



ΑΡΧΗ 1ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 01 ΜΑΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ-

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=a^x$, $a>0$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x)=a^x \ln a$, δηλαδή $(a^x)'=a^x \ln a$.

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 5

A3. Τι ονομάζεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγουσα συνάρτηση.

β. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $v'(t_0)$.

γ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ. Κάθε γνησίως φθίνουσα συνάρτηση είναι και $1 - 1$.

ε. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbb{R}$, αν G είναι μια

παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = G(\alpha) - G(\beta)$.

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΑΡΧΗ 2ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ****Γ' ΤΑΞΗ****ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \neq 1$.

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

Μονάδες 4

B2. Να αποδείξετε ότι $f^{-1} = f$.

Μονάδες 9

B3. Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ώστε από το σημείο $A(0, k)$ να διέρχεται μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f καθώς και την εφαπτομένη.

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση

$$2f^{-1}(x) - 1 = ae^{a-1} + \frac{2}{x-1}$$
 να είναι αδύνατη.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x > -1$ ισχύει $e^{g(x)} + g(x) = x + 1 + \ln(x+1) + a$ και η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x > 0 \\ e^x + a, & x \leq 0 \end{cases}, \quad a \in (-1, +\infty).$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $g(x) \leq \frac{x + \ln(x+1) + a}{2}$ και να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$.

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1} .

Μονάδες 5

Γ3. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Μονάδες 5

Γ4. Αν $g(a) = 0$, να αποδείξετε ότι $g(x) = \ln(x+1)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{e^x}{e^x - x}$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και $\eta\mu \frac{f'(0)}{2} = f'(0)$.

ΤΕΛΟΣ 2ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΑΡΧΗ 3ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ****Γ' ΤΑΞΗ**

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{e^x-x}$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

Δ3. Αν $f(x)=e^x-x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

i. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

Μονάδες 4

ii. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $1-xe^{-x} \geq ae^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

iii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{f''(x)}{f(x)} dx \leq e-1$.

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 3ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ