

ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ

**των γεωμετρικών εννοιών και
των γραφικών παραστάσεων
στην επίλυση προβλημάτων
της Άλγεβρας και της Ανάλυσης.**

**Γεώργιος Χαρ. Πολύζος
Μαθηματικός (PhD-MSc)**

Κοζάνη, 3-3-2024

Σκοπός της Μαθηματικής Εκπαίδευσης

Βασικός σκοπός της Μαθηματικής Εκπαίδευσης είναι:

«Να μυήσει τους μαθητές στις βασικές αρχές της μαθηματικής επιστήμης και στον τρόπο σκέψης στη γλώσσα της μαθηματικής επιστήμης και στην διασύνδεση αυτής με τον κόσμο της εμπειρίας και να τους προετοιμάσει, με αυτόν τον τρόπο, για την ενήλικη ζωή και την ακαδημαϊκή τους εξέλιξη».

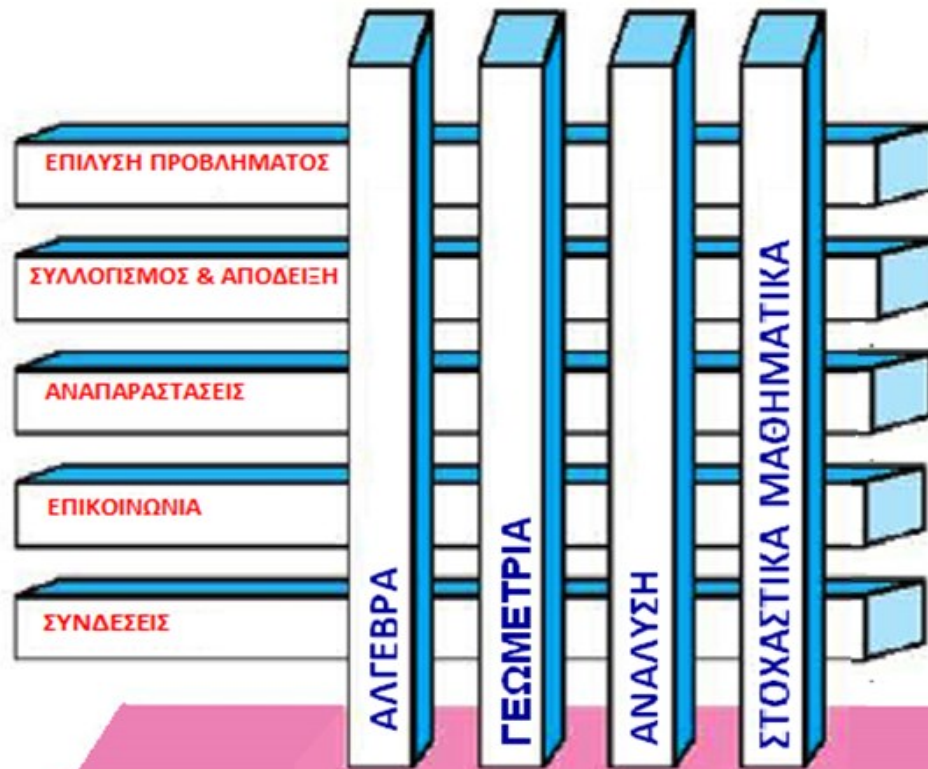
Σύμφωνα με τα Σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών, μέσω της μαθηματικής εκπαίδευσης, επιδιώκεται οι μαθητές να αποκτήσουν την ικανότητα:

- A. Να διατυπώνουν και να απαντούν ερωτήσεις μέσα και μέσω των Μαθηματικών και
- B. Να διαχειρίζονται με άνεση και αποτελεσματικότητα τη μαθηματική γλώσσα και τα μαθηματικά εργαλεία

Για την απόκτηση των μαθηματικών ικανοτήτων στις οποίες αναφερθήκαμε προηγουμένως, θα πρέπει να επιτευχθούν οι στόχοι της διδασκαλίας των Μαθηματικών, που διακρίνονται σε:

Στόχους Διεργασιών & Στόχους Περιεχομένου

Στόχοι Διεργασιών & Στόχοι Περιεχομένων



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΕΣ

Ικανότητα να διατυπώνει και να απαντά ερωτήσεις μέσα και μέσω των Μαθηματικών

Ικανότητα να διαχειρίζεται τη μαθηματική γλώσσα και τα μαθηματικά εργαλεία

Θα πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι:

- A. Οι θεματικές περιοχές των περιεχομένων, καθώς και οι μαθηματικές διεργασίες, συνδέονται μεταξύ τους και αλληλοσυμπληρώνονται.**
- B. Τα περιεχόμενα κατανοούνται μέσω των διεργασιών και οι διεργασίες μέσω των περιεχομένων.**

Με τα θέματα που θα παρουσιάσω θέλω να αναδείξω τη σπουδαιότητα της διασύνδεσης των μαθηματικών εννοιών και της χρήσης των διάφορων μορφών αναπαραστάσεων των εννοιών αυτών.

ΘΕΜΑ 1^ο

Απόσταση Καμπυλών

ΑΣΚΗΣΗ:

Θεωρούμε οι συναρτήσεις:

$$f(x) = e^x + 2e - 1, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = e \ln x, x \in (0, +\infty)$$

1. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις, C_f και C_g , των συναρτήσεων f και g και τις εφαπτόμενες ε και ζ αυτών στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(e, g(e))$, αντιστοίχως, και να αποδείξετε ότι οι ε και ζ είναι παράλληλες και ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι κάθετο σε αυτές.
2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$G(\alpha, \beta) = (\alpha - e^\beta)^2 + (e^\alpha + e(2 - \beta) - 1)^2, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑΤΟΔΟΤΗΣ:

Γιώργος Πολύζος, Μαθηματικό Εργαστήρι 15/5/2019

ΛΥΣΗ:

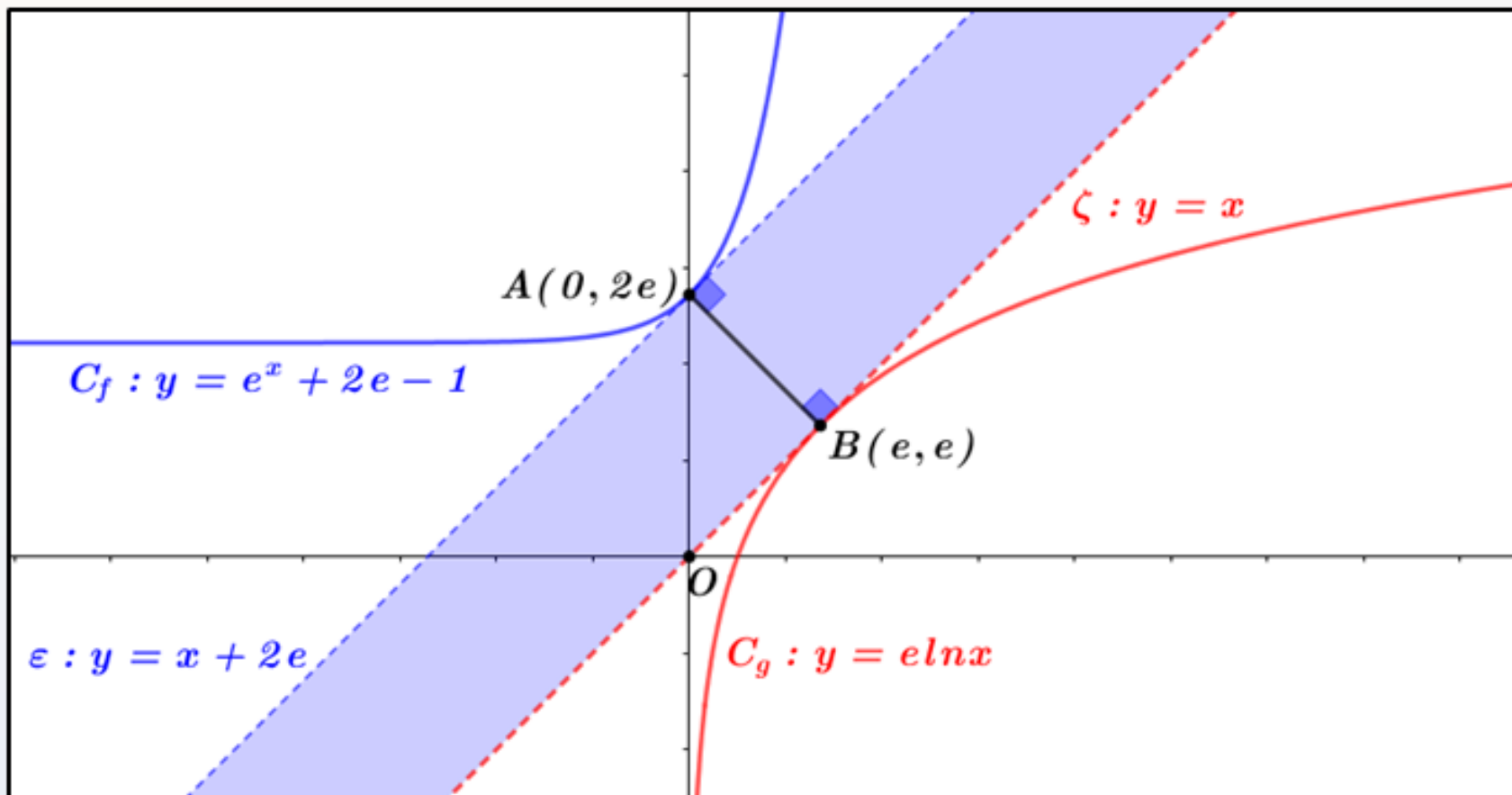
1. Είναι προφανές ότι:

α) Η $C_f : y = e^x + 2e - 1$ προκύπτει από την $y = e^x$, αν τη μετατοπίσουμε προς τα άνω κατά $2e - 1$ μονάδες. Επομένως η $f(x) = e^x + 2e - 1$, είναι γνησίως κυρτή και έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(0, 2e)$ την ευθεία $\varepsilon : y = x + 2e$.

α) Η $C_g : y = e \ln x$ προκύπτει από την $y = \ln x$, αν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές της με τον αριθμό e . Επομένως η $g(x) = e \ln x$ είναι γνησίως κοίλη και έχει εφαπτομένη στο σημείο $B(e, e)$ την ευθεία $\zeta : y = x$.

Επειδή $\lambda_\zeta = 1 = \lambda_\varepsilon$ και $\lambda_\zeta \cdot \lambda_{AB} = -1$, οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες και το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι κάθετο προς αυτές.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και οι εφαπτόμενες ε και ζ αυτών στα σημεία $A(0, 2e)$ και $B(e, e)$ δίνονται στο παρακάτω σχήμα:

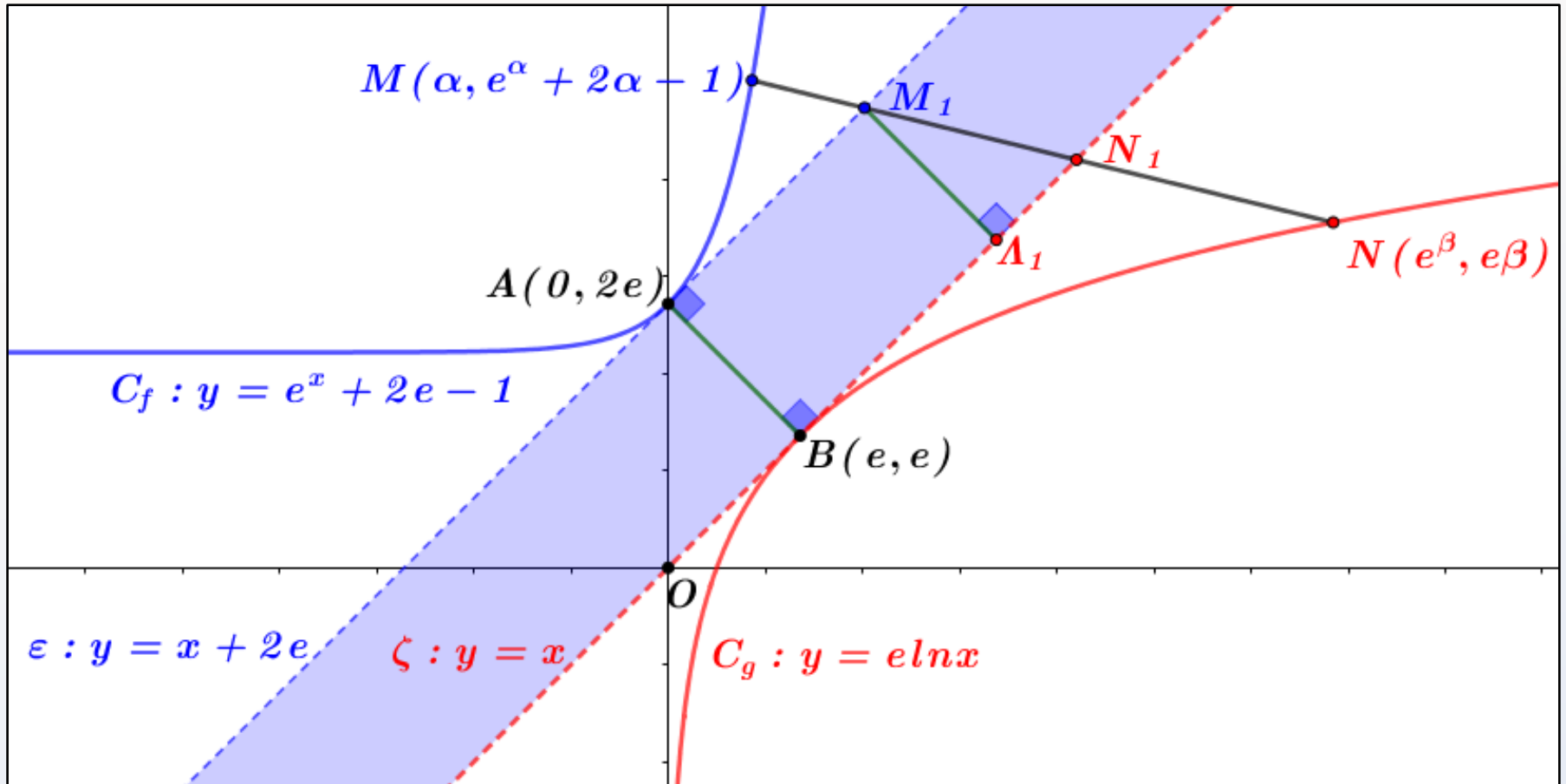


1. Επειδή:

$$G(\alpha, \beta) = \left(\sqrt{(\alpha - e^\beta)^2 + \left((e^\alpha + 2e - 1) - e\beta \right)^2} \right)^2$$

για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

η παράσταση $G(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ παριστάνει το τετράγωνο της απόστασης, (MN) , του σημείου $M(\alpha, e^\alpha + 2e - 1)$ της C_f από το σημείο $N(e^\beta, e\beta)$ της καμπύλης C_g . Συνεπώς, αρκεί να βρούμε πότε η απόσταση (MN) ελαχιστοποιείται.



ΣΧΗΜΑ 2.

Γνωρίζουμε, όμως, ότι η $f(x) = e^x + 2e - 1$ είναι γνησίως κυρτή, ενώ η $g(x) = e \ln x$ γνησίως κοίλη. Επομένως, όλα τα σημεία της C_f , με εξαίρεση το $A(0, 2e)$ βρίσκονται πάνω από την εφαπτομένη της $\varepsilon: y = x + 2e$ στο σημείο αυτό, ενώ όλα τα σημεία της C_g , με εξαίρεση το $B(e, e)$, βρίσκονται κάτω από την εφαπτομένη της $\zeta: y = x$ στο σημείο αυτό.

Επειδή, όμως, η $\zeta: y = x$ είναι παράλληλη προς την $\varepsilon: y = x + 2e$ και βρίσκεται κάτω από αυτή κατά $2e$ μονάδες (ΣΧΗΜΑ 2.), όλα τα σημεία $M \in C_f$ και $N \in C_g$, με εξαίρεση τα A και B , βρίσκονται εκατέρωθεν της ζώνης που ορίζουν οι παράλληλες ευθείες ε και ζ .

Επομένως το ευθύγραμμο τμήμα MN τέμνει πάντοτε τις ευθείες ε και ζ (ΣΧΗΜΑ 2.). Το ίδιο συμβαίνει και όταν ένα τουλάχιστον από τα M και N συμπέσει με το A ή με το B αντιστοίχως.

Αν M_1 και N_1 είναι τα σημεία τομής του MN με τις ευθείες ε και ζ , αντιστοίχως, και L_1 είναι το ίχνος της καθέτου από το σημείο M_1 προς την ευθεία ζ , τότε θα ισχύει (ΣΧΗΜΑ 2.):

$$(MN) \geq (M_1N_1) \geq (M_1L_1) = (AB) = e\sqrt{2}.$$

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν το σημείο $M(\alpha, e^\alpha + 2e - 1)$ συμπίπτει με το σημείο $A(0, 2e)$ και το σημείο $N(e^\beta, e^\beta)$ με το σημείο $B(e, e)$, που συμβαίνει, αν και μόνο αν $\alpha = 0$ και $\beta = 1$.

Άρα, η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$G(\alpha, \beta) = (\alpha - e^\beta)^2 + (e^\alpha + e(2 - \beta) - 1)^2, \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

είναι ίση με:

$$\min G(\alpha, \beta) = G(0, 1) = 2e^2 = (AB)^2.$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Ολοκλήρωμα Συνάρτησης με Κέντρο Συμμετρίας

ΑΣΚΗΣΗ:

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-\sqrt{x^2+1}}{x}, & x \in [-1, 1] - \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει κέντρο συμμετρίας και να βρείτε τις συντεταγμένες αυτού.
2. Με βάση το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι

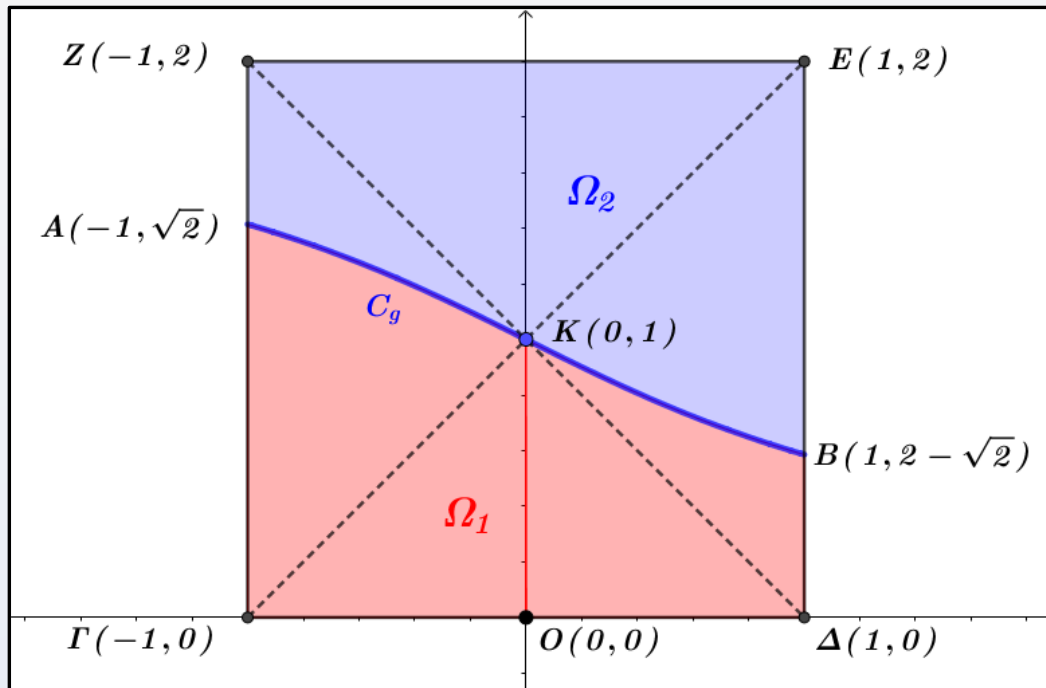
$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \quad (2)$$

ΘΕΜΑΤΟΔΟΤΗΣ:

Γιώργος Πολύζος, Μαθηματικό Εργαστήριο 13/9/2021.

ΛΥΣΗ:

1. Επειδή τα άκρα $A(-1, \sqrt{2})$ και $B(1, 2 - \sqrt{2})$ της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f είναι συμμετρικά ως προς το μέσο $K(0, 1)$ του ευθύγραμμου τμήματος AB που τα συνδέει, ελέγχουμε αν το σημείο $K(0, 1)$ είναι κέντρο συμμετρίας ολόκληρης της C_f (ΣΧΗΜΑ 2.).



ΣΧΗΜΑ 2.

Για να αποδείξουμε ότι ισχύει αυτό, αρκεί να αποδείξουμε ότι το συμμετρικό $M'(x', y')$ κάθε σημείου $M(x, f(x))$ της C_f ανήκει στην C_f . Προς τούτο, αρκεί να αποδείξουμε ότι $y' = f(x')$.

Πράγματι, επειδή τα σημεία $M'(x', y')$ και $M(x, f(x))$ είναι συμμετρικά ως προς το $K(0, 1)$ θα ισχύει

$$\frac{x' + x}{2} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{y' + f(x)}{2} = 1$$

οπότε θα είναι

$$x' = -x \quad \text{και} \quad y' = 2 - f(x) .$$

Επομένως, αντί να αποδείξουμε ότι $y' = f(x')$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $2 - f(x) = f(-x)$. Δηλαδή, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$f(-x) + f(x) = 2, \quad \text{για κάθε } x \in [-1, 1]. \quad (3)$$

Πράγματι, για κάθε $x \in [-1, 1] - \{0\}$ ισχύει

$$f(-x) + f(x) = \frac{-x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}}{-x} + \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} = 2,$$

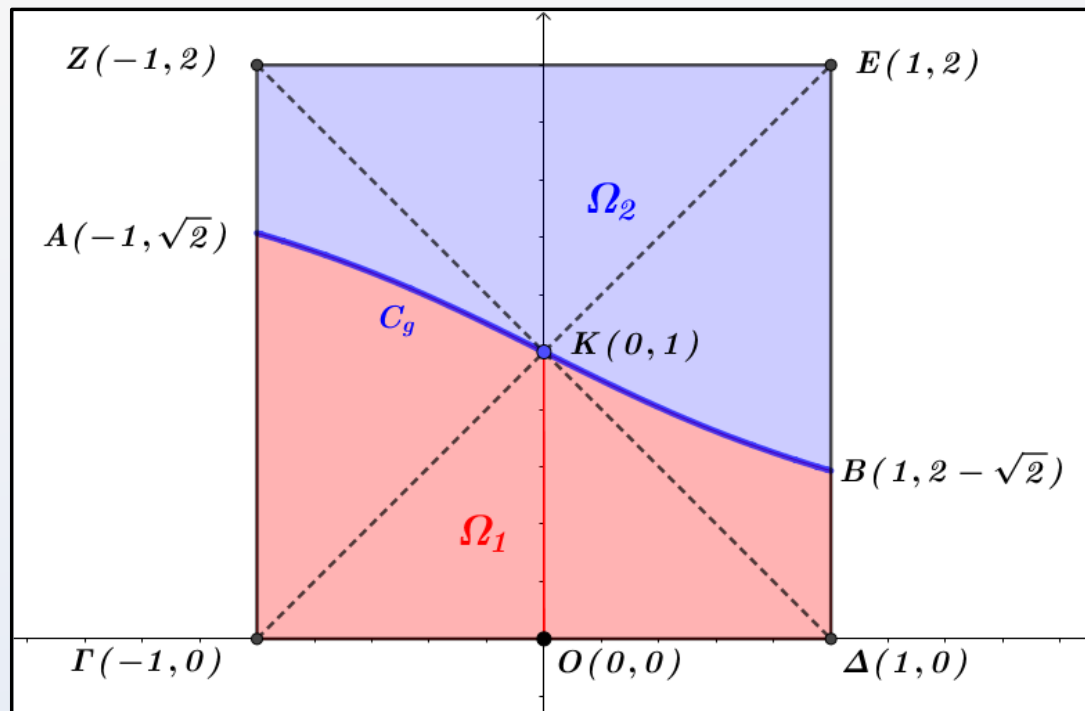
ενώ για $x = 0$ ισχύει $f(0) + f(0) = 1 + 1 = 2$.

Επομένως ισχύει η (3), που δηλώνει ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο $K(0, 1)$.

1. Υπολογίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$.

α' τρόπος:

Θεωρούμε τα συμμετρικά $E(1,2)$ και $Z(-1,2)$ των σημείων $\Gamma(-1,0)$ και $\Delta(1,0)$, αντιστοίχως, ως προς το σημείο $K(0,1)$ που είναι κέντρο συμμετρίας της C_f . Τότε σχηματίζεται το τετράγωνο $\Gamma\Delta EZ$, που έχει και αυτό κέντρο συμμετρίας το $K(0,1)$. (ΣΧΗΜΑ 1.).



ΣΧΗΜΑ 1.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα (εύκολο) και τα άκρα της A και B είναι σημεία των πλευρών $Z\Gamma$ και ΔE του τετραγώνου $\Gamma\Delta E Z$, η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f θα βρίσκεται ολόκληρη στο χωρίο που περικλείεται από τις πλευρές του τετραγώνου αυτού και, συνεπώς, θα το χωρίζει σε δύο χωρία Ω_1 και Ω_2 . Επειδή το $K(0, 1)$ είναι κέντρο συμμετρίας και του τετραγώνου $\Gamma\Delta E Z$ και της C_f , τα χωρία Ω_1 και Ω_2 θα είναι συμμετρικά μεταξύ τους ως προς το $K(0, 1)$. Επομένως θα είναι ίσα. Άρα θα έχουν το ίδιο εμβαδόν, οπότε θα ισχύει:

$$E(\Omega_2) = E(\Omega_1) = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (4)$$

Όμως:

$$E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = E(\Gamma\Delta E Z) = 2 \cdot 2 = 4 \quad (5)$$

Έτσι, από τις (4) και (5) προκύπτει ότι $2 \int_{-1}^1 f(x) dx = 4$,

οπότε θα ισχύει $I = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2$.

β' τρόπος:

Ισχύουν οι συνεπαγωγές:

$$(3) \Rightarrow \int_{-1}^1 [f(-x) + f(x)] dx = \int_{-1}^1 2 dx$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(-x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx = 4$$

$$\stackrel{u=-x}{\Rightarrow} - \int_1^{-1} f(u) du + \int_{-1}^1 f(x) dx = 4$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(u) du + \int_{-1}^1 f(x) dx = 4$$

$$\Rightarrow 2 \int_{-1}^1 f(x) dx = 4$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = 2.$$

Επομένως είναι: $I = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2.$



ΘΕΜΑ 3^ο

Πρόσθημο Παραγώγου & Ολοκλήρωμα

ΑΣΚΗΣΗ:

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

- $f(-1) = 0 = f(1)$ (1)

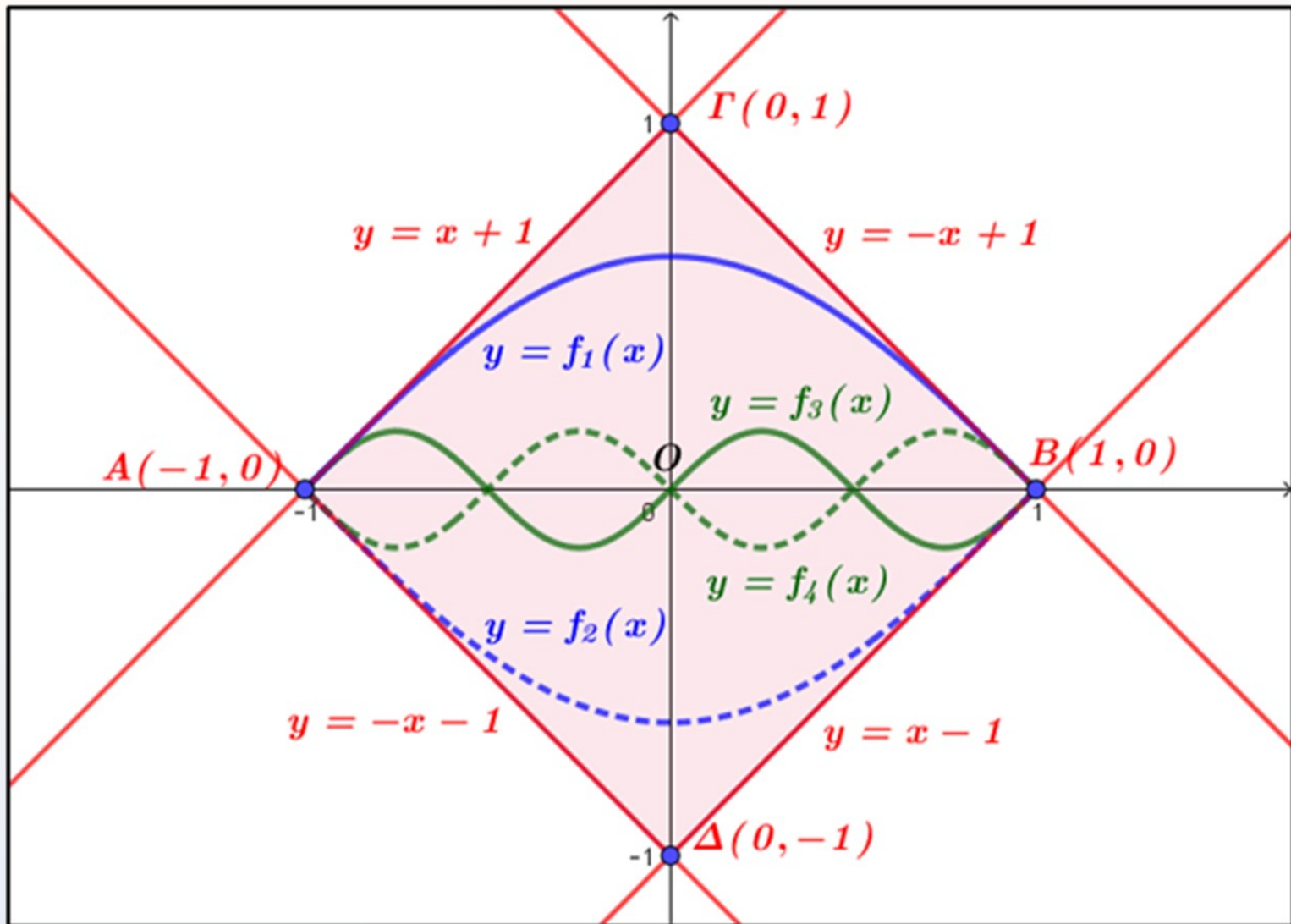
&

- $|f'(x)| \leq 1$, για κάθε $x \in [-1, 1]$ (2)

Να αποδείξετε ότι:

$$-1 < \int_{-1}^1 f(x) dx < 1 \quad (3)$$

ΘΕΜΑ 3^ο (ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ).ggb



ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Για κάθε $x \in (-1, 1]$ υπάρχει (ΘΜΤ) $\xi_x \in (-1, 1)$ τέτοιος, ώστε $\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(\xi_x)$, οπότε, λόγω των (1) και (2),

θα ισχύει:

$$\left| \frac{f(x)}{x+1} \right| = |f'(\xi_x)| \leq 1.$$

Επομένως θα ισχύει

$$|f(x)| \leq x+1, \text{ για κάθε } x \in (-1, 1]$$

απ' όπου, λόγω της (1), προκύπτει ότι:

$$|f(x)| \leq x+1, \text{ για κάθε } x \in [-1, 1].$$

Άρα

$$-x-1 \leq f(x) \leq x+1, \text{ για κάθε } x \in [-1,1] \quad (4)$$

Ομοίως, αν εφαρμόσουμε το ΘΜΤ για την f στο $[x,1]$, με $x \in [-1,0)$, βρίσκουμε ότι:

$$x-1 \leq f(x) \leq -x+1, \text{ για κάθε } x \in [-1,1] \quad (5)$$

Επομένως, λόγω των (4) και (5), θα ισχύει

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x), \text{ για κάθε } x \in [-1,1] \quad (6)$$

όπου:

$$g(x) = \min\{x+1, -x+1\} = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \in [-1,0] \\ -x+1, & \text{αν } x \in [0,1] \end{cases}$$

&

$$h(x) = \max\{-x-1, x-1\} = \begin{cases} -x-1, & \text{αν } x \in [-1,0] \\ x-1, & \text{αν } x \in [0,1] \end{cases}$$

Επειδή όμως η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 ενώ οι g και h δεν είναι παραγωγίσιμες στο 0, θα είναι:

$$f \neq g \quad \& \quad f \neq h \quad (7)$$

Επομένως, λόγω των (6) και (7), θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &< \int_{-1}^1 g(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x+1) dx + \int_0^1 (-x+1) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 \\ &= \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = 1 \end{aligned}$$

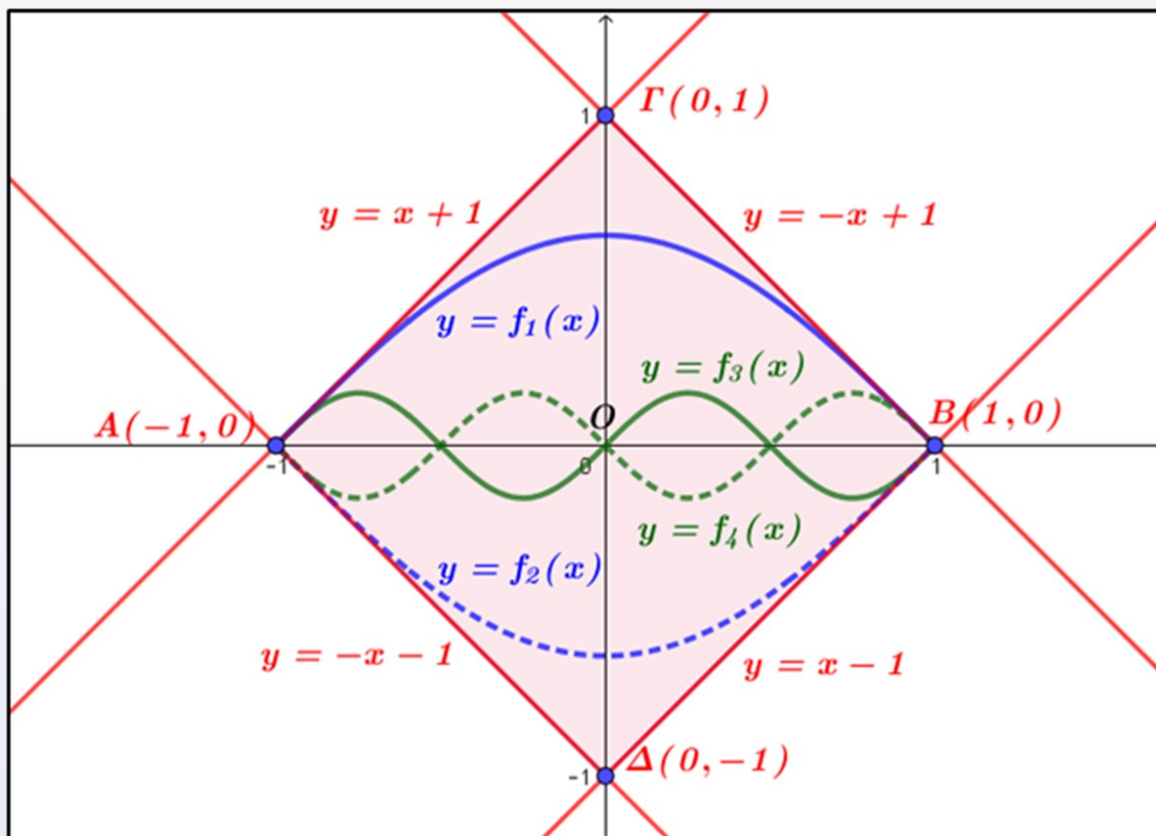
και

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &> \int_{-1}^1 h(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 h(x) dx + \int_0^1 h(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (-x-1) dx + \int_0^1 (x-1) dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -1\end{aligned}$$

Άρα ισχύει η (3). ■

ΕΡΩΤΗΣΗ:

Υπάρχει συνάρτηση f που να ικανοποιεί τις υποθέσεις της άσκησης και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0, 1)$ ή από το σημείο $B(0, -1)$;



ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Η απάντηση είναι ΑΡΝΗΤΙΚΗ. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι ισχύει $f(0) = 1$, τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(0) = f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 1}{x} \\ &\geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x + 1) - 1}{x} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'(0) = f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} \\ &\leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(-x + 1) - 1}{x} = -1 \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $f'(0) \geq 1$ & $f'(0) \leq -1$ που είναι **άτοπο**.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $f(0) = -1$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Ανισότητα με Κυρτή Συνάρτηση

ΑΣΚΗΣΗ:

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση, με:

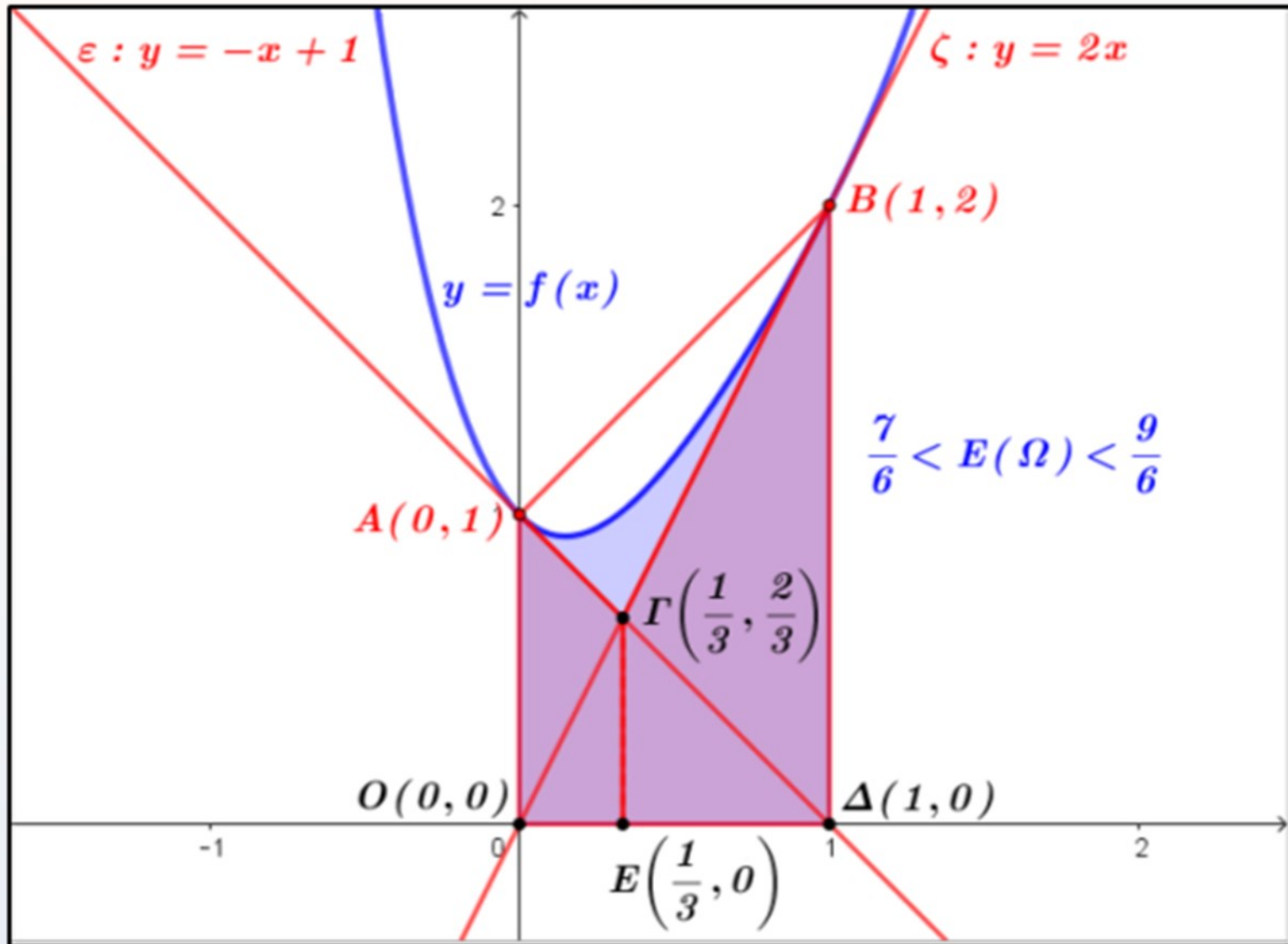
$$f(0)=1, \quad f(1)=2, \quad f'(0)=-1 \quad \& \quad f'(1)=2. \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > \frac{2}{3}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

β) $\frac{7}{6} < \int_0^1 f(x) dx < \frac{9}{6}$.

ΘΕΜΑ 4^ο (ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ).ggb



ΛΥΣΗ:

α) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0,1)$ είναι:

$$\begin{aligned}\varepsilon : y - f(0) &= f'(0)(x - 0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} y - 1 = (-1)x \\ &\Leftrightarrow y = -x + 1\end{aligned}\quad (2)$$

ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης ζ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $B(1,2)$ είναι:

$$\begin{aligned}\zeta : y - f(1) &= f'(1)(x - 1) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} y - 2 = 2(x - 1) \\ &\Leftrightarrow y = 2x\end{aligned}\quad (3)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως κυρτή, η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από τις εφαπτόμενες ε και ζ , με εξαίρεση τα σημεία επαφής A και B αντιστοίχως. Επομένως, θα ισχύει:

$$(f(x) \geq -x + 1 \quad \& \quad f(x) \geq 2x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

με την αριστερή ισότητα να ισχύει, αν και μόνο αν $x = 0$ και τη δεξιά, αν και μόνο αν $x = 1$.

Οι ευθείες, όμως, ε και ζ έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης. Συνεπώς τέμνονται σε κάποιο σημείο Γ .

Αν λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ε και ζ , βρίσκουμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι οι $(x_\Gamma, y_\Gamma) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Επομένως, λόγω της (4), θα ισχύει:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq -x + 1 \geq \frac{2}{3}, \text{ για κάθε } x \in \left(-\infty, \frac{1}{3} \right] \quad (5) \\ \quad \quad \quad \& \\ f(x) \geq 2x \geq \frac{2}{3}, \quad \text{ για κάθε } x \in \left[\frac{1}{3}, +\infty \right) \quad (6) \end{array} \right.$$

Άρα

$$f(x) > \frac{2}{3}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

αφού, τόσο στην (5), όσο και στην (6), δεν ισχύουν και οι δύο ισότητες για την ίδια τιμή του x .

α) Θα αποδείξουμε τώρα το ερώτημα β). Λόγω των (5) και (6) ισχύει

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= \int_0^{1/3} f(x) dx + \int_{1/3}^1 f(x) dx \\ &> \int_0^{1/3} (-x + 1) dx + \int_{1/3}^1 (2x) dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^{1/3} + \left[x^2 \right]_{1/3}^1 \\ &= \left(-\frac{1}{18} + \frac{1}{3} \right) + \left(1 - \frac{1}{9} \right) = \frac{7}{6}.\end{aligned}$$

Επομένως ισχύει:

$$\int_0^1 f(x) dx > \frac{7}{6} \quad (7)$$

Επειδή η χορδή AB έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = \lambda_{AB} \cdot (x - 0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1,$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει:

$$f(x) \leq x + 1, \text{ για κάθε } x \in [0, 1] \quad (8)$$

και ότι η ισότητα να ισχύει, αν και μόνο αν $x = 0$ ή $x = 1$, ή ισοδύναμα ότι:

$$f(x) - (x + 1) \leq 0, \text{ για κάθε } x \in [0, 1] \quad (9)$$

και ότι η ισότητα να ισχύει, αν και μόνο αν $x = 0$ ή $x = 1$.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - (x + 1), \quad x \in [0, 1] \quad (10)$$

Επειδή ισχύει $g(0) = 0 = g(1)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, με

$$g'(x) = f'(x) - 1, \quad x \in [0, 1],$$

υπάρχει (Θ. Rolle) $\xi \in (0, 1)$ τέτοιος, ώστε $g'(\xi) = 0$ και, επειδή η g' είναι γνησίως αύξουσα, διότι η f είναι κυρτή, η ρίζα ξ της g' είναι μοναδική. Επομένως έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

Επομένως έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0	ξ	1
g'			
g	0	$g(\xi)$	0

The diagram illustrates the sign of the derivative g' and the behavior of the function g over the interval $[0, 1]$. The derivative g' is negative on the interval $(0, \xi)$, zero at $x = \xi$, and positive on the interval $(\xi, 1)$. The function g starts at 0 at $x = 0$, increases to $g(\xi)$ at $x = \xi$, and returns to 0 at $x = 1$.

Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι:

$$g(x) \leq 0, \text{ για κάθε } x \in [0, 1],$$

με την ισότητα να ισχύει, αν και μόνο αν $x=0$ ή $x=1$.

Άρα, λόγω της (10), ισχύει η (9) και συνεπώς η (8), που θέλαμε να αποδείξουμε.

Αφού, λοιπόν ισχύει η (8), έχουμε:

$$\int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{3}{2} = \frac{9}{6}. \quad (11)$$

Επομένως, λόγω των (7) και (11), ισχύει:

$$\frac{7}{6} < \int_0^1 f(x) dx < \frac{9}{6}$$

και, έτσι, αποδείχτηκε και το ερώτημα β). ■

ΘΕΜΑ 5^ο

Σύνολο Τιμών Συνάρτησης (Υπερβολή)

ΑΣΚΗΣΗ:

Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

είναι το $f(\mathbb{R}) = (-2, 2)$.

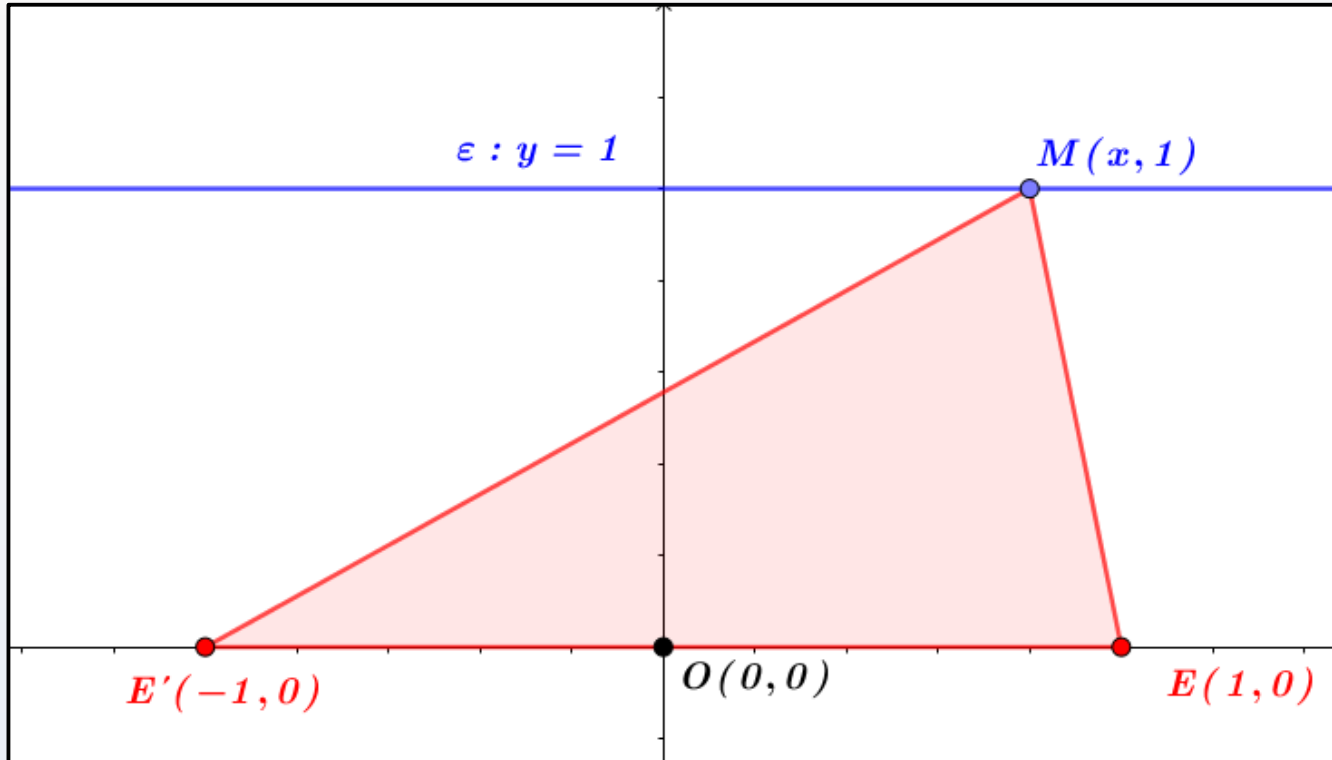
ΘΕΜΑΤΟΔΟΤΗΣ: Γιώργος Πολύζος, Χανιά 12/11/2022

ΛΥΣΗ:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2} \\ &= \sqrt{(x+1)^2 + 1^2} - \sqrt{(x-1)^2 + 1^2} = (ME') - (ME) \end{aligned} \quad (2)$$

όπου $M(x, 1)$, $E'(-1, 0)$ και $E(1, 0)$ (ΣΧΗΜΑ 1.).



ΣΧΗΜΑ 1.

Επομένως, λόγω της τριγωνικής ιδιότητας, ισχύει:

$$0 \leq |f(x)| = |(ME') - (ME)| < (E'E) = 2,$$

οπότε θα είναι

$$f(\mathbb{R}) \subseteq (-2, 2). \quad (3)$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι είναι $(-2, 2) \subseteq f(\mathbb{R})$, οπότε, λόγω της (3), θα ισχύει $f(\mathbb{R}) = (-2, 2)$. Προς τούτο, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $y_0 \in (-2, 2)$ υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = y_0$.

Πράγματι, έστω τυχαίο $y_0 \in (-2, 2)$.

- Αν $y_0 = 0$, τότε θα είναι $y_0 = 0 = f(0)$, οπότε θα ισχύει $y_0 = 0 \in f(\mathbb{R})$.
- Αν $y_0 \neq 0$, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε να ισχύει

$$\sqrt{(x_0 + 1)^2 + 1^2} - \sqrt{(x_0 - 1)^2 + 1^2} = y_0,$$

που σημαίνει ότι το σημείο $M_0(x_0, 1)$ ανήκει στην καμπύλη με εξίσωση

$$\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} - \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = y_0,$$

η οποία είναι κλάδος της καμπύλης

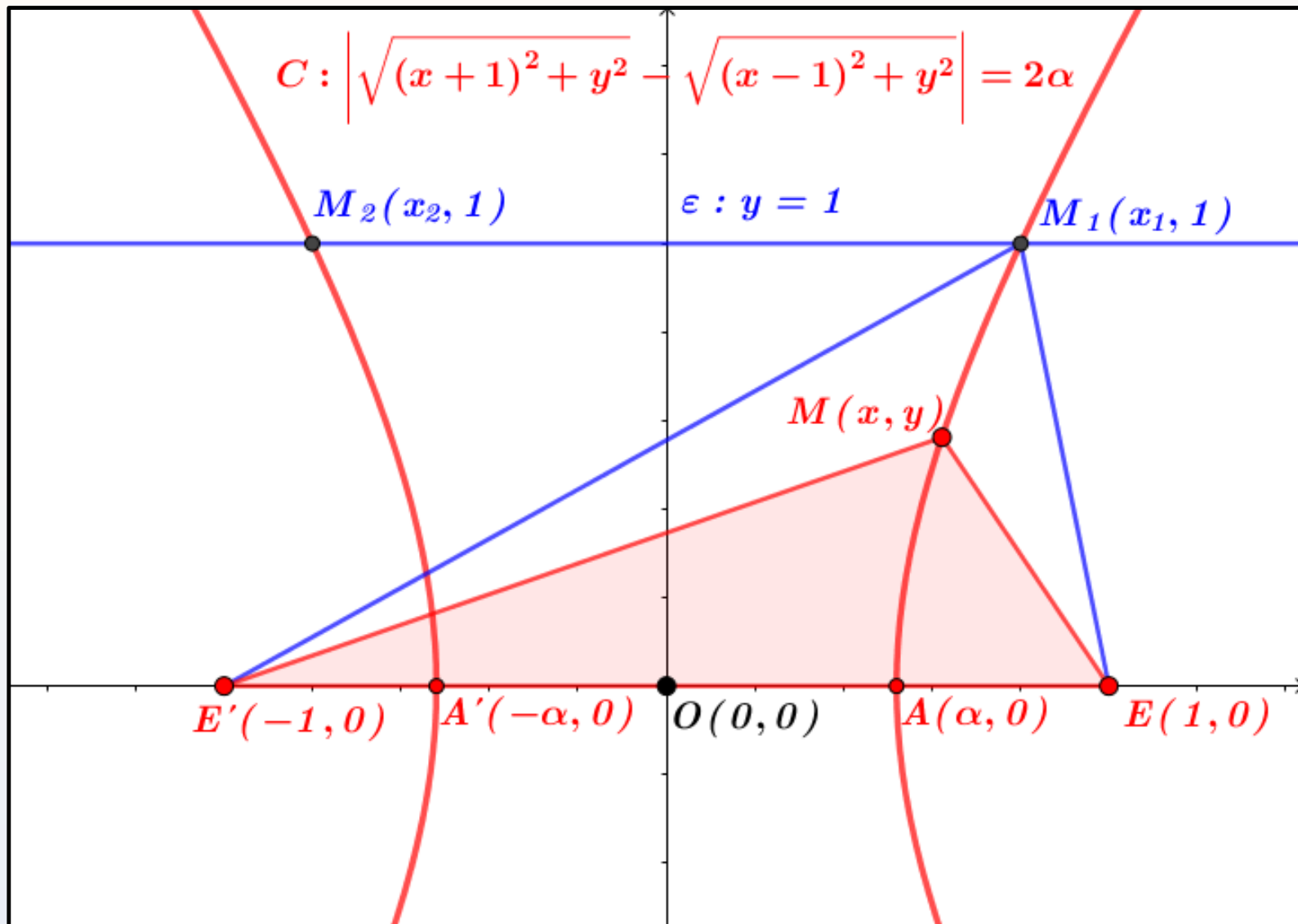
$$\left| \sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \right| = |y_0|. \quad (4)$$

η οποία γράφεται

$$|(ME') - (ME)| = 2\alpha \quad (5)$$

όπου:
$$\begin{cases} E' \equiv E'(-1, 0), E \equiv E(1, 0), M \equiv M(x, y) \\ \text{και} \\ 2\alpha = |y_0| < 2 = 2\gamma = (E'E) \end{cases}$$

Επομένως, λόγω της (5), η (4) παριστάνει υπερβολή C με εστίες τα σημεία $E'(-1, 0)$ και $E(1, 0)$ και σταθερή διαφορά την $2\alpha = |y_0| > 0$ (ΣΧΗΜΑ 2.)



ΣΧΗΜΑ 2.

Η ευθεία $\varepsilon: y=1$ τέμνει την υπερβολή C σε δύο σημεία με αντίθετες τετμημένες, τα:

$$M_1(x_1, 1), \text{ με } x_1 > 0 \quad \text{και} \quad M_2(x_2, 1), \text{ με } x_2 < 0.$$

Επομένως, λόγω της (4), θα ισχύει:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sqrt{(x_1 + 1)^2 + 1} - \sqrt{(x_1 - 1)^2 + 1} \right| = |y_0| \\ \quad \quad \quad \& \\ \left| \sqrt{(x_2 + 1)^2 + 1} - \sqrt{(x_2 - 1)^2 + 1} \right| = |y_0| \end{array} \right.$$

ή ισοδύναμα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(x_1 + 1)^2 + 1} - \sqrt{(x_1 - 1)^2 + 1} = |y_0| \\ \quad \quad \quad \& \\ \sqrt{(x_2 + 1)^2 + 1} - \sqrt{(x_2 - 1)^2 + 1} = -|y_0| \end{array} \right. \quad (5)$$

διότι

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(x_1 + 1)^2 + 1} > \sqrt{(x_1 - 1)^2 + 1} \\ \quad \quad \quad \& \\ \sqrt{(x_2 + 1)^2 + 1} < \sqrt{(x_2 - 1)^2 + 1} \end{array} \right. ,$$

αφού $x_1 > 0$ και $x_2 < 0$.

Έτσι, λόγω της (5), θα ισχύει:

$$f(x_1) = |y_0| \quad \& \quad f(x_2) = -|y_0|,$$

απ' όπου προκύπτει ότι, αν $y_0 > 0$, τότε θα ισχύει

$f(x_1) = y_0$, ενώ αν $y_0 < 0$, τότε θα ισχύει $f(x_2) = y_0$.

Άρα και στις δύο περιπτώσεις ισχύει $y_0 \in f(\mathbb{R})$, που ήταν το ζητούμενο προς απόδειξη.

ΛΥΣΗ (Με Ανάλυση):

Είναι

$$f(x) = \sqrt{(x+1)^2 + 1} - \sqrt{(x-1)^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

οπότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} - \frac{(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + 1}} \\ &= \frac{(x+1)\sqrt{(x-1)^2 + 1} - (x-1)\sqrt{(x+1)^2 + 1}}{\sqrt{(x+1)^2 + 1} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Θα βρούμε τώρα τις ρίζες και το πρόσημο της f' , διακρίνοντας τρεις περιπτώσεις.

- Αν $x \in (-\infty, -1]$, τότε θα ισχύει $x+1 \leq 0$ και $x-1 < 0$, οπότε θα ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned}
 f'(x) > 0 &\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{(x-1)^2+1} > (x-1)\sqrt{(x+1)^2+1} \\
 &\Leftrightarrow \left((x+1)\sqrt{(x-1)^2+1} \right)^2 < \left((x-1)\sqrt{(x+1)^2+1} \right)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x+1)^2 \left((x-1)^2+1 \right) < (x-1)^2 \left((x+1)^2+1 \right) \\
 &\Leftrightarrow \cancel{(x+1)^2(x-1)^2} + (x+1)^2 < \cancel{(x-1)^2(x+1)^2} + (x-1)^2 \\
 &\Leftrightarrow x < 0 \ \& \ x \leq -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1].
 \end{aligned}$$

Επομένως θα ισχύει:

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, -1] \quad (2)$$

- Αν $x \in (-1, 1)$, τότε θα ισχύει $x+1 > 0$ και $x-1 < 0$, οπότε θα είναι $f'(x) > 0$. Επομένως θα ισχύει:

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (-1, 1). \quad (3)$$

- Αν $x \in [1, +\infty)$, τότε θα ισχύει $x+1 > 0$ και $x-1 \geq 0$, οπότε θα ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{(x-1)^2 + 1} > (x-1)\sqrt{(x+1)^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \left((x+1)\sqrt{(x-1)^2 + 1} \right)^2 > \left((x-1)\sqrt{(x+1)^2 + 1} \right)^2 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 \left((x-1)^2 + 1 \right) > (x-1)^2 \left((x+1)^2 + 1 \right) \\ &\Leftrightarrow \cancel{(x+1)^2 (x-1)^2} + (x+1)^2 > \cancel{(x-1)^2 (x+1)^2} + (x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \ \& \ x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty). \end{aligned}$$

Επομένως θα ισχύει:

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in [1, +\infty) \quad (4)$$

Άρα, λόγω των (2), (3) και (4), θα ισχύει:

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε η συνάρτηση f θα είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Επειδή, επιπλέον, η f είναι συνεχής και ισχύει:

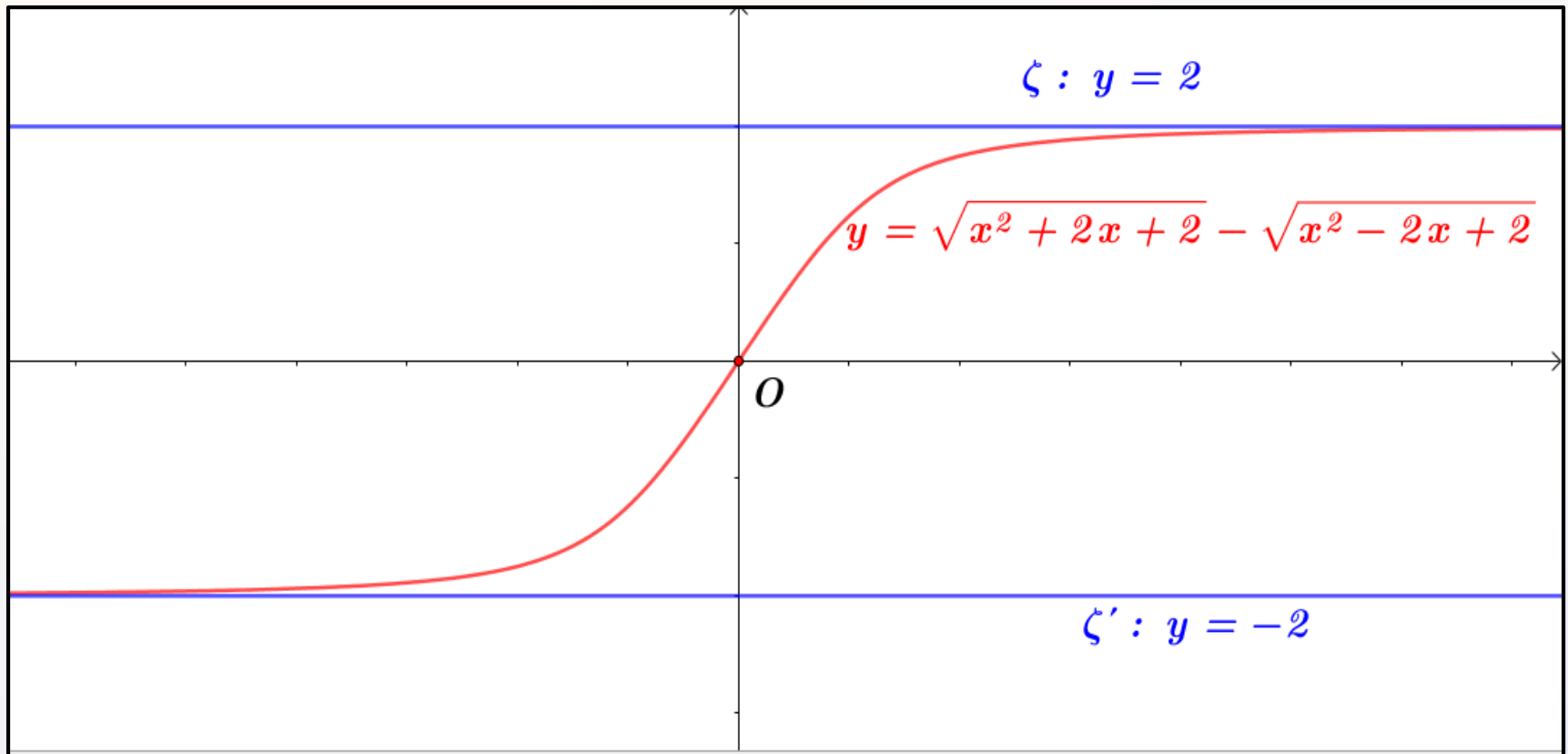
- $$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4\cancel{x}}{-\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} \right)} = \frac{4}{-2} = -2 \end{aligned}$$

- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\cancel{x}}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} \right)} = \frac{4}{2} = 2,$$

το σύνολο τιμών της θα είναι ίσο με $f(\mathbb{R}) = (-2, 2)$ (ΣΧΗΜΑ 1.)



ΣΧΗΜΑ 1.

ΘΕΜΑ 6^ο

**Μέγιστο και Ελάχιστο υπό
Συνθήκη Συνάρτησης δύο
Μεταβλητών**

ΑΣΚΗΣΗ:

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \quad (1)$$

για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ για τα οποία ισχύει:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (2)$$

ΠΗΓΗ: Μαθηματικά Α' ΔΕΣΜΗΣ, σελ. 203, άσκ. 2 γενική

ΛΥΣΗ:

Αν θέσουμε $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = m$, τότε το πρόβλημα ανάγεται στο να βρούμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $m \in \mathbb{R}$ για την οποία έχει λύση το σύστημα:

$$(\Sigma): \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 & (3) \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = m & (4). \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 6^ο (1^η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ)

α' τρόπος (Με Διανύσματα):

Αν (x, y) είναι μια λύση του συστήματος (Σ) , τότε, λόγω της (4), θα ισχύει:

$$m = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \vec{\alpha} \cdot \vec{u}, \text{ με } \vec{\alpha} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ \& } \vec{u} = (x, y) \quad (5)$$

Επειδή όμως

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{u} &= |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{u}| \text{ συν}(\vec{\alpha}, \vec{u}) \\ &= 1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \text{συν}(\vec{\alpha}, \vec{u}) \stackrel{(3)}{=} 2 \cdot \text{συν}(\vec{\alpha}, \vec{u}), \end{aligned}$$

λόγω της (7), θα είναι

$$m = 2 \cdot \text{συν}(\vec{\alpha}, \vec{u}),$$

οπότε θα ισχύει:

$$-2 \leq m \leq 2, \quad (6)$$

- Η αριστερή ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν ισχύει $\text{συν}(\vec{\alpha}, \vec{u}) = -1$, που συμβαίνει, αν και μόνο αν $\vec{u} \uparrow \downarrow \vec{\alpha}$. Όμως:
 $\vec{u} \uparrow \downarrow \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \vec{\alpha}, \lambda < 0$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \lambda \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda\sqrt{3}}{2} \right), \lambda < 0.$$

οπότε θα είναι:

$$x = \frac{\lambda}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{\lambda\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda < 0. \quad (7)$$

Επομένως, λόγω της (4), για $m = -2$, θα ισχύει

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\lambda\sqrt{3}}{2} = -2, \text{ απ' όπου προκύπτει ότι}$$

$\lambda = -2$, οπότε, λόγω της (7), η μοναδική πιθανή λύση

του συστήματος (Σ) είναι το ζεύγος $(-1, -\sqrt{3})$, η

οποία αποδεικνύεται με δοκιμή ότι είναι δεκτή.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ελάχιστη τιμή του m ,

άρα και της παράστασης $f(x, y) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$, είναι

ίση με -2 και παρουσιάζεται για $(x, y) = (-1, -\sqrt{3})$

- Η δεξιά ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν είναι $\text{συν}(\vec{\alpha}, \vec{u}) = 1$, που συμβαίνει, αν και μόνο αν

$\vec{u} \uparrow \uparrow \vec{\alpha}$. Όμως:

$$\vec{u} \uparrow \uparrow \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \vec{\alpha}, \lambda > 0$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \lambda \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda\sqrt{3}}{2} \right), \lambda > 0.$$

οπότε θα είναι:

$$x = \frac{\lambda}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{\lambda\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda > 0. \quad (8)$$

Επομένως, λόγω της (4), για $m=2$, θα ισχύει

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\lambda\sqrt{3}}{2} = 2, \text{ απ' όπου προκύπτει ότι } \lambda = 2,$$

οπότε, λόγω της (8), η μοναδική πιθανή λύση του συστήματος (Σ) είναι το ζεύγος $(1, \sqrt{3})$, η οποία

αποδεικνύεται με δοκιμή ότι είναι δεκτή.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η μέγιστη τιμή του m ,

άρα και της παράστασης $f(x, y) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$, είναι

ίση με 2 και παρουσιάζεται για $(x, y) = (1, \sqrt{3})$. ■

β' τρόπος (Με Αναλυτική Γεωμετρία):

Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$ παριστάνει κύκλο C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $R = 2$, ενώ η εξίσωση

$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = m$ παριστάνει ευθεία ε_m η οποία είναι

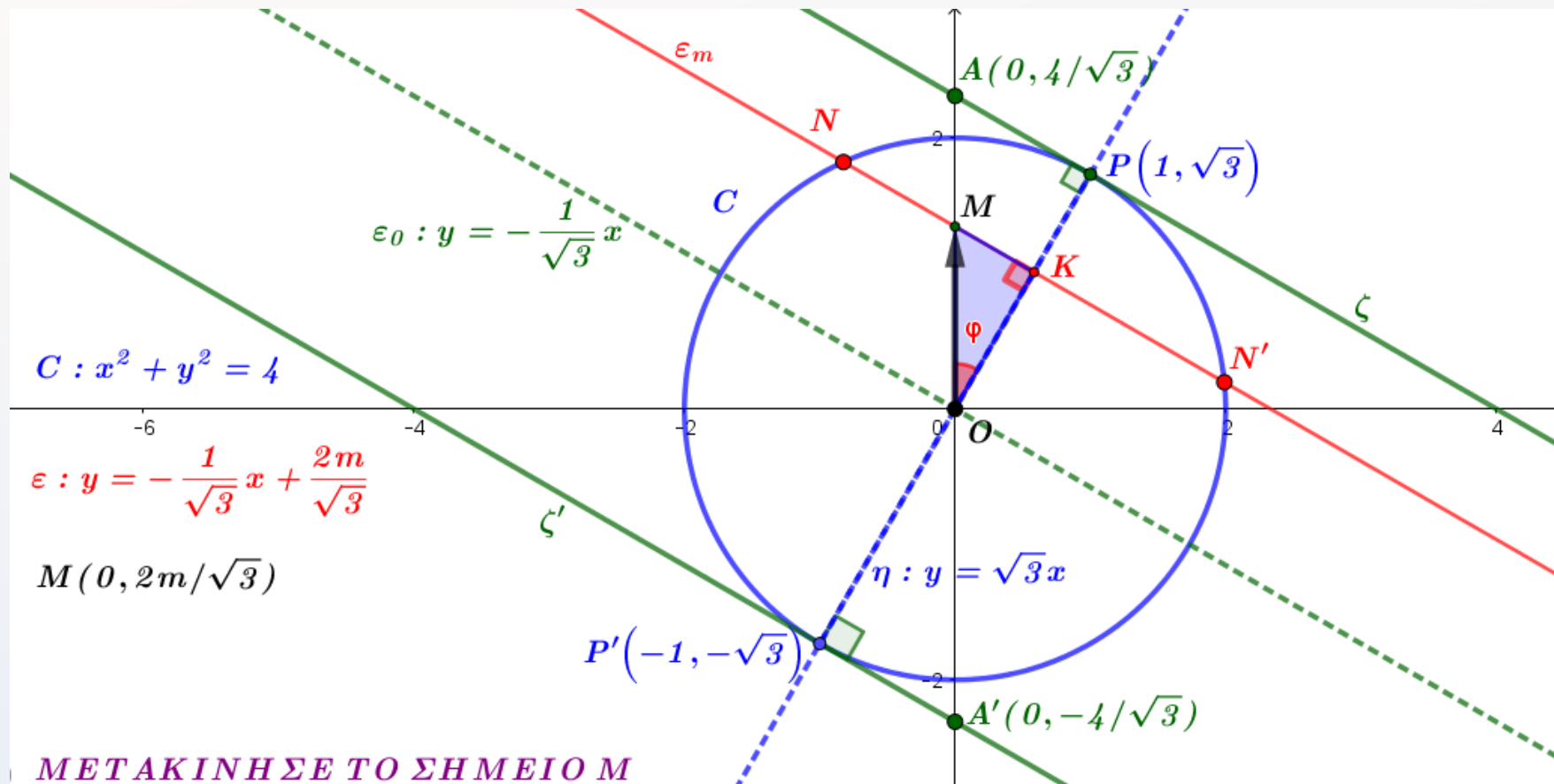
παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_0 : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$, για όλες τις

τιμές του $m \in \mathbb{R}$, και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο

$M\left(0, \frac{2m}{\sqrt{3}}\right)$, αφού ισχύει η ισοδυναμία:

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = m \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2m}{\sqrt{3}}.$$

ΘΕΜΑ 6^ο (2^η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ)



Επομένως το m μεγιστοποιείται (αντιστοίχως ελαχιστοποιείται), αν και μόνο αν μεγιστοποιηθεί (αντιστοίχως, ελαχιστοποιηθεί) το $\frac{2m}{\sqrt{3}}$, που συμβαίνει

αν και μόνο αν η ευθεία ε_m πάρει τη θέση της εφαπτομένης ζ (αντιστοίχως της εφαπτομένης ζ') του κύκλου C (ΣΧΗΜΑ 1.).

Όμως ισχύει:

$$\varepsilon_m \equiv \zeta \quad \text{ή} \quad \varepsilon_m \equiv \zeta' \Leftrightarrow d(O, \varepsilon_m) = R \Leftrightarrow \frac{\left| \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 - m \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow |m| = 2 \qquad \Leftrightarrow m = -2 \quad \text{ή} \quad m = 2$$

Επομένως:

- Η μέγιστη τιμή του m , άρα και της παράστασης

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad \text{είναι ίση με } 2 \text{ και}$$

παρουσιάζεται για $(x, y) = (1, \sqrt{3})$, που είναι λύση

$$\text{του συστήματος } (\Sigma): \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = m \end{cases}, \text{ αν θέσουμε}$$

$$m = 2, \text{ ενώ}$$

- Η ελάχιστη τιμή του m , άρα και της παράστασης

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \quad \text{είναι ίση με } -2 \quad \text{και}$$

παρουσιάζεται για $(x, y) = (-1, -\sqrt{3})$, που είναι

$$\text{λύση του συστήματος } (\Sigma): \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = m \end{cases}, \quad \text{αν}$$

θέσουμε $m = -2$. ■

γ' τρόπος (Με Τριγωνομετρία):

Επειδή

$$x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2\sigma\upsilon\nu\vartheta \quad \& \quad y = 2\eta\mu\vartheta, \quad \vartheta \in [0, 2\pi),$$

το σύστημα (Σ) γράφεται ισοδύναμα:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sigma\upsilon\nu\vartheta \quad \& \quad y = 2\eta\mu\vartheta, \quad \vartheta \in [0, 2\pi) \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sigma\upsilon\nu\vartheta \quad \& \quad y = 2\eta\mu\vartheta \\ 2\left(\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\vartheta + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu\vartheta\right) = m \end{cases}, \vartheta \in [0, 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sigma\upsilon\nu\vartheta \quad \& \quad y = 2\eta\mu\vartheta \\ 2\left(\eta\mu\frac{\pi}{6} \cdot \sigma\upsilon\nu\vartheta + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \cdot \eta\mu\vartheta\right) = m \end{cases}, \vartheta \in [0, 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sigma\upsilon\nu\vartheta \quad \& \quad y = 2\eta\mu\vartheta & (11) \\ m = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + \vartheta\right) & (12) \end{cases}, \vartheta \in [0, 2\pi)$$

ΣΥΝΕΠΩΣ:

- Η μέγιστη τιμή του m , άρα και της παράστασης

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \text{ είναι ίση με } \max m = 2 \text{ και}$$

παρουσιάζεται, όταν είναι $\frac{\pi}{6} + \vartheta = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή

όταν $\vartheta = \frac{\pi}{3}$, ή ισοδύναμα, λόγω της (11), όταν

$$(x, y) = (1, \sqrt{3}), \text{ ενώ}$$

- Η ελάχιστη τιμή του m , άρα και της παράστασης

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \text{ είναι ίση με } \min m = -2 \text{ και}$$

παρουσιάζεται όταν είναι $\frac{\pi}{6} + \vartheta = \frac{3\pi}{2}$, δηλαδή

όταν $\vartheta = \frac{4\pi}{3}$, ή ισοδύναμα, λόγω της (11), όταν

$$(x, y) = (-1, -\sqrt{3})$$



δ' τρόπος (Με Άλγεβρα):

Είναι:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2m}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4 \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2m}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - m \cdot x + (m^2 - 3) = 0 & (9) \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2m}{\sqrt{3}} & (10) \end{cases}$$

Επομένως το σύστημα (Σ) έχει λύση, αν και μόνο αν η εξίσωση (9) έχει πραγματική λύση, που συμβαίνει, αν και μόνο αν η διακρίνουσα Δ αυτής είναι μη αρνητική. Όμως:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4(m^2 - 3) \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

Συνεπώς:

- Η μέγιστη τιμή του m , άρα και της παράστασης

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \text{ είναι ίση με } \max m = 2 \text{ και}$$

παρουσιάζεται για $(x, y) = (1, \sqrt{3})$, που είναι λύση

του συστήματος των εξισώσεων (9) και (10), αν θέσουμε $m = 2$, ενώ

- Η ελάχιστη τιμή του m , άρα και της παράστασης

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \text{ είναι ίση με } \min m = -2 \text{ και}$$

παρουσιάζεται για $(x, y) = (-1, -\sqrt{3})$, που είναι

λύση του συστήματος των εξισώσεων (9) και (10), αν θέσουμε $m = -2$. ■

Ευχαριστώ