Ν. Ζ. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗΣ

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο 0 $(α, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, β)$ τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 5

Α2. Πότε η ευθεία $y = λx + β$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 2

Α3. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g. Με τη βοήθεια του πίνακα:

x	f(x)	g(x)	f΄(x)	g΄(x)
0	1	1	1	-1
1	-1	1	2	1

να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων, με την προϋπόθεση ότι αυτές ορίζονται.

α) $F(x) = f^3(x)$, στο $x_0 = 1$

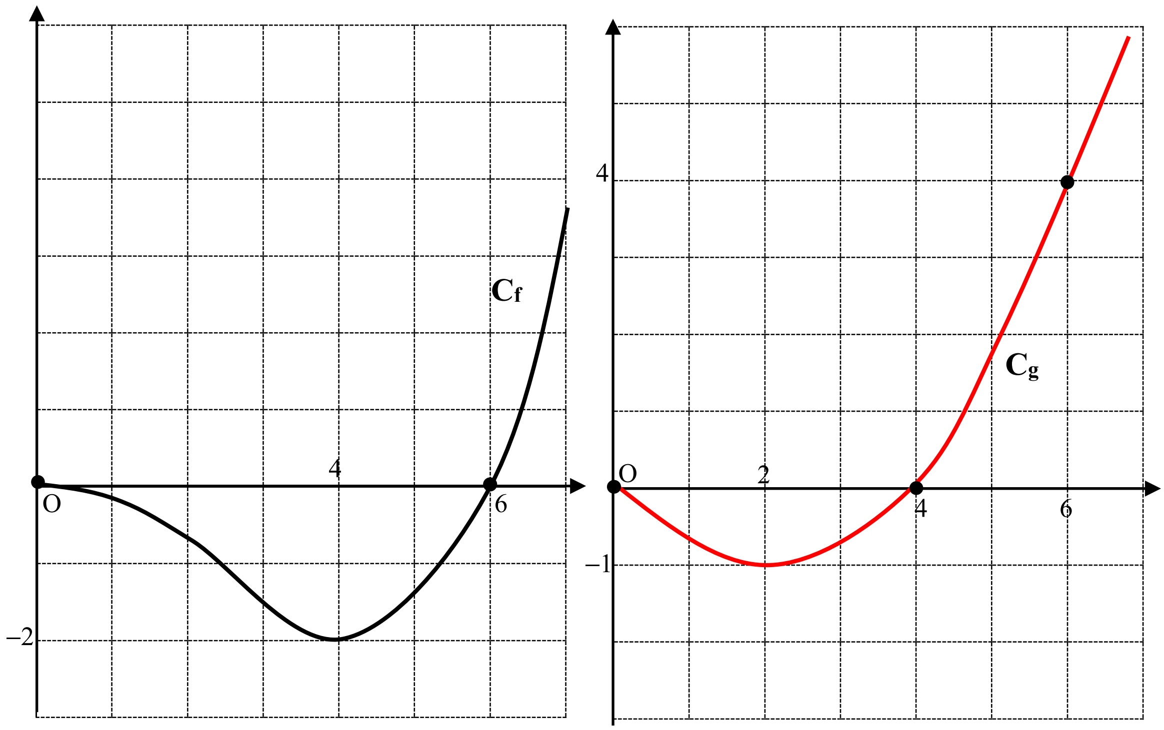
β) $G(x) = f(g(x^2))$ στο $x_0 = 1$

γ) $H(x) = e^{f^2(g(x))}$ στο $x_0 = 0$

δ) $P(x) = \ln\sqrt{|f(g^2(x))|}$ στο $x_0 = 0$

Μονάδες 8

Α4. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g στο διάστημα [0, 7]



α) Να δικαιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g είναι η παράγωγος της f στο [0, 7].

β) Η εφαπτομένη της C_f στο x = 6 είναι:

Α. y = 4x + 24   Β. y = 4x + 20   Γ. y = 4x – 24

Δ. y = 4x – 20   Ε. y = 4x

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να σημειώσετε το σημείο καμπής.

δ) Το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_g και τον άξονα x΄x είναι:

Α. 1   Β. 2   Γ. 3   Δ. 4   Ε. 5

ε) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{e^x\cdot f(x)+2e^4}{x-4}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 6\ln x - 2x^3 - 3,\ x > 0$

Β1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία (μονάδες 2) και τα ακρότατα (μονάδες 2) και να βρείτε το πρόσημο των τιμών της g (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $f(x) = x+\frac{3\ln x}{2x^2},\ x > 0$

Β2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f (μονάδες 4) και να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3},\ x > 0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3) και να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Β4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \frac{x^2}{2}-\frac{3\ln x+3}{2x},\ x > 0$ είναι μια παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2-x\cdot\ln\sqrt{x}, & x>0 \\ \beta, & x=0 \end{cases}$

Γ1. Να βρείτε την τιμή του β.

Μονάδες 3

Για β = 2

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 3) και τα ακρότατα (μονάδες 3)

Μονάδες 6

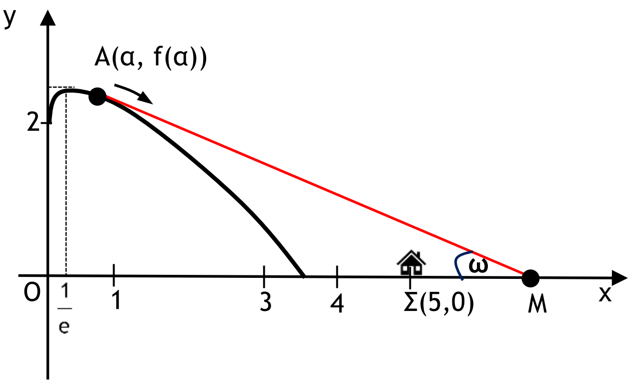
Γ3. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (e, 4)$

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της, εκτός από το σημείο επαφής.

Μονάδες 4

Γ5. Ένα αυτοκίνητο $A(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > \frac{1}{e}$ κατεβαίνει την πλαγιά ενός λόφου του οποίου η κορυφογραμμή περιγράφεται από τη



συνάρτηση $f(x) = 2 - x \cdot \ln\sqrt{x}$, με $\frac{1}{e} < x < x_0$, όπου x_0 το σημείο του Γ2 ερωτήματος. Οι προβολείς του φωτίζουν κατευθείαν μπροστά και η φωτεινή ακτίνα τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο M.
Αν $\alpha'(t) = 2\alpha(t)$, $t \geq 0$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\omega = O\hat{M}A$ που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A με τον ημιάξονα Ox, τη χρονική στιγμή που η φωτεινή ακτίνα διέρχεται από το σπίτι Σ(5, 0).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, με

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$, $e^x \cdot f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f''(x) = 2f^3(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $(f'(x))^2 = f^4(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία (μονάδες 2), την κυρτότητα (μονάδες 2), να βρείτε το σημείο καμπής (μονάδες 2) και το σύνολο τιμών της f (μονάδες 2).

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη (μονάδες 2). Αν η f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε την $(f^{-1})'(0)$ (μονάδες 3) και στη συνέχεια ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων (μονάδες 2).

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\sqrt{f^4(x)+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

Δ5. Αν επιπλέον η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι

$(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$ (μονάδες 2) και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$I = \int_0^1 f^3(x)dx$, αν είναι γνωστό ότι $f(1) = 1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 4

Είναι ένα αρκετά μεγάλο διαγώνισμα, που έχει στόχο την ευρύτερη δυνατή επανάληψη, ακόμα και στα «σκοτεινά σημεία». Καλή και αποτελεσματική προσπάθεια.

Ν. Ζ. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ν. Ζ. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α3.

α) $F'(x) = 3f^2(x)\cdot f'(x)$, άρα $F'(1) = 3f^2(1)\cdot f'(1) = 3(-1)^2\cdot 2 = 6$

β) $G'(x) = f'(g(x^2))\cdot g'(x^2)\cdot 2x$, άρα

$G'(1) = f'(g(1^2))\cdot g'(1^2)\cdot 2\cdot 1 = f'(g(1))\cdot g'(1)\cdot 2 = f'(1)\cdot 1\cdot 2 = 2\cdot 2 = 4$

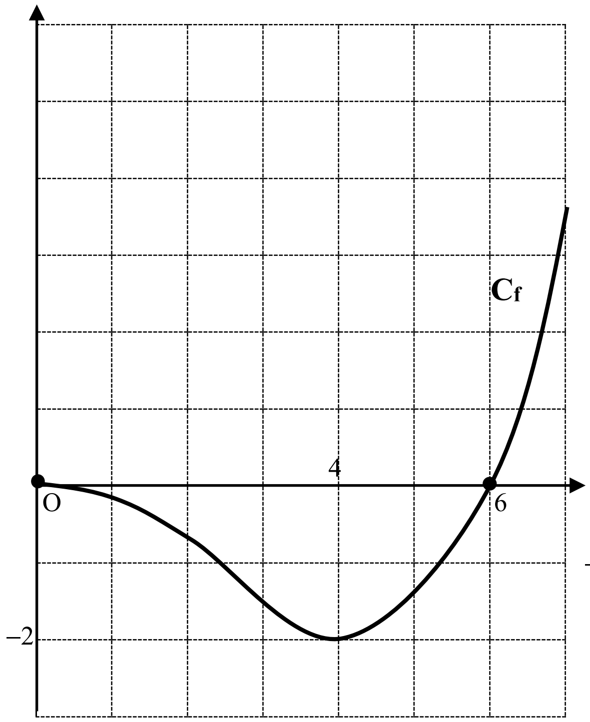
γ) $H'(x) = e^{f^2(g(x))}\cdot 2f(g(x))\cdot f'(g(x))\cdot g'(x)$, άρα

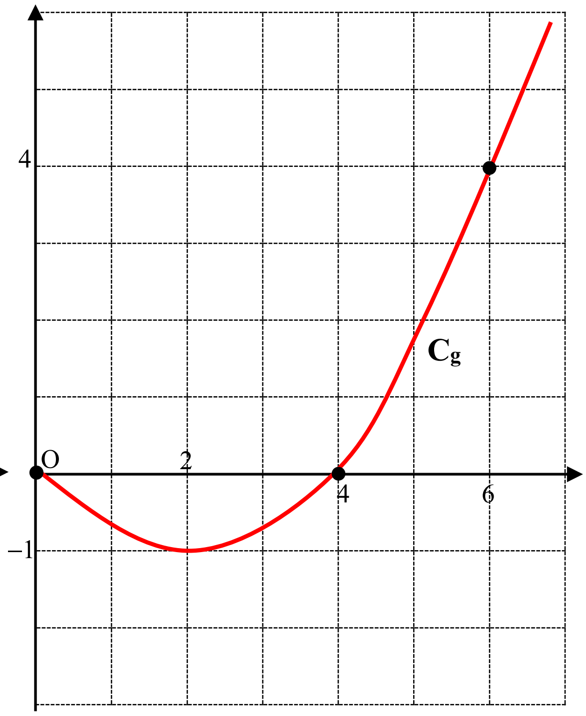
$H'(0) = e^{f^2(g(0))}\cdot 2f(g(0))\cdot f'(g(0))\cdot g'(0) = e^{f^2(1)}\cdot 2f(1)\cdot f'(1)\cdot(-1) =$
$e^{(-1)^2}\cdot 2(-1)\cdot 2\cdot(-1) = 4e$

δ) $P'(x) = \left(\ln\sqrt{|f(g^2(x))|}\right)' = \left(\frac{1}{2}\cdot\ln|f(g^2(x))|\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{f(g^2(x))}\cdot[f(g^2(x))]' =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{f(g^2(x))}\cdot f'(g^2(x))\cdot 2g(x)\cdot g'(x) = \frac{f'(g^2(x))\cdot g(x)\cdot g'(x)}{f(g^2(x))}$, άρα

$P'(0) = \frac{f'(g^2(0))\cdot g(0)\cdot g'(0)}{f(g^2(0))} = \frac{f'(1)\cdot 1\cdot(-1)}{f(1)} = \frac{2\cdot(-1)}{-1} = 2.$





A4.

α) Παρατηρούμε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 4)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0, 4], ενώ $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (4, 7)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο [4, 7).
Στο x = 4 η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(4) = -2$ και $f'(4) = 0$

β) Έχουμε $f(6) = 0$ και $f'(6) = 4$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α(6, f(6) είναι $y - 0 = 4(x - 6) \Leftrightarrow y = 4x - 24$, άρα η απάντηση είναι το Γ.

γ) Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [0, 2], άρα η f είναι κοίλη στο [0, 2] και στο διάστημα [2, 7] η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι κυρτή στο [2, 7]. Στο x = 2 η f' παρουσιάζει ελάχιστο, οπότε $f''(2) = 0$ και επιπλέον εκατέρωθεν του $x_0 = 2$ η C_f αλλάζει κυρτότητα, άρα το σημείο Σ(2, f(2)) είναι σημείο καμπής της C_f.

δ) Είναι $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [0, 4]$ και η g είναι συνεχής, άρα

$$E(\Omega) = \int_0^4 |g(x)|dx = -\int_0^4 g(x)dx = -\int_0^4 f'(x)dx = -\left[f(x)\right]_0^4 = f(0) - f(4) = 0 - (-2) = 2$$

Επομένως η απάντηση είναι το Β

ε) Γνωρίζουμε ότι $f'(4) = 0$, οπότε

$$f'(4) = \lim_{x\to 4}\frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \Leftrightarrow \lim_{x\to 4}\frac{f(x) + 2}{x - 4} = 0$$

Τότε $\lim_{x\to 4}\frac{e^x f(x) + 2e^4}{x - 4} = \lim_{x\to 4}\frac{e^x f(x) \mathbf{+ 2e^x - 2e^x} + 2e^4}{x - 4} = \lim_{x\to 4}\frac{e^x(f(x) + 2) - 2(e^x - e^4)}{x - 4}$

$$= \lim_{x\to 4}\left(e^x \cdot \frac{f(x)+2}{x-4} - 2\cdot \frac{e^x - e^4}{x-4} \right)$$

Έχουμε $\lim_{x\to 4}\left(e^x \cdot \frac{f(x)+2}{x-4} \right) = e^4 \cdot 0 = 0$ και

$$\lim_{x\to 4}\left(2\cdot \frac{e^x - e^4}{x-4} \right) = 2\cdot \lim_{x\to 4}\frac{e^x - e^4}{x-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 2\cdot \lim_{x\to 4}\frac{e^x}{1} = 2e^4$$

Επομένως $\lim_{x\to 4}\frac{e^x f(x) + 2e^4}{x-4} = 0 - 2e^4 = -2e^4$

→ *Εναλλακτικά:*

Η f είναι συνεχής στο x = 4, οπότε $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4) = -2$ και η f΄ είναι συνεχής στο x = 4, οπότε $\lim_{x\to 4} f'(x) = f'(4) = 0$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 4}\frac{e^x f(x) + 2e^4}{x-4} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 4}\frac{e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x)}{1} = \lim_{x\to 4}[e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x)] = e^4 f(4) + e^4 f'(4)$$

$= e^4\cdot(-2) + e^4\cdot 0 = -2e^4$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η g είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με $g'(x) = \frac{6}{x} - 6x^2$

• $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{x} - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 6 - 6x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

• $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{6}{x} - 6x^2 > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 6 - 6x^3 > 0 \Leftrightarrow 6x^3 < 6 \Leftrightarrow x < 1$

Σημειώνουμε τον πίνακα μονοτονίας:

x	0	1	+∞
g΄(x)	+		–
g(x)	$\nearrow$		$\searrow$

Επομένως η g είναι:

• συνεχής στο (0, 1] και $g'(x) > 0$ για κάθε $x\in(0, 1)$, άρα είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0, 1] και

• συνεχής στο [1, +∞) και $g'(x) < 0$ για κάθε $x\in(1, +\infty)$, άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο [1, +∞)

• Στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο του οποίου η τιμή είναι

$g(1) = -5$

• Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x\in(0, +\infty)$ ισχύει $g(x) \le g(1) \Leftrightarrow g(x) \le -5$, άρα η g παίρνει αρνητικές τιμές.

Β2. Η f ορίζεται στο διάστημα (0, +∞), επομένως αναζητούμε:

• Κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x + \frac{3\ln x}{2x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(x + 3\cdot\frac{1}{2x^2}\cdot\ln x\right) = 0 + 3\cdot(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty,$$

άρα η ευθεία με εξίσωση x = 0, δηλαδή ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

• Πλάγια ασύμπτωτη στο +∞. Έχουμε:

$$f(x) = x + \frac{3\ln x}{2x^2} \Leftrightarrow f(x) - x = \frac{3\ln x}{2x^2}$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{2x^2} \underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot\frac{1}{x}}{4x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{4x^2} = 0$$

Επομένως σύμφωνα με τον ορισμό της ασύμπτωτης, έχουμε ότι η ευθεία με εξίσωση y = x είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο +∞.

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με:

$$f'(x) = \left(x + \frac{3\ln x}{2x^2}\right)' = 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x\cdot 2x}{x^4} = 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{x - 2x\cdot\ln x}{x^4} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{x(1+2\cdot\ln x)}{x^4} = 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1-2\cdot\ln x}{x^3} = 1 + \frac{3-6\cdot\ln x}{2x^3} = \frac{2x^3+3-6\cdot\ln x}{2x^3} =$$

$$= -\frac{6\cdot\ln x - 2x^3 - 3}{2x^3} = -\frac{g(x)}{2x^3}.$$

Β3. Από Β1 έχουμε ότι g΄(x) < 0 για κάθε x∈(0, +∞), άρα $f'(x) = -\frac{g(x)}{2x^3} > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞).

Αν Δ = (0, +∞), τότε το σύνολο τιμών είναι $f(\Delta) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$

Από το Β2, έχουμε $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{3\ln x}{2x^2}\right)$, όπου

$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{2x^2} = 0$, άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι f(Δ) = ℝ.

Β4. Η F είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3\ln x + 3}{2x}\right)' = x - \frac{\frac{3}{x}\cdot 2x - (3\ln x + 3)\cdot 2}{4x^2} = x - \frac{6 - 6\ln x - 6}{4x^2} =$$

$= x + \dfrac{3\ln x}{2x^2} = f(x)$, άρα η F είναι μια παράγουσα της f στο (0, +∞).

Β5. Η f είναι συνεχής στο [1, e] και γνησίως αύξουσα, οπότε για x > 1 ισχύει

$f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 1$, δηλαδή η f παίρνει θετικές τιμές στο διάστημα [1, e] επομένως

$$E(\Omega) = \int_1^e f(x)dx = \left[F(x)\right]_1^e = F(e) - F(1) = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{e} + 1 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, οπότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ (1)

Είναι

- f(0) = β και
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(2 - x\ln\sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2 - x\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln x\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2 - \frac{1}{2}\cdot x\cdot\ln x\right) =$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2 - \frac{1}{2}\cdot x\cdot\ln x\right) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 2$

Από την (1) προκύπτει ότι β = 2.

Άρα ο τύπος της f είναι $f(x) = \begin{cases} 2 - x\cdot\ln\sqrt{x}, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με

$$f'(x) = (2 - x\ln\sqrt{x})' = \left(2 - x\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln x\right)' = \left(2 - \frac{1}{2}\cdot x\cdot\ln x\right)' = -\frac{1}{2}(\ln x + 1) = -\frac{1 + \ln x}{2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1+\ln x}{2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1+\ln x}{2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+\ln x}{2} < 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{e}$

Σημειώνουμε τον πίνακα μονοτονίας:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	↗		↘

Επομένως

• Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{1}{e}]$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \frac{1}{e})$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{1}{e}]$ και η f είναι συνεχής στο $[\frac{1}{e}, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{1}{e}, +\infty)$.

• Στο σημείο με τετμημένη $x_0 = \frac{1}{e}$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο του οποίου η τιμή είναι

$f(e) = 2 + \dfrac{1}{2e}$.

Γ3. Έστω $\Delta_1 = (0, \frac{1}{e})$, η f είναι συνεχής στο Δ_1 και γνησίως αύξουσα, άρα

$f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to \frac{1}{e}} f(x)\right)$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 2$ και $\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}} f(x) = f\left(\dfrac{1}{e}\right) = 2 + \dfrac{1}{2e}$

Οπότε $f(\Delta_1) = \left(2, 2 + \dfrac{1}{2e}\right)$ και επειδή το $0 \notin f(\Delta_1)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο Δ_1 ή η C_f δεν τέμνει τον άξονα x΄x στο διάστημα Δ_1.

Έστω $\Delta_2 = [\frac{1}{e}, +\infty)$, η f είναι συνεχής στο Δ_2 και γνησίως φθίνουσα, άρα

$f(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), f\left(\dfrac{1}{e}\right)\right]$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2 - x\ln\sqrt{x}) = -\infty$ και $f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 + \frac{1}{2e}$

Οπότε $f(\Delta_2) = (-\infty,\ 2 + \frac{1}{2e}]$ και επειδή το $0 \in f(\Delta_2)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο Δ_2 και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 η ρίζα αυτή είναι μοναδική. Επομένως η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα ακριβώς σημείο στο διάστημα Δ_2.

Μένει να δείξουμε ότι το σημείο αυτό ανήκει στο διάστημα (e, 4). Έχουμε:

$f(e) = 2 - \frac{e}{2} > 0$ και $f(4) = 2(1 - \ln4) < 0$ γιατί $e < 4$ και η lnx γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, οπότε $\ln e < \ln4 \Leftrightarrow 1 < \ln4 \Leftrightarrow 1 - \ln4 < 0$

Άρα η f είναι συνεχής στο [e, 4], $f(e)\cdot f(4) < 0$ επομένως σύμφωνα με το θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (e, 4)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

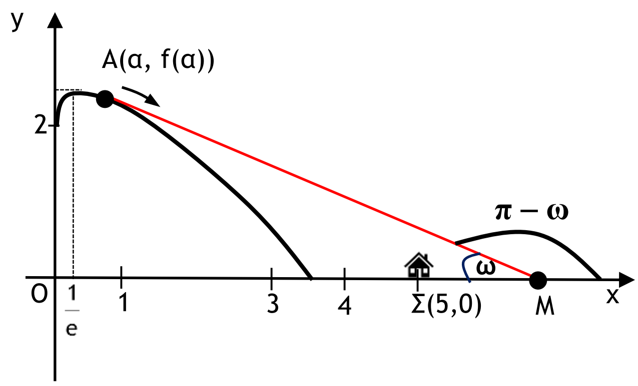
Συμπέρασμα: η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα ακριβώς σημείο $x_0 \in (e, 4)$.

Γ4. Η $f'(x) = -\frac{1+\ln x}{2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$f''(x) = \left(-\frac{1+\ln x}{2}\right)' = -\frac{1}{2x} < 0$ για κάθε $x > 0$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι η C_f βρίσκεται κάτω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της, εκτός από το σημείο επαφής.

Γ5. Η εφαπτομένη στο σημείο Α(α, f(α)) τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Μ και η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα x΄x είναι η γωνία $\hat{AMx}$ που είναι η γωνία π – ω.



Δηλαδή είναι $\hat{AMx} = \pi - \omega$

Γνωρίζουμε ότι:

$f'(\alpha) = \varepsilon\varphi(\pi - \omega) \Leftrightarrow f'(\alpha) = -\varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -f'(\alpha)$ (1), όπου $f'(\alpha) = -\frac{1+\ln\alpha}{2}$

επομένως από την (1) έχουμε εφω = $\frac{1+\ln\alpha}{2}$

Την τυχαία χρονική στιγμή t ≥ 0 είναι εφω(t) = $\frac{1+\ln\alpha(t)}{2}$

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη:

$(\text{εφω}(t))' = \left(\frac{1+\ln\alpha(t)}{2}\right)'$ ή $\frac{1}{\text{συν}^2\omega(t)}\cdot\omega'(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ ή

$(1+\text{εφ}^2\omega(t))\cdot\omega'(t) = \frac{\alpha'(t)}{2\alpha(t)}$ (2)

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α(α, f(α)) είναι:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

όπου f(α) = $2-\alpha\cdot\ln\sqrt{\alpha} = 2-\alpha\cdot\frac{1}{2}\ln\alpha = 2-\frac{\alpha\cdot\ln\alpha}{2}$ και f΄(α) = $-\frac{1+\ln\alpha}{2}$

Οπότε:

$y-\left(2-\frac{\alpha\cdot\ln\alpha}{2}\right) = -\frac{1+\ln\alpha}{2}(x-\alpha) \Leftrightarrow y-2+\frac{\alpha\cdot\ln\alpha}{2} = -\frac{1+\ln\alpha}{2}\cdot x+\frac{\alpha+\alpha\ln\alpha}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1+\ln\alpha}{2}\cdot x+\frac{\alpha+\alpha\ln\alpha}{2}-\frac{\alpha\ln\alpha}{2}+2 \Leftrightarrow y = -\frac{1+\ln\alpha}{2}\cdot x+\frac{\alpha}{2}+2$

Τη χρονική στιγμή t_0 η φωτεινή ακτίνα διέρχεται από το σπίτι Σ(5, 0), άρα ισχύει:

$0 = -\frac{1+\ln\alpha}{2}\cdot 5+\frac{\alpha}{2}+2 \Leftrightarrow -5-5\ln\alpha+\alpha+4 = 0 \Leftrightarrow -5\ln\alpha+\alpha-1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\ln\alpha-\alpha+1 = 0.$

• Η εξίσωση 5lnα – α + 1 = 0 έχει προφανή ρίζα την α = 1 και θεωρούμε τη συνάρτηση h(α) = 5lnα – α + 1, $\alpha\in\left(\frac{1}{e}, x_0\right)$, είναι παραγωγίσιμη με h΄(α) = $\frac{5}{\alpha}-1 = \frac{5-\alpha}{\alpha}$

Είναι το α < x_0, όπου x_0 < 4, άρα α < 4 επομένως 5 – α > 0, άρα h΄(α) > 0 και η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{1}{e}, x_0\right)$, οπότε η ρίζα α = 1 είναι μοναδική.

Επομένως τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$\alpha(t_0) = 1$ άρα $\alpha'(t_0) = 2\alpha(t_0) = 2$ και εφω(t_0) = $\frac{1+\ln\alpha(t_0)}{2} \Leftrightarrow$ εφω(t_0) = $\frac{1}{2}$

οπότε από την (2) τη χρονική στιγμή t_0 προκύπτει:

$$(1+\varepsilon\varphi^2\omega(t_0))\cdot\omega'(t_0)=\frac{\alpha'(t_0)}{2\alpha(t_0)} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\omega'(t_0)=\frac{2}{2\cdot 1} \Leftrightarrow \frac{5}{4}\cdot\omega'(t_0)=1 \Leftrightarrow \omega'(t_0)=\frac{4}{5}$$

ΘΕΜΑ Δ

Από την υπόθεση έχουμε:

• $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1$. Έστω $g(x)=\frac{f(x)}{\eta\mu x}$, τότε $f(x)=g(x)\cdot\eta\mu x$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}[g(x)\cdot\eta\mu x]=1\cdot 0=0$

Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής, άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, επομένως $f(0) = 0$.

• Επίσης για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^x\cdot f(x)\geq x \Leftrightarrow e^x\cdot f(x)-x\geq 0$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x\cdot f(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$ με $h(0) = 0$, άρα η (1) γράφεται:

$h(x)\geq h(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

○ Το $x = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$

○ Στο $x = 0$ η h παρουσιάζει ελάχιστο

○ Είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=e^x\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x)-1$

Άρα σύμφωνα με το θ. Fermat $h'(0) = 0$

$$h'(0)=0 \Leftrightarrow e^0\cdot f(0)+e^0\cdot f'(0)-1=0 \Leftrightarrow f'(0)=1$$

Δ1. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της υπόθεσης με $2f'(x)$ και έχουμε:

$$f''(x)=2f^3(x) \Leftrightarrow 2f'(x)f''(x)=4f^3(x)\cdot f'(x) \Leftrightarrow [(f'(x))^2]'=[f^4(x)]',$$

άρα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $(f'(x))^2=f^4(x)+c$

Για $x = 0$, έχουμε $(f'(0))^2=f^4(0)+c \Leftrightarrow 1=c$, άρα

$$(f'(x))^2=f^4(x)+1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Δ2. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ με $f'(x_0)=0$, τότε από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $(f'(x_0))^2=f^4(x_0)+1 \Leftrightarrow 0=f^4(x_0)+1$, άτοπο. Άρα $f'(x)\neq 0$ και η f' είναι συνεχής αφού είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, άρα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον $f'(0)=1>0$, άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και f(0) = 0, οπότε:

• Για x < 0 ισχύει $f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow f^3(x) < 0 \Leftrightarrow 2f^3(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$.

• Για x > 0 ισχύει $f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow f^3(x) > 0 \Leftrightarrow 2f^3(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$ και η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ άρα η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$

Επιπλέον για x = 0 από την υπόθεση έχουμε $f''(0) = 2f^3(0) \Leftrightarrow f''(0) = 0$ και η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x = 0, άρα το σημείο Ο(0, 0) είναι σημείο καμπής.

• Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της είναι:

$f(\mathbb{R}) = (\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x))$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Ο(0, 0) είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, άρα η C_f βρίσκεται κάτω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής, άρα f(x) < x για κάθε x < 0 και $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, άρα $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής, άρα f(x) > x για κάθε x > 0 και $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Δ3. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1 – 1, άρα είναι αντιστρέψιμη με πεδίο ορισμού το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Επίσης έχουμε ότι $f(0) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 0$.

• Αφού η f^{-1} είναι συνεχής ισχύει $\lim_{x\to0} f^{-1}(x) = f^{-1}(0) = 0$

• Αρκεί να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x\to0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0} \frac{f^{-1}(x)}{x}$

Θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u)$ και $\lim_{x\to0} u = \lim_{x\to0} f^{-1}(x) = 0$

Οπότε:

$$\lim_{x\to0} \frac{f^{-1}(x)}{x} = \lim_{u\to0} \frac{u}{f(u)} = \lim_{u\to0} \frac{1}{\frac{f(u)}{u}} = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

Άρα η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο x = 0 με $(f^{-1})'(0) = 1$.

• Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο O(0, 0) είναι:

$$y - f^{-1}(0) = (f^{-1})'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} στην αρχή των αξόνων έχουν κοινή εφαπτομένη την $y = x$.

Δ4. Από το Δ1 ερώτημα έχουμε $(f'(x))^2 = f^4(x) + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και από το Δ2 ερώτημα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f'(x) = \sqrt{f^4(x)+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ5. Γνωρίζουμε ότι $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f^{-1} παραγωγίσιμη, άρα

$$[f(f^{-1}(x))]' = x' \text{ ή } f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \quad (2)$$

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$f'(f^{-1}(x)) = \sqrt{f^4(f^{-1}(x))+1} \Leftrightarrow f'(f^{-1}(x)) = \sqrt{[f(f^{-1}(x))]^4+1} \Leftrightarrow f'(f^{-1}(x)) = \sqrt{x^4+1}$$

Αντικαθιστούμε στη (2) οπότε:

$$\sqrt{x^4+1} \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Από την υπόθεση έχουμε $f''(x) = 2f^3(x)$, οπότε:

$$\int_0^1 2f^3(x)dx = \int_0^1 f''(x)dx \Leftrightarrow 2 \cdot \int_0^1 f^3(x)dx = \left[f'(x)\right]_0^1 \Leftrightarrow 2 \cdot \int_0^1 f^3(x)dx = f'(1) - f'(0)$$

Είναι $f'(0) = 1$ και $f'(1) = \sqrt{f^4(1)+1} = \sqrt{2}$, άρα

$$2 \cdot \int_0^1 f^3(x)dx = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f^3(x)dx = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$