχύει : $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

v. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει η ισότητα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε κατ ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x-1$, $x \in R$ και η συνεχής στο R συνάρτηση g ώστε να ισχύει : $(x-1)\cdot g(x) = 2x^2-3x+1$, $x \in R$.

i. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

(6 Μονάδες)

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h(x)=x^2+\alpha x+\beta$, $x \in R$ τέτοια ώστε :

$(hog)(x) = 2(goh)(x)$, για κάθε $x \in R$.

ii. Να δείξετε ότι $h(x) = x\cdot(x-2)+\frac{5}{3}$, $x \in R$ και να εξετάσετε αν είναι αντιστρέψιμη.

(7 Μονάδες)

iii. Να βρείτε τα όρια **(α)** $\lim_{x\to+\infty} f(x)\eta\mu\frac{1}{x}$ **(β)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)h(x)}{x\left(1+x+x^2\right)}$.

(6 Μονάδες)

iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{g(x)}{e^x}dx$.

(6 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3\eta\mu(\alpha x)$, $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ όπου

$x=\frac{\pi}{4}$ κρίσιμο σημείο και $\alpha \in (0,3)$,

i. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

(4 Μονάδες)

ii. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο πεδίο ορισμού της και στη συνέχεια να βρείτε το ξ του συμπεράσματος του παραπάνω θεωρήματος.

iii. (4 Μονάδες)

iv. Να δείξετε ότι $J=\int_0^{\pi}\frac{3f(x/2)}{27+\left[f(x/2)\right]^2}dx=\ln\sqrt{3}$.

(6 Μονάδες)

v. **(α)** Να βρείτε τον τύπο της απόστασης $d(x)=(M_0M)$ του σημείου $M_0(0,1)$ από το σημείο $M(x,f(x))$ του διαγράμματος της f για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

(3 Μονάδες)

(β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο $\Sigma(\xi,f(\xi))$ της C_f που απέχει από το M_0 ελάχιστη απόσταση.

(3 Μονάδες)

(γ) Αν $d(\xi)\neq 1$ να δείξετε ότι $d'(\xi)=0$.

(5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Για τους θετικούς α,β,γ ισχύει $\alpha^x+\beta^x+\gamma^x\geq 3$, για κάθε $x\in R$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4-4\ln x+c-1,\ x>0$ όπου
$c=\int_1^{\alpha}\frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{\beta\cdot\gamma}\frac{1}{1+t^2}dt$.

i. Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$.

(5 Μονάδες)

ii. Να δείξετε ότι $c=0$.

(5 Μονάδες)

iii. (α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

(4 Μονάδες)

(β) Να δείξετε ότι $\eta\mu f(x)+\frac{1}{6}\left[f(x)\right]^3>f(x)$, για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

(6 Μονάδες)

iv. Να βρείτε τη σχετική θέση του διαγράμματος της f με το διάγραμμα της συνάρτησης $g(x)=f(x+1)+f'(x+1)$.

(5 Μονάδες)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ