Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis
2022 - 2023

Αντώνης Βαλέργας **Αποστόλης Κακαβάς**
Στέλιος Μιχαήλογλου **Άγγελος Μπλιάς**
Δημήτρης Πατσιμάς **Βαγγέλης Ραμαντάνης**
Νίκος Σαμπάνης **Βαγγέλης Τόλης**
Νίκος Τούντας **Ισαάκ Χιονίδης**

10ο Γενικό Επαναληπτικό Διαγώνισμα

20-5-2023

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

7 μονάδες

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να κάνετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

4 μονάδες

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει ότι $f(x)\cdot g(x)=0$, τότε θα ισχύει ότι $f(x)=0$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ »

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**. **1 μονάδα**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α με τη βοήθεια απόδειξης ή αντιπαραδείγματος.

3 μονάδες

4 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Μια πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού έχει πάντα σημείο καμπής.

β) Αν μια συνάρτηση f ορίζεται στο x_0 τότε η $x=x_0$ δεν μπορεί να είναι κατακόρυφη ασύμπτωτή της.

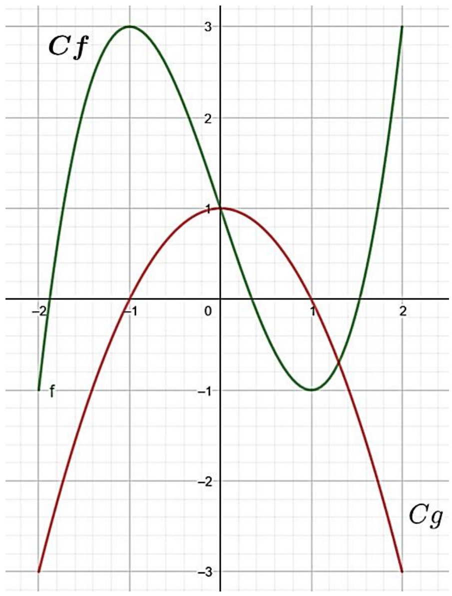
γ) Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε μπορεί να υπάρχει $x_0\in\Delta$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

δ) Αν συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ακρότατο στο x_0, τότε $f'(x_0)=0$.

ε) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, έχει μόνο μια παράγουσα στο Δ.

10 μονάδες

Θέμα Β



Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f,g:[-2,2]\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

- $f(x)=\alpha x^3+\beta x+\gamma,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$,
- $g(x)=\delta x^2+1,\delta\in\mathbb{R}$

Β1. Να δείξετε ότι $\alpha=1,\beta=-3,\gamma=1,\delta=-1$.

6 μονάδες

Β2. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις f, g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

4 μονάδες

Β3. Να υπολογίσετε τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)-g(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{g(x)-x-1}$

8 μονάδες

Β4. Να αποδείξετε ότι ακριβώς ένα $\kappa\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των f και g και των ευθειών $x=\kappa$, $x=0$ είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των f και g και των ευθειών $x=0, x=1$

5 μονάδες

Θέμα Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f^2(x)=-x^2+\alpha x$, $\alpha\in\mathbb{R}$
- Στο σημείο με τετμημένη $x_1=2$ η f παίρνει μέγιστη τιμή .

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha=4$.

6 μονάδες

Γ2. Να δείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(0,4)$.

4 μονάδες

Γ3. Αν $f(2)=2$, να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$, $x\in[0,4]$. Στη συνέχεια να κάνετε την γραφική της παράσταση.

8 μονάδες

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x)=x^3, x\in\mathbb{R}$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g, f^8 έχουν στο διάστημα (3,4) μόνο κοινό σημείο με τετμημένη $M(x_0,y_0)$.

5 μονάδες

Γ5. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_0 βρίσκεται πιο κοντά στο 3 ή στο 4 .

2 μονάδες

Θέμα Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $\int_{e^{-1}}^{e} f(x)dx=\frac{2}{e}$
- Η κλίση της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο της $(x,f(x))$, $x > 0$, είναι ίση με $\frac{1}{x}$

Δ1. Να δείξετε ότι γραφική παράσταση της f τέμνει σε μοναδικό σημείο την ευθεία $y=\frac{2}{e^2-1}$.

5 μονάδες

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

4 μονάδες

Δ3. Θεωρούμε τα σημεία Α(1,0) , Μ(x,f(x)), x > 1 και το σημείο Β το οποίο είναι η προβολή του σημείου Μ πάνω στον θετικό ημιάξονα άξονα των x.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΒ είναι ίσο με $E(x)=\frac{(x-1)\ln x}{2}$, x > 1 και στη συνέχεια να δείξετε ότι η συνάρτηση Ε είναι γνησίως αύξουσα .

β) Να βρείτε τη τιμή του κ > 1 για την οποία το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x΄x και την ευθεία x = κ να είναι ίσο με e^2+1 τ.μ .

8 μονάδες

Δ4. Να δείξετε ότι $\int_1^2 E(x)dx=\frac{1}{8}$.

3 μονάδες

Δ5. Να υπολογιστεί το όριο $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(6\int_1^2 E(k)dk-1\right)x^{2023}-x^{2022}+1}{\left(2\int_1^2 e^n dn-5\right)\cdot x^{2022}-x+1}$$

5 μονάδες

Ευχόμαστε επιτυχία!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

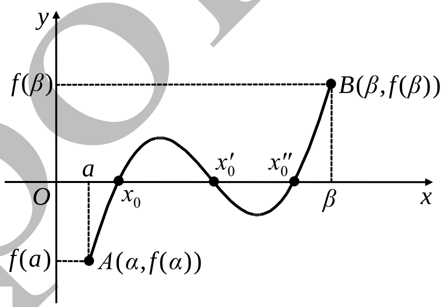
Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα. (α, β).

Γεωμετρική ερμηνεία
Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Α3. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x) = x + |x|,\ x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x - |x|,\ x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f(x)g(x) = (x + |x|)(x - |x|) = x^2 - |x|^2 = x^2 - x^2 = 0$ χωρίς όμως κάποια από τις συναρτήσεις f, g να είναι ίση με το 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Α4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$, $B(1,-1)$ και $\Gamma(0,1)$ άρα

$f(-1) = 3 \Leftrightarrow \alpha \cdot (-1)^3 + \beta \cdot (-1) + \gamma = 3 \Leftrightarrow -\alpha - \beta + \gamma = 3$,

$f(1) = -1 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1^3 + \beta \cdot 1 + \gamma = -1 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = -1$ και

$f(0) = 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0^3 + \beta \cdot 0 + \gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1$ Άρα $\alpha + \beta = -2$ (1)

Η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο με τετμημένη $x = 1$ και εφόσον είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με $f'(x) = 3\alpha x^2 + \beta$, θα έχουμε ότι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -3\alpha$ (2).

Από τις σχέσεις (1),(2) έχουμε $\alpha - 3\alpha = -2 \Leftrightarrow -2\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = 1$ και $\beta = -3 \cdot 1 \Leftrightarrow \beta = -3$.

Η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $\Delta(1,0)$, άρα $g(1) = 0 \Leftrightarrow \delta \cdot 1^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \delta = -1$

Β2. Όπως προκύπτει από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

Φ $f \nearrow [-2,-1]$, $f \searrow [-1,1]$, $f\ 1\ [1,2]$ $g \nearrow [-2,0]$ και $g \searrow [0,2]$

Η συνάρτηση f για $x = -1,\ x = 2$ παρουσιάζει μέγιστο το $f(-1) =\ f(2)\ = 3$ και για $x = -2$, $x = 1$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(-2) = f(1) = -1$

Η συνάρτηση g για $x=-2$, $x=2$ παρουσιάζει ελάχιστο το $g(-2)=g(2)=-3$ και για $x=0$ παρουσιάζει μέγιστο το $g(0)=1$

Β3. ***α)*** Είναι $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left(x^3-3x+1\right)=3, \lim\limits_{x\to-1} g(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left(-x^2+1\right)=0$ οπότε :

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to-1}\left(f(x)-g(x)\right)}{\lim\limits_{x\to-1}\left(f(x)+g(x)\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to-1}f(x)-\lim\limits_{x\to-1}g(x)}{\lim\limits_{x\to-1}f(x)+\lim\limits_{x\to-1}g(x)}=\frac{3-0}{3+0}=\frac{3}{3}=1$$

2ος τρόπος

$f(x)-g(x)=x^3+x^2-3x, f(x)+g(x)=x^3-x^2-3x+2$ οπότε

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+x^2-3x}{x^3-x^2-3x+2}=\frac{-1+1+3}{-1-1+3+2}=\frac{3}{3}=1$$

β) Για κάθε $x\in(0,1)$ διαπιστώνουμε από το σχήμα ότι είναι $f(x)<g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)<0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\left(f(x)-g(x)\right)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{f(x)-g(x)}=-\infty$.

Για κάθε $x\in(-1,0)$ διαπιστώνουμε από το σχήμα ότι είναι $f(x)>g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)>0$ και $\lim\limits_{x\to0^-}\left(f(x)-g(x)\right)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{f(x)-g(x)}=+\infty$.

Άρα το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{f(x)-g(x)}$ δεν υπάρχει .

2ος τρόπος

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^3+x^2-3x}=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x^2+x-3}\cdot\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{3}\cdot(-\infty)=-\infty ,$$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{f(x)-g(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^3+x^2-3x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x^2+x-3}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{3}\cdot(+\infty)=+\infty$ άρα το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{f(x)-g(x)}$ δεν υπάρχει .

γ) Το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{g(x)-x-1}$ είναι της μορφής $\dfrac{0}{0}$ και επειδή οι f,g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{g(x)-x-1}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)-1}=\frac{f'(0)}{g'(0)-1}$$

οι f,g είναι παραγωγίσιμες με $f'(x)=3x^2-3$, $g'(x)=-2x$ άρα

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{g(x)-x-1}=\frac{f'(0)}{g'(0)-1}=\frac{-3}{0-1}=3$$

2ος τρόπος

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{g(x)-x-1}=\lim_{x\to0}\frac{x^3-3x}{-x^2-x}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}\left(x^2-3\right)}{\cancel{x}(-x-1)}=\frac{-3}{-1}=3 .$$

Β4. Η συνάρτηση $f(x)-g(x)$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(x)-g(x)\ge0$ για κάθε $x\in[-1,0]$ και $f(x)-g(x)<0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Αρκεί η εξίσωση $\int_\kappa^0\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_0^1\left(g(x)-f(x)\right)dx$ να έχει ακριβώς μία λύση ως προς κ.

$$\int_\kappa^0\left(x^3-3x+1+x^2-1\right)dx=\int_0^1\left(-x^2+1-x^3+3x-1\right)dx \Leftrightarrow \int_\kappa^0\left(x^3-3x+x^2\right)dx=\int_0^1\left(-x^2-x^3+3x\right)dx$$

$$\left[\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{\kappa}^{0}=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+3\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\Leftrightarrow-\frac{\kappa^4}{4}+3\frac{\kappa^2}{2}-\frac{\kappa^3}{3}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{\kappa^4}{4}+3\frac{\kappa^2}{2}-\frac{\kappa^3}{3}=\frac{11}{12}\Leftrightarrow-3\kappa^4+18\kappa^2-4\kappa^3-11=0$$

Έστω $f(x)=-3x^4-4x^3+18x^2-11$, $x\in[-1,0]$ Η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως πολυωνυμική .

$f(0)=-11$, $f(-1)=-3(-1)^4-4(-1)^3+18(-1)^2-11=8$ οπότε $f(-1)\cdot f(0)<0$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa\in(-1,0)$, τέτοιο ώστε $f(\kappa)=0\Leftrightarrow-3\kappa^4+18\kappa^2-4\kappa^3-11=0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ με $f'(x)=-12x^3-12x^2+36x=-12x(x^2+x-3)<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0)$ οπότε το κ είναι μοναδικό .

(Είναι : $-1<x<0$ οπότε $0<x^2<1$ (Α) και $-4<x-3<-3$(Β) .Με πρόσθεση των σχέσεων (Α) και(Β) έχουμε $-4<x^2+x-3<-2$ οπότε $x^2+x-3<0$.

Όμως $-12x>0$ για $-1<x<0$ οπότε $f'(x)<0$).

Θέμα Γ

Γ1.Η συνάρτηση f στο εσωτερικό σημείο του $[0,4]$ με τετμημένη $x_1=2$ παρουσιάζει μέγιστο , είναι παραγωγίσιμη σε αυτό επειδή είναι παραγωγίσιμη στο $[0,4]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα $f'(2)=0$. Με παραγώγιση της σχέσης $f^2(x)=-x^2+\alpha x$ (1) έχουμε $2f(x)f'(x)=-2x+\alpha$ και για x = 2 είναι $2f(2)f'(2)=-4+\alpha\Leftrightarrow0=-4+\alpha\Leftrightarrow\alpha=4$.

Γ2. Βρίσκουμε τις ρίζες της f . Έστω $\rho\in[0,4]$ με $f(\rho)=0\Leftrightarrow f^2(\rho)=0\Leftrightarrow-\rho^2+4\rho=0\Leftrightarrow-\rho(\rho-4)=0\Leftrightarrow(\rho=0)$ ή $(\rho=4)$. Άρα $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in(0,4)$ και επειδή η f είναι συνεχής σε αυτό διατηρεί πρόσημο σ' αυτό το διάστημα.

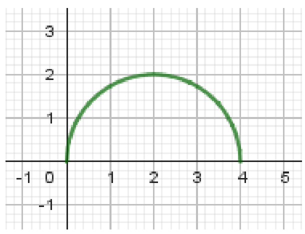
Γ3. Η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(0,4)$ και επειδή $f(2)=2$, $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,4)$.
Για κάθε $x\in(0,4)$ έχουμε

$f^2(x)=-x^2+4x\Leftrightarrow\sqrt{f^2(x)}=\sqrt{-x^2+4x}\Leftrightarrow|f(x)|=\sqrt{-x^2+4x}\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}f(x)=\sqrt{-x^2+4x}$, και

$f(0)=f(4)=0$, άρα $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$, $x\in[0,4]$.

$f^2(x)=-x^2+4x\Leftrightarrow y^2+x^2-4x+4=4\Leftrightarrow y^2+(x-4)^2=4$, $x\in[0,4]$.

Η γραφική παράσταση της f είναι το ημικύκλιο του διπλανού σχήματος.



Γ4. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση
$x^3=f^8(x)\Leftrightarrow x^3-f^8(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο (3, 4).

Έστω $\varphi(x)=x^3-f^8(x)$, $x\in[3,4]$.

Είναι $\varphi(3)=3^3-f^8(3)=3^3-3^4<0$, $\varphi(4)=4^3-f^8(4)=64>0$.

Είναι $\varphi(3)\varphi(4)<0$ και φ συνεχής στο [3, 4] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(3,4)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow x_0^3=f^8(x_0)$.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [3,4], οπότε για κάθε $x_1,x_2\in[3,4]$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2)>0\Rightarrow f^8(x_1)>f^8(x_2)\Leftrightarrow-f^8(x_1)<-f^8(x_2)$ (1) και $x_1^3<x_2^3$ (2) .Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι $\varphi(x_1)<\varphi(x_2)\Leftrightarrow\varphi\nearrow[3,4]$, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x)=0$ στο διάστημα [3, 4].

Γ5.Είναι

$$\varphi\left(\frac{7}{2}\right)=\left(\frac{7}{2}\right)^3-f^8\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{7^3}{2^3}-\left(\sqrt{4\cdot\frac{7}{2}-\frac{49}{4}}\right)^8=\frac{7^3}{2^3}-\left[\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^8=\frac{7^3}{2^3}-\left(\frac{7}{4}\right)^4=\frac{7^3}{2^3}-\frac{7^4}{2^8}=\frac{7^3}{2^3}\left(1-\frac{7}{32}\right)>0\,.$$

Είναι $\varphi(3)\varphi\left(\frac{7}{2}\right)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(3,\frac{7}{2}\right)$. Όμως το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της φ στο (3, 4), οπότε $x_0\in\left(3,\frac{7}{2}\right)$.

Επομένως το x_0 βρίσκεται πιο κοντά στο 3.

Θέμα Δ

Δ1. Επειδή η κλίση της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο της $(x,f(x))$ είναι ίση με $\frac{1}{x}$ είναι $f'(x)=\frac{1}{x}>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $\int_{e^{-1}}^{e}f(x)dx=\frac{2}{e}\Leftrightarrow F(e)-F(e^{-1})=\frac{2}{e}$, όπου F αρχική συνάρτηση της συνεχούς συνάρτησης f.

Η F είναι συνεχής στο $\left[e^{-1},e\right]$ ως παραγωγίσιμη, είναι παραγωγίσιμη στο $\left(e^{-1},e\right)$ με $F'(x)=f(x)$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(e^{-1},e\right)$ έτσι ώστε

$F'(\xi)=\dfrac{F(e)-F(e^{-1})}{e-e^{-1}}\Leftrightarrow f(\xi)=\dfrac{\frac{2}{e}}{e-\frac{1}{e}}=\dfrac{\frac{2}{e}}{\frac{e^2-1}{e}}=\dfrac{2}{e^2-1}$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, το ξ είναι μοναδικό.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει σε μοναδικό σημείο Κ την ευθεία $y=\frac{2}{e^2-1}$.

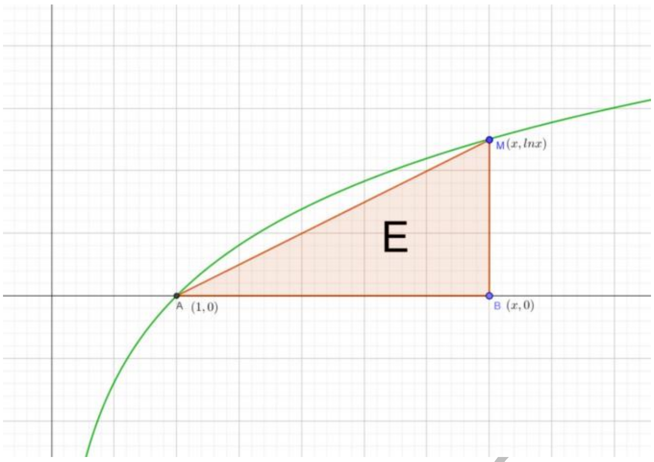
Δ2. Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow f'(x)=(\ln x)'\Leftrightarrow\ f(x)=\ln x+c,\ c\in\mathbb{R}$.

$$\int_{e^{-1}}^{e}f(x)dx=\frac{2}{e}\Leftrightarrow\int_{e^{-1}}^{e}(\ln x+c)dx=\frac{2}{e}\Leftrightarrow\left[x\ln x-x+cx\right]_{\frac{1}{e}}^{e}=\frac{2}{e}\Leftrightarrow$$

$$\cancel{e}-\cancel{e}+ce+\cancel{\frac{1}{e}}+\cancel{\frac{1}{e}}-\frac{c}{e}=\cancel{\frac{2}{e}}\Leftrightarrow c\left(e-\frac{1}{e}\right)=0\Leftrightarrow c=0.$$

Άρα $f(x)=\ln x,\ x\in(0,+\infty)$.

Δ3. α) Για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΒ



έχουμε $(\mathrm{AMB})=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{MB}\overset{x>1}{\Leftrightarrow}$

$\mathrm{E}(\mathrm{x})=\frac{1}{2}(\mathrm{x}-1)\cdot\ln\mathrm{x}=\frac{(\mathrm{x}-1)\ln\mathrm{x}}{2}$

Για $x>1$ η Ε είναι παραγωγίσιμη με

$\mathrm{E}'(\mathrm{x})=\left[\frac{(\mathrm{x}-1)\ln\mathrm{x}}{2}\right]'=$

$\frac{1}{2}\left[(\mathrm{x}-1)'\ln\mathrm{x}+(\mathrm{x}-1)(\ln\mathrm{x})'\right]=$

$\frac{1}{2}(\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x})=\frac{1}{2}(\ln x+1-\frac{1}{x})>0$.

Για $x>1\Leftrightarrow\ln x>\ln 1\Leftrightarrow\ln x>0$, $0<\frac{1}{x}<1\Rightarrow 1-\frac{1}{x}>0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

β) Για $\kappa>1$ και $x\in[1,\kappa]$ ισχύει $f(x)\geq 0$. Αναζητούμε μία ευθεία $x=k$ τέτοια ώστε

$\int_1^{\kappa}\ln x dx=e^2+1\Leftrightarrow\int_1^{\kappa}(x)'\ln x dx=e^2+1\Leftrightarrow[x\ln x]_1^{k}-\int_1^{\kappa}1dx=e^2+1$

$\Leftrightarrow\kappa\ln\kappa-(\kappa-1)=e^2+1\Leftrightarrow\kappa\ln\kappa-\kappa+1=e^2+1\ \Leftrightarrow\kappa\ln k-\kappa=e^2\Leftrightarrow\kappa\ln k-\ln e^{\kappa}=e^2\Leftrightarrow\kappa\ln\frac{\kappa}{e}=e^2$

θέτω $g(x)=x\ln\frac{x}{e}, x\in(0,+\infty)$.

Για $x>1: g'(x)=\left(x\ln\frac{x}{e}\right)'=\ln\frac{x}{e}+x\cdot\frac{1}{\frac{x}{e}}\left(\frac{x}{e}\right)'=\ln\frac{x}{e}+e\cdot\frac{1}{e}=\ln\frac{x}{e}+1=\ln x>0, x\in(1,+\infty)$, άρα $g\nearrow(0,+\infty)$

οπότε g είναι 1 – 1 άρα $\kappa\ln\frac{\kappa}{e}=e^2\Leftrightarrow g(\kappa)=g(e^2)\overset{g:1-1}{\Leftrightarrow}\kappa=e^2$

Άρα για $k=e^2$ είναι $E=e^2+1$ τ.μ.

Δ4. $\int_1^2 E(x)dx=\int_1^2\frac{(x-1)\ln x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_1^2(x\ln x-\ln x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(x\ln x)dx-\frac{1}{2}\int_1^2(\ln x)dx=$

$\frac{1}{2}\int_1^2\left((\frac{x^2}{2})'\ln x\right)dx-\frac{1}{2}\int_1^2((x)'\ln x)dx=\frac{1}{2}[\frac{x^2}{2}\ln x]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{x}{2}dx-\frac{1}{2}[x\ln x]_1^2+\frac{1}{2}\int_1^2 1dx=$

$\ln 2-[\frac{x^2}{8}]_1^2-\ln 2+\frac{1}{2}[x]_1^2=-[\frac{x^2}{8}]_1^2+\frac{1}{2}[x]_1^2=\frac{1}{8}$

Δ5. Ισχύει ότι $\int_1^2 E(x)dx<\frac{1}{6}\Leftrightarrow\int_1^2 E(k)dk<\frac{1}{6}\Leftrightarrow 6\int_1^2 E(k)dk-1<0$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $e^x\geq x+1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=0 οπότε

$\int_1^2 e^x dx>\int_1^2(x+1)dx\Leftrightarrow\int_1^2 e^x dx>\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2\Leftrightarrow\int_1^2 e^x dx>4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

Άρα $2\int_1^2 e^n dn>5\Leftrightarrow 2\int_1^2 e^n dn-5>0$ οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(6\int_1^2 E(k)dk-1\right)x^{2023}-x^{2022}+1}{\left(2\int_1^2 e^n dn-5\right)\cdot x^{2022}-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(6\int_1^2 E(k)dk-1\right)x^{2023}}{\left(2\int_1^2 e^n dn-5\right)\cdot x^{2022}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(6\int_1^2 E(k)dk-1\right)}{\left(2\int_1^2 e^n dn-5\right)}x=+\infty$$

2ος τρόπος

$$2\int_1^2 e^n dn-5=2\left[e^n\right]_1^2-5=2e^2-2-5=2e^2-7>0 \text{ αφού } e>2{,}5\Leftrightarrow e^2>6{,}25\Leftrightarrow 2e^2>13\Leftrightarrow 2e^2-7>6>0$$