

Α ΘΕΜΑ

- A1. Να δώσετε τον ορισμό της κατακόρυφης ασύμπτωτης μιας συνάρτησης f .
- A2. Έστω συνάρτηση f , συνεχής στο διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ισχύει $f'(x) = 0$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ .
- A3. Να αναφέρετε τις πιθανές θέσεις των σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε διάστημα Δ .

A4. Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες, τότε το x_0 είναι:
(Να επιλέξετε το σωστό και να το αιτιολογήσετε)

α) 0 β) $\frac{1}{4}$ γ) $\frac{1}{2}$ δ) 1.

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- i. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $y'y$, της γραφικής παράστασης της f .
- ii. Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το όριο της f είναι $+\infty$ και το όριο της g είναι $-\infty$ τότε το όριο της $f + g$ (στο x_0) είναι μηδέν.
- iii. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \text{συν}x$ ισούται με $\eta\mu x$, δηλαδή ισχύει η ισότητα $(\text{συν}x)' = \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ τότε ισχύει πάντα

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- v. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 (x^3 - x) dx$, παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$ και τον άξονα των x .

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in A = (1, +\infty)$.

B1. Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon) : x + 2y = 7$ εφάπτεται στη C_f . Ποιο το σημείο επαφής;

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

B3. Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και ισχύει $f^{-1}(x) = f(x)$, $x > 1$.

B4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_2^3 f(x) dx$.

B5. Να εξετάσετε αν ορίζεται η σύνθεση της g , $g(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ με την f , δηλαδή η $f \circ g$.

ΘΕΜΑ Γ

Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g με συνεχείς παραγώγους ισχύουν

• $f'(x) \neq g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x) - \eta\mu x}{x} = 1$.

Να δείξετε ότι

Γ1. Τα διαγράμματα των f, g τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$.

Γ2. Ισχύει $f'(0) = 2 + g'(0)$ και μετά ότι $f'(x) > g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ3. Βρείτε τη σχετική θέση των C_f, C_g σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Γ4. Αν επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\alpha)x^3 + \beta x^2 - g(\alpha)x(1+x^2) + 1}{1+x^2} = 3$, βρείτε τα α και β .

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x-2)\ln x$, $x > 0$.

Δ1. (α) Να δείξετε ότι η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο το οποίο βρίσκεται σε διάστημα της μορφής $(\alpha, \alpha+1)$, όπου α ακέραιος τον οποίο να βρείτε.

Δ2. Αν ξ είναι το κρίσιμο σημείο της f , τότε

(α) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει: $(\xi-2)^2 + \xi \cdot f(x) \geq 0$.

(β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow \xi} \left[\frac{2023}{f(x) - f(\xi)} + \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x - \xi} \right]$.

Θεωρούμε επιπλέον συνάρτηση g με $g(x) = x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν δύο κοινά σημεία, τα οποία να βρείτε και στη συνέχεια ότι στο ένα από αυτά δέχονται κοινή εφαπτόμενη.

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζουν τα διαγράμματα των f, g .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΣΕ ΟΛΟΥΣ!