

Μαθηματικά ομάδων Προβανατοληροί
 δεσμών βιοσυνών & βιοσυνών
 Οικονομίας και Πληροφορικής
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023

δέματα και ενδεικτικές λύσεις

Επιμέλεια Λύσεων: Χρήστος Κ. Παύλος

www.liveyourmaths.com/



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 6

- A2.** Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ , ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

δ) Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια «ένα προς ένα» (“1-1”) συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \ln x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$.

Μονάδες 5

Έστω $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}$, $x > 0$.

B2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{συν}(1 + x^2)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + \alpha, & x \geq 1 \end{cases},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 x f(x) dx = 1.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

Μονάδες 4

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'Ox$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» (“1-1”) (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ4. Έστω $(\varepsilon): y = -x + 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε) , τον άξονα $x'Ox$ και την ευθεία $x = e$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: (0,2) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$ με $F(x_1) = G(x_2) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2) + G(x_1) = 0$

(μονάδες 4)

ii) η εξίσωση

$$x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2) .

(μονάδες 5)

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
- ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ 2023

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 111
A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 104
A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 128
A4. α) Λάθος
β) Λάθος
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Δίνονται οι συναρτήσεις: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$

και $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \ln x$

Ζητείται η συνάρτηση $f(x) = (g \circ h)(x)$. Θα βρούμε πρώτα το πεδίο ορισμού της.

Έχουμε $D_f \equiv D_{g \circ h} \equiv \{x \in D_h \text{ και } h(x) \in D_g\} \equiv \{x > 0 \text{ και } \ln x \in \mathbb{R}\} \equiv (0, +\infty) \neq \emptyset$

Άρα, η ζητούμενη συνάρτηση είναι: $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - (e^{\ln x})^2}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}$

ή $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}, x > 0$.

- B2.** (i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \left(\frac{4-x^2}{x} \right)' = \frac{(4-x^2)'x - (4-x^2)(x)'}{x^2} = \frac{-2x \cdot x - (4-x^2)}{x^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

αφού $x^2 > 0$ και $-x^2 - 4 < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Δηλαδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

(ii) Ισχύει κατά τα γνωστά: $\pi > e > 0 \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow}_{\text{στο } (0, +\infty)} f(\pi) < f(e) \Leftrightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e}$ (1)

Όμως $e > 2 \Leftrightarrow e^2 > 4 \Leftrightarrow 4 - e^2 < 0$

Διαιρούμε την (1) με $4 - e^2 < 0$ και έχουμε:

$$\frac{4-\pi^2}{(4-e^2) \cdot \pi} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}, \text{ δηλαδή η ζητούμενη.}$$

B3.

Θα βρούμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

- Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως ρητή ή ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

$$\text{Είναι, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4-x^2) \cdot \frac{1}{x} = +\infty$$

επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} (4-x^2) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ με $x > 0$.

Άρα, η ευθεία $x = 0$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

- Οριζόντια ασύμπτωτη:

Αφού είναι $D_f \equiv (0, +\infty)$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν δέχεται **οριζόντια ασύμπτωτη**.

- Πλάγια ασύμπτωτη:

$$\text{Είναι } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

Και άρα

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-1)x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4-x^2}{x} + x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \end{aligned}$$

Άρα, $\beta = 0$, οπότε η C_f δέχεται **πλάγια ασύμπτωτη** καθώς $x \rightarrow +\infty$, την $(\varepsilon): y = -x$

(Διχοτόμος 2ου - 4ου τεταρτημορίου).

B4. Ζητάμε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}$

$$\text{Όμως, } \left| \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$$

αφού $|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)| \leq 1$ (συνχ φραγμένη συνάρτηση).

$$\text{Επίσης, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty.$$

$$\text{Οπότε, } \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|f(x)|} \right) = 0$$

Άρα, από κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι

$$\begin{aligned} \int_2^3 xf(x) dx = 1 &\Leftrightarrow \int_2^3 x \left(\frac{1}{x} + \alpha \right) dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1 + \alpha x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 \left(x + \frac{\alpha x^2}{2} \right)' dx = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[x + \frac{\alpha x^2}{2} \right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3 + \frac{\alpha \cdot 3^2}{2} - \left(2 + \frac{\alpha \cdot 2^2}{2} \right) = 1 \Leftrightarrow 3 + \frac{9\alpha}{2} - 2 - 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6 + 9\alpha - 4 - 4\alpha = 2 \Leftrightarrow 5\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \end{aligned}$$

Γ2. (i) Για $\alpha = 0$, έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

- Εξετάζουμε την f ως προς τη συνέχεια:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 3x + 3) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 = f(1)$$

Άρα, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

- Εξετάζουμε την f ως προς την παραγωγισιμότητα:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x(x-1)} = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1.$$

Επομένως, $f'(1) = -1$ και άρα ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.

(ii) Η εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0 = 1$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = (-1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Δηλαδή, $(\varepsilon): y = -x + 2$.

Αν $\hat{\omega}$ είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$, τότε:

$$\lambda_{\varepsilon} = \varepsilon\varphi\hat{\omega} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\hat{\omega} = -1 \Leftrightarrow \hat{\omega} = 135^{\circ} \text{ ή } \hat{\omega} = \frac{3\pi}{4}$$

αφού, $0^{\circ} \leq \hat{\omega} < 180^{\circ}$ ή $0 \leq \hat{\omega} < \pi$.

Γ3. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση «ένα προς ένα» (1-1).

Για $x \in (-\infty, 1)$, η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = (x^2 - 3x + 3)' = 2x - 3 < 0, \text{ για κάθε } x < 1$$

αφού $x < 1 \Leftrightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow 2x - 3 < -1 < 0$.

Άρα, $f'(x) < 0$ και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$.

Για $x \in [1, +\infty)$, η f είναι συνεχής ως ρητή και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0, \text{ για κάθε } x \geq 1$$

Άρα, $f'(x) < 0$ και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , οπότε ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο \mathbb{R} και άρα είναι συνάρτηση «ένα προς ένα» (1-1).

Ζητάμε επιπλέον το σύνολο τιμών της f .

α' τρόπος

- Αν $A_1 = (-\infty, 1]$, τότε:

$$f(A_1) \stackrel{f \text{ συνεχής στο } A_1}{=} \underset{f \setminus \lambda}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$$

$$\text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

$$\text{Άρα, } f(A_1) = [1, +\infty).$$

- Αν $A_2 = [1, +\infty)$, τότε:

$$f(A_2) \stackrel{f \text{ συνεχής στο } A_2}{=} \underset{f \setminus \lambda}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right]$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\text{Άρα, } f(A_2) = (0, 1].$$

$$\text{Οπότε } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (0, +\infty) \text{ ή } f(A) = (0, +\infty).$$

β' τρόπος (εναλλακτικά)

Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο \mathbb{R} και αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, είναι και στο \mathbb{R} . Τότε, θα ισχύει:

$$f(A) \stackrel{f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$$

Είναι

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\text{Άρα, } f(A) = (0, +\infty).$$

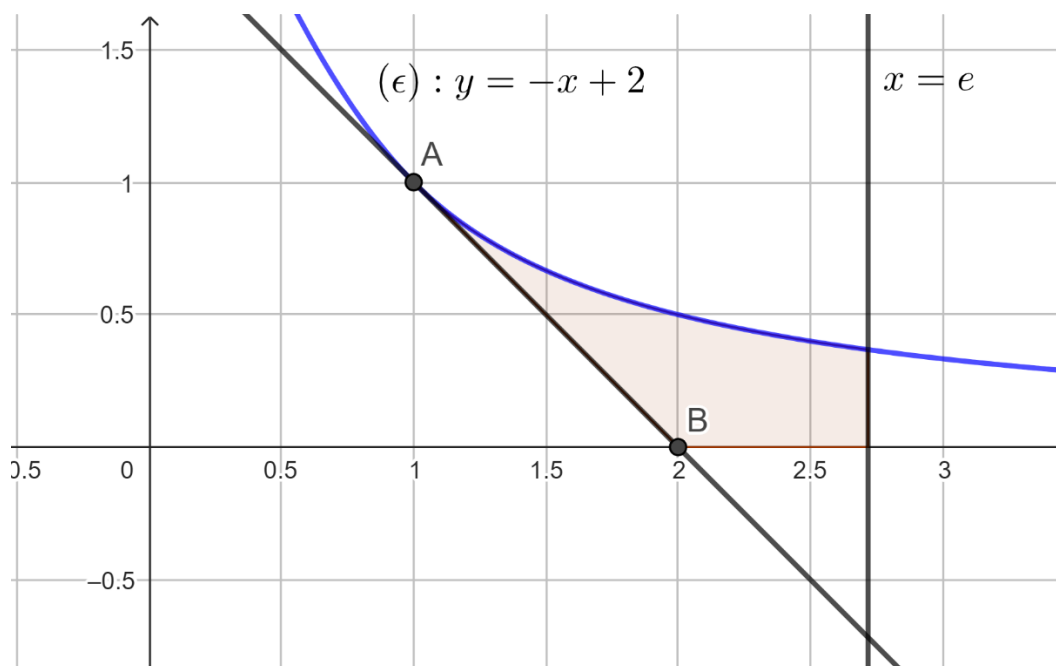
Γ4. Σχεδιάζουμε πρόχειρα τη C_f . Η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(2, 0)$, αφού για

$$y = 0 \text{ είναι } y = -x + 2 \stackrel{y=0}{\Rightarrow} 0 = -x + 2 \Rightarrow x = 2.$$

Η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} \text{ και } f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$$

Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$, άρα η f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα άνω) στο $[1, +\infty)$.



α' τρόπος

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

με $E(\Omega_1) = \int_1^2 |f(x) - y| dx$. Αλλά στο $[1, 2]$, η C_f , αφού είναι κυρτή, είναι πάνω από την εφαπτομένη (ϵ) , οπότε ισχύει: $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) - y \geq 0$. Άρα,

$$\begin{aligned} E(\Omega_1) &= \int_1^2 |f(x) - y| dx = \int_1^2 (f(x) - y) dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - (-x + 2) \right] dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) dx = \\ &= \int_1^2 \left(\ln x + \frac{x^2}{2} - 2x \right)' dx = \left[\ln x + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 = \ln 2 + \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 - \left(\ln 1 + \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 \right) = \\ &= \ln 2 + 2 - 4 - \frac{1}{2} + 2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} E(\Omega_2) &= \int_2^e |f(x) - 0| dx = \int_2^e |f(x)| dx \stackrel{f(x) \geq 0}{\text{στο } [2, e]}} = \int_2^e f(x) dx = \int_2^e \frac{1}{x} dx = \int_2^e (\ln x)' dx = \\ &= [\ln x]_2^e = \ln e - \ln 2 = 1 - \ln 2 \end{aligned}$$

Τελικά, $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 = \frac{1}{2}$ τ.μ.

β' τρόπος

Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε το εν λόγω εμβαδόν και ως εξής:

$$E(\Omega) = \int_1^e |f(x) - 0| dx - (AB\Delta), \text{ όπου } (AB\Delta) \text{ το εμβαδόν του τριγώνου.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x-1} = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$.

α' τρόπος

Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x-1}$ με $x \in (0,1) \cup (1,2)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$, οπότε,

$$f(x) - 2x = (x-1)g(x) \Leftrightarrow f(x) = (x-1)g(x) + 2x$$

Είναι,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1) \cdot g(x) + 2x] = 0 \cdot \ell + 2 \cdot 1 = 2$$

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa \right) = \ln 1 - \frac{1}{1} + \kappa = \kappa - 1$$

Από τη μοναδικότητα του ορίου, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \Leftrightarrow \kappa - 1 = 2 \Leftrightarrow \kappa = 3$

β' τρόπος

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,2)$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Αρα, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ (1)

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x-1} = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x-1}$ με $x \in (0,1) \cup (1,2)$,

οπότε, $g(x) \cdot (x-1) = f(x) - 2x \Leftrightarrow f(x) = (x-1)g(x) + 2x$

Κοντά στο 1 έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)g(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)g(x) + \lim_{x \rightarrow 1} 2x = 0 \cdot \ell + 2 \cdot 1 = 2$$

Δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Από την (1), θα έχουμε:

$$2 = f(1) \Leftrightarrow \ln(2-1) - \frac{1}{1} + \kappa = 2 \Leftrightarrow \ln 1 - 1 + \kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = 3$$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right)' = \frac{1}{2-x} (2-x)' - \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \\ &= \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2(x-2)} = \frac{(x+2)(x-1)}{x^2(x-2)} \end{aligned}$$

ή $f'(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x^2(x-2)}$. Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το $(x-1)(x-2)$.

Σχεδιάζουμε πίνακα προσήμου:

x	0	1	2	
x-1		-	0	+
x-2		-	-	
f'		+	0	-
f		↗		↘

Άρα, $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$. Επίσης,

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2)$.

Αν $A_1 = (0, 1]$, τότε $f(A_1) \stackrel{f \text{ συνεχής στο } A_1}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right]$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = \ln 2 + 3 - \infty = -\infty$
- $f(1) = \ln(2-1) + \frac{1}{1} + 3 = \ln 1 - 1 + 3 = 2$

Οπότε, $f(A_1) = (-\infty, 2]$ και $0 \in f(A_1)$, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0, 1)$,

τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$, το x_1

είναι μοναδικό.

Αν $A_2 = [1, 2)$, τότε $f(A_2) \stackrel{f \text{ συνεχής στο } A_2}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), f(1) \right)$.

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right]$

Θέτουμε $2-x = u$. Όταν $x \rightarrow 2^- \Leftrightarrow u \rightarrow 0^+$. Τότε $\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2-x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = -\infty - \frac{1}{2} + 3 = -\infty.$$

Συνεπώς, $f(A_2) = (-\infty, 2]$ και $0 \in f(A_2)$, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2)$, το x_2 είναι μοναδικό.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι, $x_1 < \frac{1}{3}$.

α' τρόπος

$$\text{Είναι } f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 = \ln\frac{5}{3} - 3 + 3 = \ln\frac{5}{3}.$$

$$\text{Όμως, } \frac{5}{3} > 1 \Leftrightarrow \ln\frac{5}{3} > \ln 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) > f(x_1) \stackrel{f \text{ φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3} > x_1 \Leftrightarrow x_1 < \frac{1}{3}.$$

β' τρόπος

Έστω $x_1 \geq \frac{1}{3} \stackrel{f \text{ φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f(x_1) \leq f\left(\frac{1}{3}\right) \stackrel{f(x_1)=0}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{3}\right) \leq 0$, άτοπο, αφού

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - 3 + 3 = \ln\frac{5}{3} > 0$$

Καταλήξαμε σε άτοπο, διότι υποθέσαμε $x_1 \geq \frac{1}{3}$, άρα $x_1 < \frac{1}{3}$.

Δ3. Έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$.
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$.

Από το **Θεώρημα Μέσης Τιμής**, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0, 1)$,

τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$$

Επειδή,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} \right)' = -\frac{1}{(x-2)^2} (x-2)' + \left(-\frac{1}{x^2} (x^2)' \right)' = \\ &= -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2x}{x^4} = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0 \end{aligned}$$

δηλαδή $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$, η f' είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $(0,1)$, άρα το ξ είναι μοναδικό.

- Δ4.** (i) Αφού F, G αρχικές της f στο $(0,2)$ με $F(x_1) = G(x_2) = 0$, τότε

$$F'(x) = f(x) \text{ και } G'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in (0,2)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} F'(x) - G'(x) = 0 &\Leftrightarrow (F(x) - G(x))' = 0 \stackrel{\text{γνωστό}}{\Leftrightarrow} F(x) - G(x) = c \stackrel{\text{θεώρημα}}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow F(x) = G(x) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Αν θέσουμε στην άνωθεν $x = x_1$, θα είναι:

$$F(x_1) = G(x_1) + c \stackrel{F(x_1)=0}{\Leftrightarrow} G(x_1) + c = 0 \Leftrightarrow c = -G(x_1) \quad \mathbf{(1)}$$

Αν θέσουμε στην άνωθεν $x = x_2$, θα είναι:

$$F(x_2) = G(x_2) + c \stackrel{G(x_2)=0}{\Leftrightarrow} c = F(x_2) \quad \mathbf{(2)}$$

Από **(1)** και **(2)**, είναι $F(x_2) = -G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$.

- (ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x, x \in [x_1, x_2]$.

Επειδή η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[x_1, 1]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[1, x_2]$, θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Οπότε $F'(x) = f(x) > 0$ και $G'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Δηλαδή οι F, G είναι **γνησίως αύξουσες** στο (x_1, x_2) .

Οπότε,

$$x_1 < x_2 \stackrel{F'}{\Rightarrow} F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow F(x_2) > 0 \text{ και } x_1 < x_2 \stackrel{G'}{\Rightarrow} G(x_1) < G(x_2) \Rightarrow G(x_1) < 0.$$

Άρα,

- $H(x_1) = x_1F(x_1) + x_2G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 = x_2G(x_1) + x_1 - x_2 < 0$, αφού

$$\left. \begin{array}{l} x_2 > 0, G(x_1) < 0 \Rightarrow x_2G(x_1) < 0 \\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0 \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} x_2G(x_1) + x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow H(x_1) < 0$$

- $H(x_2) = x_1F(x_2) + x_2G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 = x_1F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$, αφού

$$\left. \begin{array}{l} x_1 > 0, F(x_2) > 0 \Rightarrow x_1F(x_2) > 0 \\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0 \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} x_1F(x_2) + x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow H(x_2) > 0$$

Από Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε:

$$H(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_1F(x_0) + x_2G(x_0) - x_1 - x_2 + 2x_0 = 0$$

Η συνάρτηση H είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με:

$$\begin{aligned} H'(x) &= (x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x)' = x_1F'(x) + x_2G'(x) + 2 = \\ &= x_1f(x) + x_2f(x) + 2 = (x_1 + x_2)f(x) + 2 > 0 \end{aligned}$$

αφού $f(x) > 0$ και $x_1, x_2 > 0$.

Οπότε, $H'(x) > 0$ δηλαδή η H είναι **γνησίως αύξουσα** στο (x_1, x_2) . Άρα, το x_0 είναι μοναδικό. Συνεπώς, μοναδική είναι και η ευρεθείσα λύση.