ΘΕΜΑ 76

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$, $f(1)=1$ και $(f'(x))^3=\frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x>0$.

Να αποδειχθεί ότι:

α) $f\uparrow(0,+\infty)$ β) Αν $f'(x)>1$, τότε η f είναι κοίλη συνάρτηση.

γ) $f(x)=x$, $x>0$.

δ) Το ολοκλήρωμα $I=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu^4 x}dx$ ισούται με $\frac{49\pi\sqrt3}{81}-\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\ln 3$.

ε) Αν g είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)<g'(x)$ για κάθε $x>0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

Σύντομη λύση

α) $f(x)>0$, οπότε και $f'(x)>0$.

β) Με παραγώγιση των μελών της $x\cdot(f'(x))^3=f(x)$ (η $f'(x)=\sqrt[3]{\frac{f(x)}{x}}$ είναι παρ/μη) έχουμε:

$(f'(x))^3+3x(f'(x))^2 f''(x)=f'(x)\Leftrightarrow 3x(f'(x))^2 f''(x)=f'(x)\cdot(1-f'(x))(1+f'(x))<0$,

οπότε $f''(x)<0$.

γ) $(f'(x))^3+3x(f'(x))^2 f''(x)=f'(x)\Leftrightarrow (f'(x))^2+3x\cdot f'(x)\cdot f''(x)=1\Leftrightarrow$

$(f'(x))^2+\frac{3}{2}x\left((f'(x))^2\right)'=1\Leftrightarrow\left((f'(x))^2\right)'+\frac{2}{3x}\cdot(f'(x))^2=\frac{2}{3x}$

Αν $g(x)=(f'(x))^2$, τότε

$g'(x)+\frac{2}{3x}\cdot g(x)=\frac{2}{3x}$ και πολλαπλασιάζουμε με $e^{\frac{2}{3}\ln x}=x^{\frac{2}{3}}$, οπότε

$\left(x^{\frac{2}{3}}\cdot g(x)\right)'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'\Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}}\cdot g(x)=x^{\frac{2}{3}}+c \quad (1)$

Για $x=1$ η (1) δίνει $g(1)=1+c$, ενώ η $(f'(x))^3=\frac{f(x)}{x}$ δίνει $f'(1)=1$, οπότε $g(1)=1$ και $c=0$. Έτσι, $g(x)=1$, $f'(x)=1$ …

δ) Έχουμε: $I=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}dx=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}(\varepsilon\varphi x)'dx=\left[\frac{x\,\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right]_{\pi/6}^{\pi/3}-\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+x\cdot 2\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^4 x}\cdot\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx$

$=\frac{34\pi\sqrt3}{27}-\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}dx-\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{2x(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)}{\sigma\upsilon\nu^4 x}dx$, οπότε

$I=\frac{34\pi\sqrt3}{27}-\left[\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}\right]_{\pi/6}^{\pi/3}-2I+2\int_{\pi/6}^{\pi/3}x(\varepsilon\varphi x)'dx$ …

ε) Η $h(x)=g(x)-x$ είναι γνησίως αύξουσα και για $x>1$ ισχύει $h(x)>g(1)-1$, οπότε $g(x)>x+g(1)-1$ και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+g(1)-1)=+\infty$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

ΘΕΜΑ 77

Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο με $f(x)\neq 0$, $f(0)=1$ και $f(2)=3$.

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x)=4f(x)-f^2(x)$, $x\in\mathbb{R}$ έχει μέγιστο.

β) Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$, να αποδειχθεί ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

γ) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας με γενικό όρο

$$\alpha_\nu=\sqrt[3]{\nu+f(1)}-\sqrt[3]{\nu-f(3)}.$$

δ) Αν $f'(x)>0$ και E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)+f^2(x)}$, τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x=2$, να αποδειχθεί ότι $\dfrac{1}{3}<E<\dfrac{1}{2}$.

Σύντομη λύση

α) $g(x)=4-(f(x)-2)^2\le 4=g(x_0)$, όπου $f(x_0)=2$ (η f παίρνει την τιμή 2)

β) Επειδή $f(0)<f(2)<f(1)$, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f(\xi)=f(2)$ και άρα η f δεν είναι 1-1.

γ) $$\alpha_\nu=\frac{(\nu+f(1))-(\nu-f(3))}{\beta_\nu}=\frac{f(1)+f(3)}{\beta_\nu}$$ με $f(1)+f(3)>0$, όπου

$$\beta_\nu=\sqrt[3]{(\nu+f(1))^2}+\sqrt[3]{(\nu+f(1))(\nu-f(3))}+\sqrt[3]{(\nu-f(3))^2}.$$

Επειδή $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\beta_\nu=+\infty$, είναι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu=0$.

δ) $f(x)>0$ και $h(x)>0$.

$$E=\int_0^2 h(x)\,dx=\int_0^2\frac{(f(x)+1)-f(x)}{f(x)\cdot(f(x)+1)}\cdot f'(x)\,dx=\int_0^2\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx-\int_0^2\frac{f'(x)}{f(x)+1}\,dx=$$

$$=\Big[\ln f(x)\Big]_0^2-\Big[\ln(f(x)+1)\Big]_0^2=(\ln 3-\ln 1)-(\ln 4-\ln 2)=\ln 3-\ln 2.$$

Αν $\varphi(x)=\ln x$, $x>0$, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $x_1\in(2,3)$ με

$\varphi'(x_1)=\dfrac{\ln 3-\ln 2}{3-2}$, δηλαδή $\ln 3-\ln 2=\dfrac{1}{x_1}$.

Επειδή $2<x_1<3$, ισχύει $\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{x_1}<\dfrac{1}{2}$ και άρα $\dfrac{1}{3}<\ln 3-\ln 2<\dfrac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 78

Μια κυρτή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

α) Αν η παράγωγος f' της f έχει ρίζα, να αποδειχθεί ότι
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

β) Αν η f' δεν έχει ρίζα, να αποδειχθεί ότι μόνο ένα από τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ είναι $+\infty$.

γ) Αν $f''(x) = e^{x^3}$, $x\in\mathbb{R}$ και η f έχει ακρότατο το $f(1)=1$, τότε:

(i) Να βρεθεί το είδος του ακροτάτου.

(ii) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες συντεταγμένων και την κατακόρυφη ασύμπτωτη της καμπύλης
$$y = \frac{\eta\mu x}{(e^{x-1}-1)\cdot \ln(x-1)}, \quad x\in(1,\sqrt{2}).$$

Σύντομη λύση

α) $f'\uparrow\mathbb{R}$. Αν $f'(x_0)=0$, τότε $f'(x)>f'(x_0)=0$ για $x>x_0$, ενώ $f'(x)<0$ για $x<x_0$.
Για $a>x_0$, η εφαπτομένη της C_f στο $A(a,f(a))$ έχει εξίσωση
$y=f(a)+f'(a)(x-a)$. Επειδή $f(x)\geq f(a)+f'(a)(x-a)$ και $f'(a)>0$, είναι
$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(a)+f'(a)(x-a)]=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Ομοίως, για $a<x_0$ είναι $f'(a)<0$, $f(x)\geq f(a)+f'(a)(x-a)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(a)+f'(a)(x-a)]=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

β) Η f' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Αν $f'(x)>0$, όπως παραπάνω βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Επειδή $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$, αποκλείεται να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.
Ομοίως, αν $f'(x)<0$, τότε μόνο το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ είναι $+\infty$.

γ) (i) $f'(1)=0$, $f'\uparrow\mathbb{R}$, $f'(x)>0$ για $x>1$ και $f'(x)<0$ για $x<1$. Άρα, το $f(1)$ είναι ελάχιστο της f.

(ii) Κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η ευθεία $x=1$, διότι η f είναι συνε
$$\lim_{x\to1^+}[(e^{x-1}-1)\ln(x-1)] = \lim_{x\to1^+}\left[\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\cdot(x-1)\ln(x-1)\right] = 1\cdot 0 = 0 \ \ldots$$

$$E=\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x)'f(x)\,dx = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 x\cdot f'(x)\,dx = 1-\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2)'f'(x)\,dx = \ldots = \frac{1}{6}(e+5).$$

ΘΕΜΑ 79

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \sqrt{f^2(x)+4} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)+f'(x)}{e^x}$ είναι σταθερή.

β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = e^x - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να βρεθεί η αντίστροφη της f.

ε) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x = \frac{3}{2}$.

Σύντομη λύση

α) Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = \dfrac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{f^2(x)+4}} = f(x)$. Επίσης, $g'(x) = 0$.

β) Θέτουμε $x = -t$ και βρίσκουμε $I = -I$, οπότε $I = 0$.

γ) Η ισότητα $f(-x) = -f(x)$ για $x = 0$ δίνει $f(0) = 0$. Επίσης, $f'(0) = \sqrt{f^2(0)+4} = 2$ και $g(0) = 2$. Άρα, $g(x) = 2$ και επομένως

$$f(x) + f'(x) = 2e^x \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow (e^x f(x))' = (e^{2x})' \ldots$$

δ) $f'(x) = e^x + e^{-x} > 0$, $f \uparrow \mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Η εξίσωση $f(x) = y$ γράφεται

$$e^x - \frac{1}{e^x} = y \Leftrightarrow e^{2x} - ye^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(e^x - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{y^2}{4} + 1 \quad (1)$$

Ισχύει $e^x > \frac{y}{2}$, διότι γράφεται $2e^x > e^x - e^{-x}$ ή $e^x + e^{-x} > 0$, που ισχύει.

Έτσι, η (1) γράφεται

$$e^x - \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{y^2}{4}+1} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2+4}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)\right), \; y \in \mathbb{R}.$$

Άρα, $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

ε) $f^{-1} \uparrow \mathbb{R}$, διότι $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} > 0$. Για $x \geq 0$ ισχύει $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(0) = 0$

Άρα, $E = \int_0^{3/2} f^{-1}(x)\,dx \overset{f^{-1}(x)=t}{=\!=} \int_0^{\ln 2} t\cdot(e^t + e^{-t})\,dt = \frac{1}{2}(3\ln 2 - 1)$.

ΘΕΜΑ 80

Μια συνάρτηση $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(a)=0$ και $f'(a)=f'(\beta)=0$. Έστω και η συνάρτηση $g(x)=f(x)-P(x)$, όπου $P(x)$ πολυώνυμο με ρίζες τα a και β, για το οποίο ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3P(x)+2}{x^2+x}=3$. Οι εφαπτόμενες της C_g στα σημεία $A(a,g(a))$ και $B(\beta,g(\beta))$ τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $\frac{a+\beta}{2}$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $P(x)=x^2-(a+\beta)x+a\beta$ β) $g(\beta)=0$.

γ) Υπάρχει $\xi\in(a,\beta)$ με $g'(\xi)+2\xi=a+\beta$.

δ) $\int_a^\beta f(x)\,dx=\int_a^\beta(\beta-x)f'(x)\,dx$.

ε) Υπάρχει $x_0\in[a,\beta]$ με $f'(x_0)=\dfrac{2}{(a-\beta)^2}\cdot\int_a^\beta f(x)\,dx$.

Σύντομη λύση

α) Αν $P(x)=a_\nu x^\nu+\dots+a_0$, $a_\nu\neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3P(x)+2}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3a_\nu x^\nu}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(3a_\nu\cdot x^{\nu-2})=3$ όταν $a_\nu=1$ και $\nu=2$.

Άρα, $P(x)=x^2+a_1x+a_0$ και αφού $P(a)=P(\beta)=0$, είναι $P(x)=(x-a)(x-\beta)=x^2-(a+\beta)x+a\beta$.

β) Οι εφαπτόμενες της C_g στα σημεία $A(a,g(a))$ και $B(\beta,g(\beta))$ είναι οι

$\varepsilon_1:\ y=(\beta-a)x-a\beta+a^2$ και $\varepsilon_2:\ y=(a-\beta)x-a\beta+\beta^2+f(\beta)$.

Το κοινό σημείο των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ έχει τετμημένη $x_0=\dfrac{a+\beta}{2}+\dfrac{f(\beta)}{2(\beta-a)}$ και άρα $g(\beta)=f(\beta)=0$.

γ) Επειδή $f(a)=f(\beta)=0$, υπάρχει $\xi\in(a,\beta)$ με $f'(\xi)=0$ κ.λπ.

δ) Ισχύει:

$$\int_a^\beta(\beta-x)f'(x)\,dx=\Big[(\beta-x)f(x)\Big]_a^\beta+\int_a^\beta f(x)\,dx=\int_a^\beta f(x)\,dx.$$

ε) Έστω ε το ελάχιστο και M το μέγιστο της f'. Επειδή $\varepsilon\le f'(x)\le M$, ισχύει

$\varepsilon(\beta-x)\le(\beta-x)f'(x)\le M(\beta-x)$ για κάθε $x\in[a,\beta]$ (αφού $\beta-x\geq 0$).

Άρα,

$$\int_a^\beta\varepsilon(\beta-x)\,dx\le\int_a^\beta(\beta-x)f'(x)\,dx\le\int_a^\beta M(\beta-x)\,dx\ \dots\quad \varepsilon\le\frac{2}{(a-\beta)^2}\cdot\int_a^\beta f(x)\,dx\le M,$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός $\eta=\dfrac{2}{(a-\beta)^2}\cdot\int_a^\beta f(x)\,dx$ είναι μια τιμή $f'(x_0)$ της f'.

ΘΕΜΑ 81

A. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, $x>0$.

B. Να βρεθεί η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to +\infty$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y=x$ και η κλίση της σε κάθε σημείο $x_0>0$ είναι ίση με $1-\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{x_0^3}-\frac{2\ln x_0}{x_0^3}$.

Γ. Έστω ότι $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$, $x>0$.

(i) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(ii) Να αποδειχθεί ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

(iii) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Σύντομη λύση

A. $g'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$ και $g((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}g(x),\, g(\sqrt{e})\right]\cup\left(\lim\limits_{x\to+\infty}g(x),\, g(\sqrt{e})\right]=\left(-\infty,\frac{1}{2e}\right]$.

B. Για κάθε $x>0$ ισχύει $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{2\ln x}{x^3}=1-\frac{1}{x^2}+\frac{1-2\ln x}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)'+g'(x)$.

Άρα, υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ με

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}+c.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}+c\right)=c$, είναι $c=0$.

Γ. (i) $f'(x)=\frac{h(x)}{x^3}$, $h(x)=x^3-x+1-2\ln x$, $h'(x)=\frac{P(x)}{x}$, $P(x)=(x-1)(3x^2+3x+2)$.

Η h έχει ελάχιστο το $h(1)=1$, οπότε $h(x)>0$ και $f'(x)>0$.

(ii) $f''(x)=\frac{\varphi(x)}{x^4}$, $\varphi(x)=2x-5+6\ln x$, $\varphi'(x)=2+\frac{6}{x}>0$, $\varphi\uparrow(0,+\infty)$.

Η φ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x),\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ με $\varphi(x_0)=0$, $\varphi(x)>0$ για $x>x_0$ και $\varphi(x)<0$ για $x<x_0$.

Άρα, $f''(x_0)=0$, $f''(x)>0$ για $x>x_0$ και $f''(x)<0$ για $x<x_0$, που σημαίνει ότι η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $A(x_0,f(x_0))$.

(iii) Για $x\in[1,2]$ ισχύει $f(x)\geq f(1)>0$, οπότε έχουμε

$$E=\int_1^2 f(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+\ln x\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{1}{x}\right)'\ln x\,dx=\dots=2+\frac{1}{2}\ln 2.$$

ΘΕΜΑ 82

Μια συνάρτηση $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ είναι συνεχής και ισχύει

$$\int_0^1 \ln^2 f(x)\,dx = 2\int_0^1\left(x^2\ln f(x)-\frac{1}{2}x^4\right)dx.$$

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=e^{x^2},\ x\in[0,1]$.

β) Να γίνει η γραφική παράσταση της f.

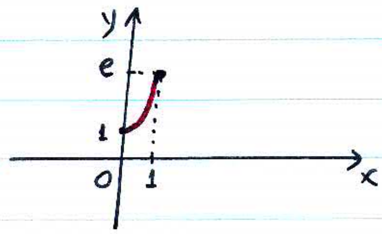
γ) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+e^{(1-x)^2}}\,dx$.

δ) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in(0,1)$ με $f(x_0)=\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx$.

Σύντομη λύση

α) Ισχύει $\displaystyle\int_0^1\left(\ln^2 f(x)-2x^2\ln f(x)+x^4\right)dx=0 \Leftrightarrow \int_0^1\left(\ln f(x)-x^2\right)^2dx=0 \Leftrightarrow \ln f(x)=x^2 \Leftrightarrow$ $f(x)=e^{x^2}$.

β) $f'(x)=2x\cdot e^{x^2}\geq 0$ και $f\uparrow[0,1]$.
$f''(x)=(2+4x^2)e^{x^2}>0$ και η f είναι κοίλη.



γ) $$I=\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx \quad (1)$$

Αν θέσουμε $x=1-t$, τότε $\displaystyle I=\int_1^0 \frac{f(1-t)}{f(1-t)+f(t)}(-dt)=\int_0^1\frac{f(1-x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx \quad (2)$

Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε $2I=\displaystyle\int_0^1 dx=1$, οπότε $I=\frac{1}{2}$.

δ) Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=1$ και μέγιστο το $f(1)=e$. Για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $1\leq f(x)\leq e$, οπότε

$$\int_0^1 1\,dx<\int_0^1 f(x)\,dx<\int_0^1 e\,dx,\ \text{δηλ. } 1<\int_0^1 f(x)\,dx<e$$

Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_0\in(0,1)$ με $f(x_0)=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι μοναδικό.

ΘΕΜΑ 83

Μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(1)=1$, $f'(1)=-3$ και $x^2\cdot f''(x)+5x\cdot f'(x)+4f(x)=0$ για κάθε $x>0$.

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x)=x^2f(x)+\ln x$ είναι σταθερή.

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x>0$.

γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f.

δ) Αν $0<a<b<2$, να αποδειχθεί ότι $f(b)<\dfrac{b\ln a-a\ln b}{a^2b-ab^2}<f(a)$.

ε) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$.

Σύντομη λύση

α) $g'(x)=\dfrac{2x^2f(x)+x^3f'(x)+1}{x}=\dfrac{h(x)}{x}$.

Ισχύει: $x^3f''(x)+5x^2f'(x)+4xf(x)=0 \Leftrightarrow \left(x^3f''(x)+3x^2f'(x)\right)+\left(2x^2f'(x)+4xf(x)\right)=0 \Leftrightarrow$

$(x^3f'(x))'+(2x^2f(x))'=0$ ... $x^3f'(x)+2x^2f(x)=-1$ Άρα, $h(x)=0$ και $g'(x)=0$

β) $g(x)=c$ και $g(1)=1$, οπότε

$x^2f(x)+\ln x=1$ και $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x>0$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, οπότε ασύμπτωτες της C_f είναι οι ευθείες $x=0$ και $y=0$.

δ) Η ανισότητα γράφεται $f(b)<\dfrac{\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln b}{b}}{a-b}<f(a)$. Αν $\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x\in(0,2)$,

σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi\in(a,b)$ με $\varphi'(\xi)=\dfrac{\varphi(a)-\varphi(b)}{a-b}$.

Ισχύει $\varphi'(x)=f(x)$ και $f\downarrow(0,2)$.

Επειδή $a<\xi<b$, ισχύει $f(b)<f(\xi)<f(a)$, δηλ. $f(b)<\dfrac{\varphi(a)-\varphi(b)}{a-b}<f(a)$.

ε) $E=\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx+\int_e^{e^2}(-f(x))\,dx=\int_1^e\frac{1}{x^2}dx-\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx-\int_e^{e^2}\frac{1}{x^2}dx+\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x^2}dx$

$=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e+\displaystyle\int_1^e\left(\frac{1}{x}\right)'\ln x\,dx+\left[\frac{1}{x}\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{x}\right)'\ln x\,dx=\frac{2}{e}-\frac{2}{e^2}$.

ΘΕΜΑ 84

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(0)=-1$, $f'(0)=1$ και $f''(x)-2f'(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=(2x-1)\cdot e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

γ) Να λυθεί η εξίσωση
$$e^{x+\frac{1}{2}} = -\frac{2}{2x-1}.$$

δ) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_1^4 \frac{f(\ln x)}{\sqrt{x}}\,dx$.

ε) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(1+x-x^3)=f(1)+f(x)-f(x^3)$ με $x\geq 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Σύντομη λύση

α) $f''(x)-f'(x)=f'(x)-f(x) \Leftrightarrow (f'(x)-f(x))'=f'(x)-f(x) \Leftrightarrow f'(x)-f(x)=ce^x \ldots f'(x)-f(x)=2e^x \Leftrightarrow$
$e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=2 \Leftrightarrow (e^{-x}f(x))'=(2x)' \ldots$

β) $f'(x)=(2x+1)e^x$, $f(\mathbb{R})=[f(-\frac{1}{2}), \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)) \cup [f(-\frac{1}{2}), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)) = [-\frac{2}{\sqrt{e}}, +\infty)$.

γ) $e^{x+\frac{1}{2}}=-\frac{2}{2x-1} \Leftrightarrow e^x\cdot\sqrt{e}\cdot(2x-1)=-2 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{2}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

δ) $I=\int_1^4 \frac{(2\ln x-1)\cdot x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 2\sqrt{x}\ln x\,dx - \int_1^4 \sqrt{x}\,dx =$

$= \int_1^4 \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'\ln x\,dx - \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{4}{3}x^{\frac{1}{2}}dx - \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx =$

$= \frac{32}{3}\ln 4 - \frac{14}{9}\left[x^{3/2}\right]_1^4 = \frac{32}{3}\ln 4 - \frac{98}{9}$.

ε) • Αν $x>1$, τότε $1+x-x^3<1<x<x^3$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ., υπάρχουν $\xi_1\in(1+x-x^3,1)$ και $\xi_2\in(x,x^3)$ με $f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(1+x-x^3)}{x^3-x}$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(x^3)-f(x)}{x^3-x}$.
Επειδή $f''(x)=(2x+3)e^x>0$ για $x\geq0$, είναι $f'\uparrow[0,+\infty)$ και αφού $\xi_1<\xi_2$, ισχύει $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$, δηλ. $f(1)-f(1+x-x^3)<f(x^3)-f(x)$ (αφού $x^3-x>0$) και άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

• Ομοίως, αν $0<x<1$, τότε $x^3<x<1<1+x-x^3$ και η εξίσωση είναι αδύνατη.

• Η εξίσωση αληθεύει για $x=0$ και για $x=1$.

ΘΕΜΑ 85

Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ γνωρίζουμε τα εξής:

i) $x f'(x) + x^2 f''(x) = f(x) - f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ii) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

iii) $f^2(1)\cdot[1 + f^2(-1)] + e^2 + 1 = 2f(1)\cdot(e - f(-1))$

iv) $f'(1) = 0$ και $f'(-1) = \frac{2}{e}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να αποδειχθεί ότι $\int_1^\alpha x e^{\frac{1}{x}}\,dx \geq \alpha - 1$ για κάθε $\alpha \geq 1$.

δ) Να βρεθούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x \to +\infty} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma + f(x)) = 0$.

ε) Αν $g(x) = f(x) - x - 1$, να εξετασθεί αν η C_g τέμνει τον $x'x$ και να αποδειχθεί ότι $g(x) > -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$

στ) Να λυθεί στο διάστημα $[1, +\infty)$ η εξίσωση $\int_{F(x)}^{G(x)} f(u)\,du = 0$,

όπου $F(x) = x \cdot \int_1^x f(t)\,dt$ και $G(x) = \int_1^x t f(t)\,dt$.

Σύντομη λύση

α) Η iii) γράφεται $(f(1) - e)^2 + (f(1)f(-1) + 1)^2 = 0$, οπότε $f(1) = e$ και $f(-1) = -\frac{1}{e}$.

Η i) γράφεται $x^2 f''(x) + 2x f'(x) = f(x) + x f'(x) - f'(x) \Leftrightarrow (x^2 f'(x))' = (x f(x) - f(x))' \Leftrightarrow$

$x^2 f'(x) = \begin{cases} (x-1)f(x) + c_1, & x < 0 \\ (x-1)f(x) + c_2, & x > 0 \end{cases}$ … $x^2 f'(x) = (x-1)f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow (\ln|f(x)|)' = (\ln|x| + \frac{1}{x})'$

Αν $x < 0$ είναι $f(x) < 0$. Αν $x > 0$ είναι $f(x) > 0$. …

β) $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\cdot(1 - \frac{1}{x})$ και $f''(x) = e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^3}$. Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0)$ και κυρτή στο $(0, +\infty)$.

γ) $f \uparrow [1, +\infty)$ και $f(x) \geq f(1) = e$ για κάθε $x \geq 1$.

Άρα, $\int_1^\alpha f(x)\,dx \geq \int_1^\alpha e\,dx = e(\alpha - 1) \geq \alpha - 1$ για κάθε $\alpha \geq 1$.

δ) Αν $\alpha \neq 0$, το όριο γράφεται $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2\left(\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right)\right)$ και ισούται με $+\infty$ ή $-\infty$, άτοπο.

Άρα, $\alpha = 0$. Η ισότητα $\lim\limits_{x \to +\infty} (\beta x + \gamma + f(x)) = 0$ σημαίνει ότι η ευθεία $y = -\beta x - \gamma$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, οπότε $-\beta = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $-\gamma = \lim\limits_{x \to +\infty} (x e^{\frac{1}{x}} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1$. Άρα $\beta = \gamma = -1$.

ε) • Η εξίσωση $g(x) = 0$ γράφεται $e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x} = 0$ και είναι αδύνατη, διότι η $k(x) = e^x - x - 1$ έχει ρίζα μόνο την $x = 0$ και $k(\frac{1}{x}) \neq 0$.

• Για $x > 0$ ισχύει $k(x) > 0$, $k(\frac{1}{x}) > 0$ και $g(x) > 0 > -1$. Για $x < 0$ είναι $g' \downarrow (-\infty, 0)$, $g'((-\infty, 0)) = (-1, 0)$, $g \downarrow (-\infty, 0)$ και $g(x) > \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -1$.

στ) Επειδή $f(x) \neq 0$, η εξ. αληθεύει μόνο όταν $F(x) = G(x) \Leftrightarrow \int_1^x f(t)(t - x)\,dt = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $(f(t)\cdot(t - x) \leq 0)$.

ΘΕΜΑ 86

Μια συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(1)=0$ και για κάθε $x>0$ ισχύει

$$x\cdot f'(x)-2f(x)=x^3\cdot e^{-\frac{f(x)}{x^2}}.$$

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\begin{cases} x^2\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

β) Να βρεθούν όλες οι αρχικές της f και να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x=1$.

γ) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(f(x))^\nu}{x^{2\nu-1}}$, όπου $\nu\in\mathbb{N}^*$.

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(1)-f(x)+f(x^2)=f(1-x+x^2)$, $x\geq 1$.

Σύντομη λύση

α) • $\dfrac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=e^{-\frac{f(x)}{x^2}}\Leftrightarrow e^{\frac{f(x)}{x^2}}\cdot\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)'=1\Leftrightarrow\left(e^{\frac{f(x)}{x^2}}\right)'=(x)'\Leftrightarrow e^{\frac{f(x)}{x^2}}=x+c\ \ldots\quad, x>0.$

• $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(x^2\ln x)=\ldots=0.$

β) Ισχύει: $x^2\ln x=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'\ln x=\left(\frac{1}{3}x^3\ln x\right)'-\frac{1}{3}x^3(\ln x)'=\left(\frac{1}{3}x^3\ln x\right)'-\frac{1}{3}x^2=\left(\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3\right)'$ και

επομένως οι αρχικές της f στο $[0,+\infty)$ έχουν τη μορφή $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+c_1, & x>0\\ c_2, & x=0\end{cases}$

Από τη συνέχεια της F στο 0 βρίσκουμε $c_1=c_2\ (=c)$

και τώρα διαπιστώνουμε ότι $F'(0)=0=f(0)$.

Άρα, $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+c, & x>0\\ c, & x=0\end{cases}$ και $E=\int_0^1|f(x)|\,dx=-\int_0^1 f(x)\,dx=-\left[F(x)\right]_0^1=\frac{1}{9}.$

γ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(f(x))^\nu}{x^{2\nu-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{2\nu}\ln^\nu x}{x^{2\nu-1}}=\lim\limits_{x\to0}(x\ln^\nu x)=\lim\limits_{x\to0}\left(x^{\frac{1}{\nu}}\cdot\ln x\right)^\nu=0$, διότι

$\lim\limits_{x\to0}\left(x^{\frac{1}{\nu}}\cdot\ln x\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{\nu}}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\nu}x^{-\frac{1}{\nu}-1}}=\lim\limits_{x\to0}\left(-\nu x^{\frac{1}{\nu}}\right)=0.$

δ) Για $x=1$ αληθεύει.

Για $x>1$ ισχύει $1<x<1-x+x^2<x^2$. Υπάρχουν $\xi_1\in(1,x)$ και $\xi_2\in(1-x+x^2,x^2)$ με

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x^2)-f(1-x+x^2)}{x-1}$.

Η εξίσωση γράφεται $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ και αφού $f'\uparrow[1,+\infty)$ $\left(f''(x)=2\ln x+3>0\right)$,

έχουμε $\xi_1=\xi_2$, άτοπο.

Επαναληπτικά θέματα

Θαν. Ξένος

ΘΕΜΑ 87

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με

$$e^x + (e^x - 1)f'(x) = e^{-f(x)} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{x}{e^x - 1}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

β) Να εξετασθεί αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

γ) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(f^2(x)) = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$

ε) Να αποδειχθεί ότι η C_f δεν έχει καμία ασύμπτωτη.

Σύντομη λύση

α) $e^x \cdot e^{f(x)} + (e^x - 1)e^{f(x)} f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left((e^x - 1)\cdot e^{f(x)}\right)' = (x)' \Leftrightarrow (e^x - 1)e^{f(x)} = \begin{cases} x + c_1, & x > 0 \\ x + c_2, & x < 0 \end{cases}$.

Με τα πλευρικά όρια στο 0, βρίσκουμε $c_1 = c_2 = 0$.

Επομένως, $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e^x - 1}\right), x \neq 0$. Επίσης, $f(0) = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{x}{e^x - 1}\right) = 0$, διότι $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$.

β) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{x(e^x - 1)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-xe^x}{e^x - 1 + xe^x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-1-x}{2+x} = -\frac{1}{2}$. Άρα, $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

γ) Για $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{x(e^x - 1)}$ και $x(e^x - 1) > 0$ (x, $e^x - 1$ ομόσημοι)

Αν $g(x) = e^x - 1 - xe^x, x \in \mathbb{R}$, τότε $g(x) \leq g(0) = 0$, οπότε $f'(x) < 0$ στο $\mathbb{R}^*$ και αφού η f είναι συνεχής στο 0, είναι $f \downarrow \mathbb{R}$.

δ) $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}$. Υπάρχει μοναδικός $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = \alpha$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$

και η εξίσωση γράφεται $f^2(x) = x_0$ (1)

Αν $\alpha > 0$, τότε $x_0 < 0$ και η (1) είναι αδύνατη. Αν $\alpha = 0$, τότε $x_0 = 0$ και η (1) έχει μόνο τη λύση $x = 0$. Αν $\alpha < 0$, τότε $x_0 > 0$, οπότε η (1) γράφεται $f(x) = \sqrt{x_0}$ ή $f(x) = -\sqrt{x_0}$ και έχει ακριβώς δύο λύσεις (από μία σε κάθε περίπτωση).

ε). Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η C_f δεν έχει καμία ασύμπτωτη κατακόρυφη.

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} f'(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - 1 - xe^x}{x(e^x - 1)} = \ldots = -1$ και $\lim_{x\to +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) = +\infty$.

- $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ και $\lim_{x\to -\infty} (f(x) - 0x) = +\infty$. Άρα, η C_f δεν έχει καμία ασύμπτωτη.

ΘΕΜΑ 88

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(0)=0$, $f'(0)=1$ και $2\cdot(1+xf'(x))+(x^2+1)f''(x) = e^{x-f(x)}\cdot(1-f'(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = x-\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία καμπής της.

γ) Να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης
$$\frac{1}{4}f^4(x) = f^2(x)-1.$$

δ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f^{-1} ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\le x\le f^{-1}(x)$.

Σύντομη λύση

α) $2+2xf'(x)+(x^2+1)f''(x) = e^{x-f(x)}\cdot(x-f(x))' \Leftrightarrow \left(2x+(x^2+1)f'(x)\right)' = \left(e^{x-f(x)}\right)' \ldots$

$2x+(x^2+1)f'(x) = e^x\cdot e^{-f(x)} \Leftrightarrow 2xe^{f(x)}+(x^2+1)e^{f(x)}\cdot f'(x) = e^x \Leftrightarrow \left((x^2+1)e^{f(x)}\right)' = (e^x)' \ldots$

β) $f''(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$. Σημεία καμπής $A(-1,-1-\ln 2)$ και $B(1, 1-\ln 2)$.

Η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = x-\ln 2$

Ισχύει $f(x)-(x-\ln 2) = \ln 2-\ln(x^2+1)$

Η συνάρτηση $g(x) = \ln 2-\ln(x^2+1)$ μηδενίζεται στα σημεία -1 και 1. Για κάθε $x\in[-1,1]$ ισχύει $x^2\le 1$, $x^2+1\le 2$ και $g(x)\ge 0$.

Άρα,
$$E = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\ln 2\,dx - \int_{-1}^{1}(x)'\ln(x^2+1)\,dx = 2\ln 2 - \left[x\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1} + 2\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\ln 2-2\ln 2+2\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = 4-2\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}\,dx \underset{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}{\overset{x=\varepsilon\varphi t}{=}} 4-\pi.$$

γ) $f \uparrow \mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Η εξίσωση γράφεται: $f^4(x)-4f^2(x)+4=0 \Leftrightarrow (f^2(x)-2)^2=0 \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{2}$ ή $f(x)=-\sqrt{2}$.
Άρα, έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

δ) • f αντιστρέψιμη και $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

• Επειδή $x^2+1\ge 1$, ισχύει $\ln(x^2+1)\ge 0$ και άρα $f(x)\le x$ (1)

Θέτουμε στην (1) όπου x ($x\in\mathbb{R}$) την $f^{-1}(x)$ και έχουμε $x\le f^{-1}(x)$.

ΘΕΜΑ 89

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2}, & x\le 0\\ x\ln^{\nu}x, & x>0\end{cases}$, όπου $\nu\in\mathbb{N}^*$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

β) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της f.

γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f και να αποδειχθεί ότι η C_f δεν έχει ασύμπτωτες.

δ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την καμπύλη $y=\eta\mu x$ και τις ευθείες $x=\pi$ και $x=e$, για $\nu=2$.

ε) Αν $\nu=1$, να γίνει η γραφική παράσταση της f και να λυθεί η εξίσωση $e\,f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{xe}\right)-2$ στο $\mathbb{R}$.

Σύντομη λύση

α) • Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

• Στο 0 είναι συνεχής, διότι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{\frac{1}{\nu}}\cdot\ln x\right)^{\nu}=0^{\nu}=0$.

• Δεν είναι παρ/μη στο 0, διότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\overset{x=-t}{=\!=}\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-\frac{\sqrt[3]{t^2}}{t}\right)=\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right)=-\infty$.

β) Για $x<0$ είναι $f(x)=\sqrt[3]{|x|^2}=(-x)^{2/3}$ και $f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}<0$.

Για $x>0$ και $\nu>1$ είναι $f'(x)=\ln^{\nu-1}x\cdot(\ln x+\nu)$ και έχει ρίζες 1 και $\frac{1}{e^{\nu}}$, ενώ για $x>0$ και $\nu=1$ είναι $f'(x)=\ln x+1$ με ρίζα $\frac{1}{e}$.

Κρίσιμα σημεία της f είναι $0, 1, \frac{1}{e^{\nu}}$ για $\nu>1$, ενώ για $\nu=1$ είναι τα 0 και $\frac{1}{e}$.

γ) $\nu=1$

x	$-\infty$		0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\mathbb{R})=[-\frac{1}{e},+\infty)$

$\nu>1$ άρτιος

x	$-\infty$		0		$1/e^{\nu}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$(\frac{\nu}{e})^{\nu}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\mathbb{R})=[0,+\infty)$

$\nu>1$ περιττός

x	$-\infty$		0		$1/e^{\nu}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-(\frac{\nu}{e})^{\nu}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

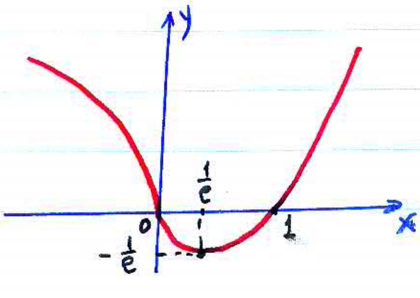
$f(\mathbb{R})=[-(\frac{\nu}{e})^{\nu},+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

δ) Για $x\in[e,\pi]$ είναι $\ln^{\nu}x\ge 1$ και $f(x)\ge x>\eta\mu x$. Άρα, $E=\int_e^{\pi}(x\ln^2 x-\eta\mu x)\,dx=\ldots$

$=\frac{\pi^2}{2}\ln\pi(\ln\pi-1)+\frac{1}{4}(\pi^2-e^2)-1-\sigma\upsilon\nu e$.

ε)



Επειδή $f(x)\ge-\frac{1}{e}$, είναι $ef(x)\ge-1$. Επίσης, $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{xe}\right)-2\le 1-2=-1$.

Η εξίσωση αληθεύει μόνο όταν $ef(x)=-1$ και $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{xe}\right)-2=-1$, δηλ. όταν $x=\frac{1}{e}$.

ΘΕΜΑ 90

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με
$f(0) = \int_{-1}^{1} (f(x) - f(-x))dx$ και $f(x) \cdot f'(x) - e^x \cdot (f(x) + f'(x)) = x + 1 - e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(0) = 0$ και $f(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(f^2(x)) + 2 = e$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln x \cdot f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$.

δ) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $x f(x) < \int_x^{2x} f(t)dt < x f(2x)$ και ότι $\lim_{x \to +\infty} \left(\int_x^{2x} f(t)dt \right) = +\infty$.

ε) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\dfrac{\frac{1}{2}(x-e) + \int_{x-1}^{\frac{1}{2}x^2} g(t)dt}{x-2} + \dfrac{2x - e + \int_{2x}^{4x} g\left(\frac{t}{2}\right)dt}{x-1} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

στ) Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x \to 1} \dfrac{(g(x))^{-2\nu}}{e^{\frac{1}{g^2(x)}}}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Σύντομη λύση

α) • $\int_{-1}^{1} f(-x)dx \overset{x=-t}{=} \int_{-1}^{1} f(x)dx$. Άρα, $f(0) = 0$.

• $(f^2(x) - 2e^x f(x))' = (x^2 + 2x - e^{2x})' \ldots (f(x) - e^x)^2 = (x+1)^2$. Βρίσκουμε δύο λύσεις, αλλά μόνο η $f(x) = e^x - x - 1$ είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$.

β) $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$. Η εξ. γράφεται $f(f^2(x)) = e - 2 = f(x_0)$, $x_0 > 0$ ... $f^2(x) = x_0 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x_0}$ (αφού $f(x) \geq 0$)
Η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς δύο ρίζες, αφού η f παίρνει κάθε θετική τιμή ακριβώς δύο φορές.

γ) $g''(x) = \ln x \cdot e^x + \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$ με $\varphi(x) = 2xe^x - e^x - x + 1$.
Για $x \geq 1$ ισχύει $\varphi'(x) > 0$ και $\varphi(x) \geq \varphi(1) > 0$, οπότε $g''(x) > 0$.

δ) • Για $x > 0$ ισχύει $f'(x) > 0$ και για $t \in [x, 2x]$ ισχύει $f(x) \leq f(t) \leq f(2x)$, οπότε ολοκληρώνουμε.

• $\lim_{x \to +\infty} (x f(x)) = +\infty$, οπότε $\lim_{x \to +\infty} \left(\int_x^{2x} f(t)dt \right) = +\infty$.

ε) Η εξ. γράφεται $G(x) = 0$, όπου $G(x) = (x-1) \cdot \left[\frac{1}{2}(x-e) + \int_{x-1}^{\frac{1}{2}x^2} g(t)dt \right] + (x-2) \cdot \left[2x - e + \int_{2x}^{4x} g\left(\frac{t}{2}\right)dt \right]$, $x \geq 1$
Η εφαπτ. της C_g στο $(1, g(1))$ έχει εξίσωση $y = (e-2)x - e + 2$ και για $x \geq 1$ ισχύει $g(x) \geq (e-2)x - e + 2$ και $\int_1^2 g(x)dx > \frac{1}{2}(e-2)$. Άρα, $G(2) > 0$. Επίσης, $g\left(\frac{x}{2}\right) \geq (e-2)\frac{x}{2} - e + 2$ για $x \geq 2$ και $G(1) < 0 \ldots$

στ) Αν $t = \dfrac{1}{g^2(x)}$, το όριο γράφεται:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^\nu}{e^t} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t}{e^{\frac{t}{\nu}}} \right)^\nu = 0, \text{ διότι } \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{\frac{t}{\nu}}} = 0.$$