Απαντήσεις και Μοριοδότηση

Θεμάτων

Μαθηματικών Προσανατολισμού

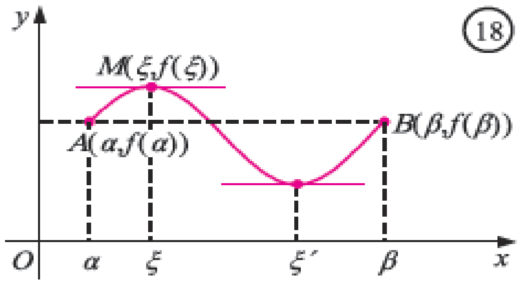
5ης Διαλυκειακής Γραπτής Δοκιμασίας

" Θεόδωρος Φυλακτός "

Γ' Τάξης Ημερησίων Γενικών Λυκείων

Δυτικής Θεσ/νίκης 2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. **6**	Για $x \neq x_0$, ισχύει: $$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$	2
	Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:	2
	$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$ δηλαδή $$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$	2
Α2. **4**	Αν μια συνάρτηση f είναι: ➢ συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] ➢ παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και ➢ f(α) = f(β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$	2
	Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x. 	2
Α3 **3**	Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ**[(1)] ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $$F'(x)=f(x), \text{ για κάθε } x\in\Delta.$$	3
Α4. **2**	Μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν: α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.	2
Α5. **10**	α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Λ	10

ΘΕΜΑ Β

Β1. **3**	$f'(x)=\dfrac{-\alpha}{(x-1)^2}$, $x<1$, $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$	1
	Πρέπει $f'(-1)=-1 \Leftrightarrow \dfrac{-\alpha}{4}=-1 \Leftrightarrow \alpha=4$	2

B2 **6**	$f'(x)=\frac{-4}{(x-1)^2}<0 \quad , \quad \forall x<1$ Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1)$, άρα η f είναι 1-1 άρα ορίζεται η f^{-1}.	2
	Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχουμε: $D_{f^{-1}}=f(A)=f\left((-\infty,1)\right)\overset{\downarrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to1^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,4)$	2
	$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{4x}{x-1}=y \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow x=\frac{y}{y-4}$ Άρα είναι $f^{-1}(x)=\frac{x}{x-4} \quad , \quad x<4$	2
B3 **7**	$D_{gof^{-1}}=\left\{x\in D_{f^{-1}} / f^{-1}(x)\in D_g\right\}=\left\{x<4 / \frac{x}{x-4}>0\right\}=\{x<4 / x<0\}=(-\infty,0)$	2
	$(gof^{-1})(x)=\left(g\left(f^{-1}(x)\right)\right)=\ln\left(\frac{x}{x-4}\right)$	1
	Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{x}{x-4}\right)=0,$ οπότε αν $u=\frac{x}{x-4}$ τότε $u\to0$ και $\lim\limits_{x\to0^-}\ln\left(\frac{x}{x-4}\right)=\lim\limits_{u\to0}\ln u=-\infty$, άρα η x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{gof^{-1}}$	2
	Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-4}\right)=1,$ οπότε αν $u=\frac{x}{x-4}$ τότε $u\to1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x}{x-4}\right)=...=0$, άρα η y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_{gof^{-1}}$	2
B4 **4**	Για κάθε $x\neq0$ έχουμε: $\left\lvert συν\frac{1}{x}\right\rvert\le1 \Leftrightarrow \left\lvert f^{-1}(x)συν\frac{1}{x}\right\rvert\le\left\lvert f^{-1}(x)\right\rvert \Leftrightarrow -\left\lvert f^{-1}(x)\right\rvert\le f^{-1}(x)συν\frac{1}{x}\le\left\lvert f^{-1}(x)\right\rvert$	2
	• $\lim\limits_{x\to0}\left(-\left\lvert f^{-1}(x)\right\rvert\right)=0$ • $\lim\limits_{x\to0}\left\lvert f^{-1}(x)\right\rvert=0$	1
	Σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(f^{-1}(x)συν\frac{1}{x}\right)=0$	1

<table>
<tr><td rowspan="4">Β5

5</td><td>$$\frac{f^{-1}(x)}{\text{συν}x}+1=0\Leftrightarrow f^{-1}(x)+\text{συν}x=0$$
Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=f^{-1}(x)+\text{συν}x\quad,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>• η φ είναι συνεχής στο $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
• $\varphi(0)=f^{-1}(0)+\text{συν}0=1>0$
$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=f^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\text{συν}\frac{\pi}{2}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}-4}<0$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano για τη φ στο $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in\left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_o)=0\Leftrightarrow f^{-1}(x_o)+\text{συν}x_o=0$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\varphi'(x)=(f^{-1})'(x)-\text{ημ}x=-\frac{4}{x(x-4)}-\text{ημ}x<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
Άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα οπότε το x_0 είναι μοναδικό</td><td>2</td></tr>
</table>

ΘΕΜΑ Γ

<table>
<tr><td rowspan="2">Γ1.

6</td><td>$$f'(x)=\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}-1=-\frac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}<0\quad,\quad\forall x\in\mathbb{R}$$
Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x-2)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2e^x}{e^x+1}-x-2+x+2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)=\frac{2\cdot0}{0+1}=0$$
Άρα η ευθεία $(\varepsilon):y=-x-2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Γ2

6</td><td>$$f''(x)=\frac{2e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}\quad,\quad\forall x\in\mathbb{R}$$</td><td>2</td></tr>
<tr><td><table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f''(x)$</td><td>+</td><td></td><td>−</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td></td><td>$\searrow$</td></tr>
</table>
O.Μ
$f''(x)=0\Leftrightarrow 1-e^x=1\Leftrightarrow x=0$
$f''(x)>0\Leftrightarrow 1-e^x>1\Leftrightarrow x<0$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Το σημείο με το μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης είναι το $A(0,-1)$
Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=-\frac{1}{2}x-1$</td><td>2</td></tr>
</table>

Γ3 **9**	Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)-(-x-2)=\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ $,x\in\mathbb{R}$ και είναι $h(x)>0$ $,x\in\mathbb{R}$	1
	Το εμβαδόν του χωρίου $E(\alpha)$ που περικλείεται από την C_f, την ευθεία (ε), τον άξονα y΄y και την ευθεία με εξίσωση $x=\alpha$, $\alpha<0$, είναι $E(\alpha)=\int_{\alpha}^{0}h(x)dx$	1
	Έτσι έχουμε $E(\alpha)=\int_{\alpha}^{0}h(x)dx=\int_{\alpha}^{0}\dfrac{2e^x}{e^x+1}dx=\left[2\ln\left(e^x+1\right)\right]_{\alpha}^{0}=2\ln2-2\ln\left(e^{\alpha}+1\right)$ τ.μ	3
	Ισχύουν $\alpha(t_o)=-2\ln2$, $\alpha'(t)=-2\dfrac{\text{μονάδες}}{\text{sec}}$	1
	Αν $E_1(t)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου ως συνάρτηση του χρόνου, τότε ισχύει $E_1(t)=E(\alpha(t))=2\ln2-2\ln\left(e^{\alpha(t)}+1\right)$	1
	$E_1'(t)=-2\dfrac{\alpha'(t)e^{\alpha(t)}}{e^{\alpha(t)}+1}$ Άρα $E_1'(t_0)=-2\dfrac{\alpha'(t_0)e^{\alpha(t_0)}}{e^{\alpha(t_0)}+1}=-2\dfrac{-2e^{-2\ln2}}{e^{-2\ln2}+1}=\dfrac{4\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+1}=\dfrac{4}{5}\dfrac{\text{τ.μ}}{\text{sec}}$	2
Γ4 **4**	$\forall\beta>0$ ισχύουν : $\lvert\eta\mu\beta\rvert<\beta\Leftrightarrow-\beta<\eta\mu\beta<\beta,$ οπότε έχουμε:	1
	$\begin{cases}\beta>\eta\mu\beta\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(\beta)<f(\eta\mu\beta)\\-2\beta>-3\beta\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(-2\beta)<f(-3\beta)\end{cases}\Rightarrow f(\beta)+f(-2\beta)<f(\eta\mu\beta)+f(-3\beta)$	3

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **6**	Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο των συνεχών $2x$ και f. Έτσι έχουμε $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)\cdot x}{e^x-1}\right)\underset{\text{Dlh}}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f'(x)\cdot x+f(x)}{e^x}\right)=\dfrac{f'(0)\cdot0+f(0)}{e^0}=f(0)$ Ακόμη, $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)\cdot x}{e^x-1}\right)=1$. Άρα, $f(0)=1$. **(Ή με βοηθητική συνάρτηση)**	2
	Έχουμε $g'(x)=-2xe^{-x^2}\cdot f(x)+e^{-x^2}\cdot f'(x)=e^{-x^2}\left(-2x\cdot f(x)+f'(x)\right)\overset{(1)}{=}0$, $\forall x\in\mathbb{R}$	1
	Άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, άρα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g(x)=c$, $\forall x\in\mathbb{R}$	1
	Για x=0 έχουμε $g(0)=e^0\cdot f(0)\Rightarrow c=1$ Άρα είναι $g(x)=1$ $\forall x\in\mathbb{R}$	1
	Άρα είναι $e^{-x^2}\cdot f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$	1

Δ2. 7	α. $f'(x)=2xe^{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$ $f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και η f' γνησίως αύξουσα	2
	β. Για x=0 η ζητούμενη γίνεται $1\le f(0)\le 1 \Leftrightarrow 1\le 1\le 1$ και ισχύει ως ισότητα.	1
	Για x>0 εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την f στο διάστημα $[0,x]$ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)-1}{x}$	2
	Έχουμε $0<\xi<x \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(0)<f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow 0<\dfrac{f(x)-1}{x}<f'(x)$ $\overset{\cdot x>0}{\Leftrightarrow} 0<e^{x^2}-1<xf'(x) \overset{+1}{\Leftrightarrow} 1<f(x)<1+xf'(x)$ Άρα για κάθε $x\ge 0$ ισχύει $1\le f(x)\le 1+x\cdot f'(x)$	2
	Δ2β) 2^{ος} ΤΡΟΠΟΣ	
Δ2β. 5	Είναι $f'(x)=2xe^{x^2}>0$, για κάθε x>0 ,οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ αφού είναι συνεχής. Έτσι για $x\ge 0\Rightarrow f(x)\ge f(0)\Rightarrow f(x)\ge 1$ Η ισότητα μόνο για x=0	2
	Για $x\ge 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-1-xf'(x)$ Είναι $\varphi'(x)=f'(x)-f'(x)-xf''(x)=-xf''(x)<0$, για κάθε x>0 οπότε η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.	2
	Έτσι για κάθε $x\ge 0\Rightarrow \varphi(x)\le\varphi(0)\Rightarrow f(x)\le 1+xf'(x)$ με την ισότητα μόνο για x=0.	1
Δ3 6	Επειδή είναι $f(x)>0$,$\forall x\in\mathbb{R}$ είναι $E(\Omega)=\int_0^1 f(x)dx$	1
	Από τη σχέση $1\le f(x)\le 1+x\cdot f'(x)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για x=0 έχουμε $\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1\left(1+x\cdot f'(x)\right)dx\Leftrightarrow E<\int_0^1\left(1+x\cdot f'(x)\right)dx$	1
	$\int_0^1\left(1+x\cdot f'(x)\right)dx=\int_0^1 1dx+\int_0^1\left(x\cdot f'(x)\right)dx=1+\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx=$ $=1+f(1)-E=1+e-E$. Άρα είναι $E<1+e-E\Leftrightarrow E<\dfrac{1+e}{2}$	2

	από τη γνωστή ανισότητα $\ln x \le x-1 \quad , \quad \forall x>0$ θέτοντας όπου x το e^{x^2} έχουμε $x^2+1\le e^{x^2}$ (η ισότητα ισχύει μόνο για x=0) $\int_0^1 \left(x^2+1\right)dx < \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 < \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \frac{4}{3}<E$	2
Δ4 **6**	Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $f\left(x^2+1\right)+f\left(\lvert x\rvert\right)=f\left(\lvert x\rvert+1\right)+f\left(x^2\right)\Leftrightarrow f\left(x^2+1\right)-f\left(x^2\right)=f\left(\lvert x\rvert+1\right)-f\left(\lvert x\rvert\right).$ Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x+1)-f(x) \quad , \quad x\in\mathbb{R}$	1
	$\forall x\in\mathbb{R} \quad , \quad h'(x)=f'(x+1)-f'(x)$	1
	Είναι $x<x+1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x+1)\Leftrightarrow h'(x)>0 \quad , \quad \forall x\in\mathbb{R}$ Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$	1
	Έχουμε $f\left(x^2+1\right)-f\left(x^2\right)=f\left(\lvert x\rvert+1\right)-f\left(\lvert x\rvert\right)\Leftrightarrow h\left(x^2\right)=h\left(\lvert x\rvert\right)\underset{1-1}{\overset{h}{\Leftrightarrow}} x^2=\lvert x\rvert$ $\Leftrightarrow \lvert x\rvert^2-\lvert x\rvert=0\Leftrightarrow \lvert x\rvert\left(\lvert x\rvert-1\right)=0\Leftrightarrow \lvert x\rvert=0$ ή $\lvert x\rvert=1\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pm1$	3