

### Θέμα

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

(β) Να μελετήσετε την  $f$  ως τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα. Έχει η  $f$  ολικά ακρότατα ;

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και τους αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  με  $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 0$ .

(δ) Να εξετάσετε αν η  $C_f$  έχει ασύμπτωτες και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

(ε) Αν  $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + ax^3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι  $a = \frac{1}{6}$ .

(στ) Να αποδείξετε ότι η τιμή του ολοκληρώματος  $I = \int_1^2 \frac{x^3}{6f(x)} dx$  είναι  $I = \ln \frac{f(2)}{f(1)} - 1$ .