ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x,\ \alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\left(\alpha^x\right)'=\alpha^x\ln\alpha$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να γράψετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή ή Λανθασμένη καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν δύο συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και το ίδιο σύνολο τιμών, τότε είναι υποχρεωτικά ίσες.

ii) Μια συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, παίρνει κατ' ανάγκη τιμές μόνο από τα διαστήματα $[f(\alpha), f(\beta)]$ ή $[f(\beta), f(\alpha)]$.

iii) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει μοναδικό ακρότατο, τότε υποχρεωτικά η f έχει ένα μοναδικό κρίσιμο σημείο.

iv) Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο σύνολο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ δεν εξαρτάται από τα άκρα α και β.

v) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ με $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-f'(2)\ln x,\quad x>0$.

Β1. Να βρείτε την τιμή $f'(2)$.

Μονάδες 2

Δίνεται $f'(2)=4$.

Β2. **i)** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 3

Β3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+f(2022)=f(2023)$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(2022,\ 2023)$.

Μονάδες 5

Β4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g:\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\to\mathbb{R}$ που η γραφική της παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $x=0$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g\circ\frac{1}{f}$.

Μονάδες 4

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu(\pi x)\cdot f(x)\cdot\left(g\circ\frac{1}{f}\right)(x)\right]$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$ με $x\in(0,1]$ και η ευθεία $\varepsilon: y=-x+\kappa,\ \kappa>2$.

Γ1. **i)** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι είναι κυρτή.

Μονάδες 3

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 4

Δίνεται $f^{-1}(x) = x - \sqrt{x^2 - 1},\ x \geq 1$

Γ2. **i)** Να αποδείξετε ότι η ε τέμνει την f σε μοναδικό σημείο A και την f^{-1} σε σημείο B που είναι συμμετρικό του A ως προς την $y = x$.

Μονάδες 4

ii) Να σχεδιάσετε τις συναρτήσεις f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Μονάδες 2

Γ3. Δίνεται η χρονική στιγμή t_0 που το σημείο A έχει τετμημένη $\frac{1}{5}$.

i) Αν το κ αυξάνεται με ρυθμό 11 μονάδες ανά δευτερόλεπτο, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης $d = AB$ την χρονική στιγμή t_0.

Μονάδες 6

ii) Να βρείτε, κατά την χρονική στιγμή t_0, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f^{-1}, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $y = x$ και $x = x_B$, όπου x_B η τετμημένη του σημείου B.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 2x^2 - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε μοναδική θέση $x=\alpha$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\kappa>\alpha$ τέτοιο ώστε η f να ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,\kappa]$.

Μονάδες 4

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x)-g'(x)=\int_0^{\kappa} f'(x)g'(x)dx \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Δ4. **i)** Να αποδείξετε ότι η g είναι παράγουσα της f.

Μονάδες 5

ii) Αν $g(\kappa)=2\kappa$, να αποδείξετε ότι:

$$g\left(\int_0^{\kappa} g(x)dx\right)-\int_0^{\kappa} f(\alpha)g(x)dx>g(0)$$

Μονάδες 7

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ΩΡΕΣ

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΣΑΤΣΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ - ΝΑΥΠΑΚΤΟΣ 2023

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. – Α2 – Α3

Θεωρία.

Α4.

i) Λ **ii)** Λ **iii)** Λ **iv)** Σ **v)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Είναι $f'(x) = 2x + 2 - \dfrac{f'(2)}{x}, \quad x > 0$.

Επομένως : $f'(2) = 4 + 2 - \dfrac{f'(2)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad f'(2) = 4$.

Β2. i)

- Είναι $f'(x) = \ldots = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x}, \;\; x > 0$.

x	0		1	$+\infty$
f'		$-$		$+$
f		$\searrow$		$\nearrow$

- Η f παρουσιάζει Ο.Ε το $f(1) = 3$.

- $f''(x) = 2 + \dfrac{4}{x^2} > 0, \;\; x > 0$, άρα f κυρτή.

B2. ii) Έστω $\Delta_1 = (0,1)$. Είναι $f(\Delta_1) = \ldots = (3,+\infty)$.

Έστω $\Delta_2 = [1,+\infty)$. Είναι $f(\Delta_2) = \ldots = [3,+\infty)$.

Επομένως $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [3,+\infty)$.

B3. Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα $[2022,2023]$ επομένως υπάρχει $\xi \in (2022,2023)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(2023) - f(2022)}{2023 - 2022}$

Η εξίσωση γίνεται:

$$f'(x) + f(2022) = f(2023)$$

$$f'(x) = f(2023) - f(2022)$$

$$f'(x) = \frac{f(2023) - f(2022)}{2023 - 2022}$$

$$f'(x) = f'(\xi)$$

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$, οπότε $x = \xi$, που είναι και η λύση της εξίσωσης.

B4. i) Το πεδίο ορισμού της $g \circ \frac{1}{f}$ είναι:

$D_{g\circ\frac{1}{f}} = \left\{ x \in D_f \ / \ f(x) \neq 0 \ \text{ με } \ \dfrac{1}{f(x)} \in D_g \right\} = (0,1) \cup (1,+\infty)$, λόγω της παρακάτω συναλήθευσης:

- $x > 0$,
- $f(x) \neq 0$, που ισχύει αφού $f(x) \geq 3$,
- $\dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{3} \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x) > 3 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Β4. ii)

Αφού η g εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $x=0$, ισχύουν $g(0)=0$ και $g'(0)=0$.

Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot\left(g\circ\frac{1}{f}\right)(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot g\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right]\overset{u=\frac{1}{f(x)}}{=}$$

$$\lim_{u\to0}\frac{g(u)}{u}=\lim_{u\to0}\frac{g(u)-g(0)}{u-0}=g'(0)=0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2x-4\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{2}{x}-4\frac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\overset{DLH}{=}\ldots=0$

Ισχύει όμως:

$$\left|\eta\mu(\pi x)\cdot f(x)\cdot\left(g\circ\frac{1}{f}\right)(x)\right|\le\left|f(x)\cdot\left(g\circ\frac{1}{f}\right)(x)\right|$$

$$-\left|f(x)\cdot\left(g\circ\frac{1}{f}\right)(x)\right|\le\eta\mu(\pi x)\cdot f(x)\cdot\left(g\circ\frac{1}{f}\right)(x)\le\left|f(x)\cdot\left(g\circ\frac{1}{f}\right)(x)\right|$$

Επομένως από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\eta\mu(\pi x)\cdot f(x)\cdot\left(g\circ\frac{1}{f}\right)(x)\right]=0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i)

- Είναι $f'(x) = \ldots = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2} < 0$ για $x \in (0,1)$.

Επομένως f γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

- Είναι $f''(x) = \ldots = \dfrac{1}{x^3} > 0$ για $x \in (0,1)$. Άρα f κυρτή.

Γ1. ii)

Είναι :

$$\begin{aligned} & y = f(x) \\ \Leftrightarrow\ & y = \frac{x^2+1}{2x} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 1 = 2xy \\ \overset{+y^2}{\Leftrightarrow}\ & x^2 - 2xy + y^2 = y^2 - 1 \\ \Leftrightarrow\ & (x-y)^2 = y^2 - 1 \\ \Leftrightarrow\ & |x-y| = \sqrt{y^2-1} \end{aligned}$$

Όμως έχουμε:

$$0 < x \le 1 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x) \ge 1 \Rightarrow y \ge 1 \overset{x\le 1}{\Rightarrow} x \le y \Rightarrow |x-y| = y - x.$$

Επομένως:

$$|x-y| = \sqrt{y^2-1} \Rightarrow x = y - \sqrt{y^2-1},\ y \ge 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - \sqrt{x^2-1},\ x \ge 1.$$

Γ2. i)

- Τα σημεία τομής της f με την ε δίνονται από την εξίσωση:

$$
\begin{aligned}
& f(x) = -x + \kappa \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2+1}{2x} = -x + \kappa \\
\Leftrightarrow\ & \frac{3x}{2} + \frac{1}{2x} - \kappa = 0
\end{aligned}
$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{3x}{2} + \frac{1}{2x} - \kappa,\ \ x \in (0,1]$.

$\varphi'(x) = \ldots = \frac{3x^2-1}{2x^2},\quad x \in (0,1)$.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
φ'	$-$		$+$
φ	$\searrow$		$\nearrow$

- Έστω $\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Είναι $\varphi(\Delta_1) = \ldots = \left(\sqrt{3} - \kappa, +\infty\right)$.

Όμως $\kappa > 2 = \sqrt{4} > \sqrt{3} \ \Rightarrow\ \sqrt{3} - \kappa < 0$.

Επομένως $0 \in \varphi(\Delta_1)$ άρα υπάρχει μοναδικό, λόγω μονοτονίας, $\alpha \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $\varphi(\alpha) = 0$.

- Έστω $\Delta_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$.

Είναι $\varphi(\Delta_2) = \left[\sqrt{3} - \kappa,\ 2 - \kappa\right]$.

Όμως $\sqrt{3} - \kappa < 0$ και $2 - \kappa < 0$, οπότε $0 \notin \varphi(\Delta_2)$, επομένως η φ, άρα και η αρχική εξίσωση έχουν την μοναδική λύση α που ανήκει στο $\Delta_1 \subset (0,1]$.

- Το σημείο τομής της f με την ε είναι το $A(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha \in (0,1)$, οπότε ισχύει

$$f(\alpha) = -\alpha + \kappa.$$

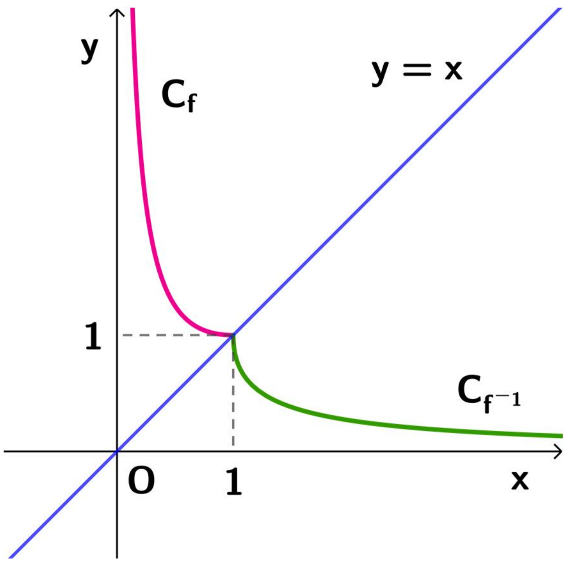
Θα δείξουμε ότι το συμμετρικό του A ως προς την $y = x$, δηλαδή το $B(f(\alpha), \alpha)$, ανήκει επίσης στην ευθεία ε.

Πράγματι αντικαθιστώντας στην ε τις συντεταγμένες του B έχουμε:

$$\alpha = -f(\alpha) + \kappa \iff f(\alpha) = -\alpha + \kappa, \quad \text{που ισχύει.}$$

Γ2. ii)

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή με ελάχιστο το $f(1) = 1$ και επιπλέον έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον $y'y$ αφού $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Λαμβάνοντας υπόψιν και την συμμετρία των των C_f και $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία $y = x$, έχουμε:



Γ3. i)

Ισχύει ότι $\kappa'(t) = 11$ μ.μ / μ.χ και την χρονική t_0 είναι $\alpha(t_0) = \dfrac{1}{5}$.

Είναι:

$$d = AB = \sqrt{\left[f(\alpha) - \alpha\right]^2 + \left[\alpha - f(\alpha)\right]^2} = |f(\alpha) - \alpha|\sqrt{2} \overset{f(x) \geq x}{=} (f(\alpha) - \alpha)\sqrt{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{2}.$$

Άρα ως συνάρτηση του χρόνου t η απόσταση $d = AB$ είναι:

$d(t) = \left(\dfrac{1}{2\alpha(t)} - \dfrac{\alpha(t)}{2} \right)\sqrt{2}$, οπότε με παραγώγιση έχουμε:

$$d'(t) = \left(-\frac{\alpha'(t)}{2\alpha^2(t)} - \frac{\alpha'(t)}{2} \right)\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha'(t)\left(\frac{1}{\alpha^2(t)} + 1 \right)$$

Όμως από τη σχέση $f(\alpha) = -\alpha + \kappa \Leftrightarrow \dfrac{3\alpha}{2} + \dfrac{1}{2\alpha} - \kappa = 0$ ως συνάρτηση του χρόνου έχουμε: $\dfrac{3\alpha(t)}{2} + \dfrac{1}{2\alpha(t)} - \kappa(t) = 0$ και με παραγώγιση

$$\frac{3\alpha'(t)}{2} - \frac{\alpha'(t)}{2\alpha^2(t)} - \kappa'(t) = 0$$

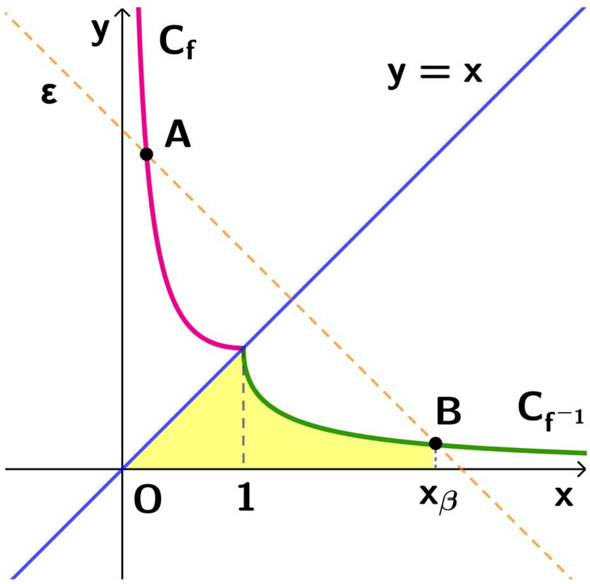
$$\overset{t=t_0}{\Rightarrow} \frac{3\alpha'(t_0)}{2} - \frac{\alpha'(t_0)}{2\left(\frac{1}{5}\right)^2} - 11 = 0$$

$$\alpha'(t_0) = -1.$$

Επομένως ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής την χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$d'(t_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} + 1 \right) = 13\sqrt{2} \quad \text{μ.μ / μ.χ}$$

Γ3. ii)



Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα, το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από την παράσταση: $E(\Omega) = \int_0^1 x\,dx + \int_1^{x_\beta} f^{-1}(x)\,dx$.

Έχουμε:

- $\int_0^1 x\,dx = \ldots = \dfrac{1}{2}$
- $\int_1^{x_\beta} f^{-1}(x)\,dx = \dfrac{1}{100} + \dfrac{\ln 5}{2} - \dfrac{1}{4}$,

διότι θέτοντας $u = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(u) \Rightarrow dx = f'(u)du = \dfrac{u^2-1}{2u^2}du$.

Επίσης:

- Για $x = 1$ είναι $f(u) = 1 \Rightarrow f(u) = f(1) \Rightarrow u = 1$
- Για $x = x_\beta$ είναι $f(u) = x_\beta \Rightarrow f(u) = f(\alpha) \Rightarrow u = \alpha = \dfrac{1}{5}$.

Επομένως έχουμε:

$$\int_1^{x_\beta} f^{-1}(x)\,dx = \int_1^{\frac{1}{5}} u\cdot\frac{u^2-1}{2u^2}du = \int_1^{\frac{1}{5}}\left(\frac{u}{2}-\frac{1}{2u}\right)du = \left[\frac{u^2}{4}-\frac{\ln u}{2}\right]_1^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{100}+\frac{\ln5}{2}-\frac{1}{4},$$

Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου τελικά είναι:

$$E(\Omega) = \frac{1}{2}+\frac{1}{100}+\frac{\ln5}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{100}+\frac{1+\ln5}{2} \quad \text{τ.μ. .}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i)

Έχουμε ότι:

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \ldots = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-2x^2-x-1}{x^2} \overset{\substack{2\text{ φορές}\\ \text{DLH}}}{=} \ldots = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow f'(0) = -\dfrac{3}{2}$ και

- η f είναι παραγωγίσιμη για $x\neq0$ με $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x-2x^2+1}{x^2}$,

οπότε η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Δ2.

Για $x\neq0$ είναι $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x-2x^2+1}{x^2}$.

Ορίζουμε συνάρτηση $h(x)=xe^x-e^x-2x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $h'(x)=x\left(e^x-4\right)$ με ρίζες 0 και $\ln4$.

Οπότε έχουμε:

x	$-\infty$	0	$\ln4$	$+\infty$
h'	$+$		$-$	$+$
h	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

Παρατηρούμε ότι η h παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $h(0)=0$, επομένως ισχύει $h(x)\le h(0)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,\ln4]$ με το ίσον μόνο για $x=0$. Επομένως είναι $h(\ln4)<0$.

Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(x-1-\frac{2x^2-1}{e^x}\right)\right]=+\infty,\quad \text{όπου}$$

χρησιμοποιήσαμε ότι $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{e^x}\overset{\substack{2\ \text{φορές}\\ \text{DLH}}}{=}\ \dots\ =0$.

Επομένως, το σύνολο τιμών της h στο διάστημα $\Delta=[\ln4,+\infty)$ είναι το $h(\Delta)=[h(\ln4),+\infty)$ και επειδή $h(\ln4)<0$ ισχύει ότι $0\in h(\Delta)$, οπότε υπάρχει μοναδικό (λόγω μονοτονίας) α, τέτοιο ώστε $h(\alpha)=0$.

Ισχύουν:

- $x>\alpha \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x)>0$.
- $\ln4<x<\alpha \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x)<0$.

Οπότε έχουμε:

x	$-\infty$		0		$\ln4$		α		$+\infty$
h		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f'				$-$				$+$	
f				$\searrow$				$\nearrow$	

(Το $x=0$ είναι ρίζα της h αλλά όχι της f, αφού $f'(0)=-\dfrac{3}{2}$.)

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο α.

Δ3.

Για να ικανοποιεί η f το θεώρημα Rolle σε διάστημα $[0,\kappa]$, θα πρέπει:

- να είναι συνεχής στο $[0,\kappa]$, που ισχύει αφού είναι παραγωγίσιμη,
- να είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\kappa)$, που επίσης ισχύει,
- να είναι $f(0)=f(\kappa) \Rightarrow f(\kappa)=1$.

Όμως $\alpha>0 \overset{f\searrow(-\infty,\alpha]}{\Rightarrow} f(\alpha)<1$.

Στο διάστημα $\Delta_2=(\alpha,+\infty)$ το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta_2)\overset{f\nearrow}{=}(f(\alpha),+\infty)$,

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x} \overset{DLH}{=} \ldots=+\infty$.

Άρα $1\in(f(\alpha),+\infty)$, οπότε υπάρχει $\kappa\in\Delta_2$, δηλαδή $\kappa>\alpha$, τέτοιο ώστε $f(\kappa)=1$.

Δ4. i)

Στην σχέση $f(x)-g'(x)=\int_0^\kappa f'(x)g'(x)dx$ (1) θέτουμε $c=\int_0^\kappa f'(x)g'(x)dx$,

οπότε έχουμε $f(x)-g'(x)=c \Rightarrow g'(x)=f(x)-c$.

Όμως τότε:

$$c=\int_0^\kappa f'(x)g'(x)dx=\int_0^\kappa f'(x)\left(f(x)-c\right)dx=\int_0^\kappa \left(f(x)-c\right)'\left(f(x)-c\right)dx=$$

$$=\left[\frac{f(x)-c}{2}\right]_0^\kappa \overset{f(\kappa)=f(0)}{=} 0.$$

Από την (1) έχουμε $f(x)-g'(x)=0 \Rightarrow g'(x)=f(x)$.

Δ4. ii)

Η δοσμένη σχέση $g\left(\int_0^\kappa g(x)dx\right)-\int_0^\kappa f(\alpha)g(x)dx>g(0)$ γίνεται:

$$g\left(\int_0^\kappa g(x)dx\right)-f(\alpha)\int_0^\kappa g(x)dx>g(0)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)-f(\alpha)x,\ x\in\mathbb{R}$, με

$\varphi'(x)=g'(x)-f(\alpha)=f(x)-f(\alpha)>0$, για κάθε $x\neq\alpha$, λόγω του ολικού ελαχίστου της f και επειδή η φ είναι συνεχής, θα είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1-1$.

Η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$g\left(\int_0^\kappa g(x)dx\right)-f(\alpha)\int_0^\kappa g(x)dx>g(0)-f(\alpha)\cdot 0$$

$$\Leftrightarrow\ \varphi\left(\int_0^\kappa g(x)dx\right)>\varphi(0)$$

$$\overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow}\ \int_0^\kappa g(x)dx>0$$

$$\Leftrightarrow\ \int_0^\kappa (x)'g(x)dx>0$$

$$\Leftrightarrow\ \left[xg(x)\right]_0^\kappa-\int_0^\kappa xf(x)dx>0$$

$$\Leftrightarrow\ \kappa g(\kappa)-\int_0^\kappa\left(e^x-2x^2-1\right)dx>0$$

$$\overset{g(\kappa)=2\kappa}{\Leftrightarrow}\ 2\kappa^2-\left[e^x-\frac{2x^3}{3}-x\right]_0^\kappa>0$$

$$\Leftrightarrow\ 2\kappa^2-e^\kappa+\frac{2\kappa^3}{3}+\kappa+1>0\quad(2)$$

Όμως $f(\kappa)=1\ \Rightarrow\ \dfrac{e^\kappa-2\kappa^2-1}{\kappa}=1\ \Rightarrow\ e^\kappa=2\kappa^2+\kappa+1$

Οπότε η σχέση (2) γίνεται: $\dfrac{2\kappa^3}{3}>0$ που ισχύει αφού $\kappa>0$.