

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

8ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ 2023-2024

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, με $\alpha > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \alpha^x \cdot \ln \alpha \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat .

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για μία αντιστρέψιμη συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in f(A)$.

β) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$.

γ) Η γραφική παράσταση κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης τρίτου βαθμού δεν έχει ασύμπτωτες.

δ) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

ε) Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε η C_f δέχεται στο (α, β) τουλάχιστον μία οριζόντια εφαπτομένη.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \frac{2x-1}{3-x} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln x \quad \text{αντίστοιχα.}$$

B1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .

Μονάδες 6

B2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sin f(x)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

B3. Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ και να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $h(x) = \ln(2x - 1) - \ln(3 - x)$ είναι ίσες.

Μονάδες 8

B4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = f^{-1}(2024)$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - x - 1}{x} & , \text{ αν } x < 0 \\ 0 & , \text{ αν } x = 0 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & , \text{ αν } x > 0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Γ2. Για κάθε $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha^2 + 1} + \frac{1}{e^\alpha} + \alpha > 2.$$

Μονάδες 3

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Μονάδες 5

Γ4. Δίνεται, επιπλέον, η συνάρτηση:

$$g(x) = 2^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και ότι (ε) : $y = \frac{1}{2} \cdot x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την (ε), τη C_g , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 2$.

Μονάδες 5

Γ5. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(2^x) - f(5^x) = f(3^x) - f(4^x)$$

Μονάδες 5

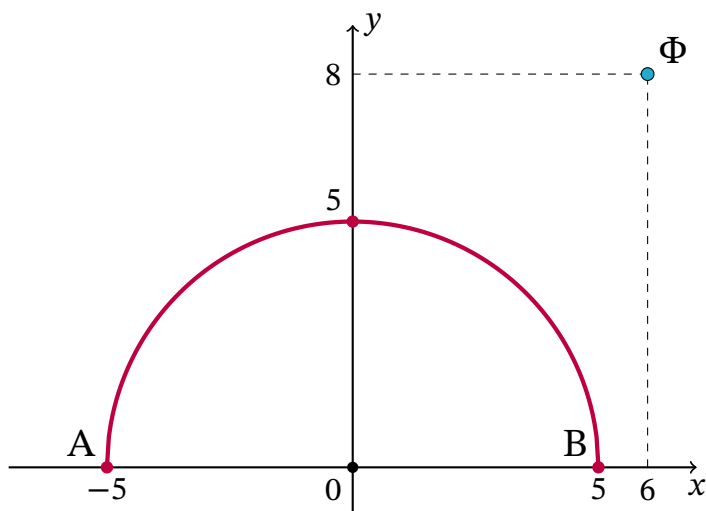
ΘΕΜΑ Δ

Σε μία επίδειξη μόδας, θα παρελάσουν μοντέλα ακολουθώντας μία ημικυκλική διαδρομή από το σημείο Α έως το σημείο Β, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- Δ1.** Να ορίσετε τη συνάρτηση f που εκφράζει την καμπύλη πάνω στην οποία θα κινηθούν και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} dx.$$

Μονάδες 2+2=4



- Δ2.** Αν γνωρίζετε ότι $f(x) = \sqrt{25-x^2}$, με $D_f = [-5, 5]$,

- α)** να αποδείξετε ότι, για κάθε $\alpha, \beta \in D_f$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ τέτοιο, ώστε:

$$(f(\alpha) - 5) \cdot \eta\mu x_0 = f(\beta) \cdot (2x_0 - \pi).$$

- β)** Αν, επιπλέον, τα α και β δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f στο D_f , τότε να αποδείξετε ότι το x_0 είναι μοναδικό.

Μονάδες 4+2=6

- Δ3.** Αν F μία παράγουσα της f στο $[-5, 0]$, να αποδείξετε ότι:

$$2 \int_{-5}^0 F(x) dx > 10F(0) - 125.$$

Μονάδες 5

- Δ4.** Ένας φωτογράφος βρίσκεται στη θέση $\Phi(6, 8)$. Σε ποιο σημείο της διαδρομής θα πρέπει να στοχεύσει με το φακό του, ώστε να πετύχει την κοντινότερη δυνατή λήψη;

Μονάδες 6

- Δ5.** Αν η τετμημένη της θέσης M ενός μοντέλου αυξάνεται κατά 1 m κάθε δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M , τη χρονική στιγμή που θα ληφθεί η φωτογραφία.

Μονάδες 4