

2^η ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = (x^{-v})' = -vx^{-v-1}$.

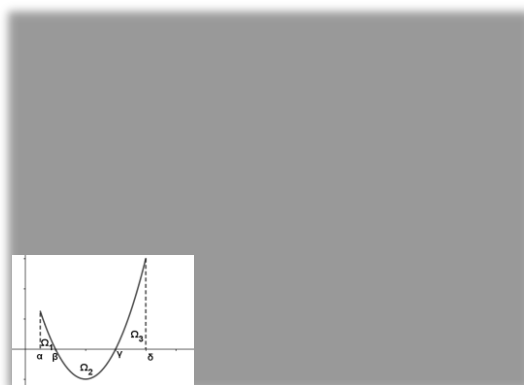
((Μονάδες 5)

A2. Ποιές είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε διάστημα Δ ;
(Μονάδες 3)

A3. Θεωρούμε την πρόταση
«Αν για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ισχύει $f'(x) = 0$ τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση».
Να χαρακτηρίσετε την πρόταση αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντηση.
(Μονάδες 1+3)

A4. Στο διπλανό σχήμα δίνονται η C_f και
τα εμβαδά $E(\Omega_1) = 3$,
 $E(\Omega_2) = 7$, $E(\Omega_3) = 6$.

Τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^\delta f(x)dx$
ισούται με (Να επιλέξετε το σωστό)
Α. 1 Β. 2 Γ. 4 Δ. 16



(Μονάδες 3)

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
(Μονάδες 10)

- i. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A και B αντιστοίχως, τότε το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g .
- ii. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της f .
- iii. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ , δε μηδενίζεται και υπάρχει x_0 με $f(x_0) < 0$ τότε το διάγραμμα της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- iv. Εποπτικά, μία συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , όταν το κινητό, που κινείται πάνω στη C_f , για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά τη θετική φορά.
- v. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ με $\int_a^\beta f(x)dx = 0$ και η f δεν είναι παντού 0. Τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x - 4 + \frac{1}{x}$, $x > 0$.

- i. Να δείξετε ότι το διάγραμμα της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$ και να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη (ε).

(5 Μονάδες)

- ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{1 + xf(x)})$.

(4 Μονάδες)

- iii. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και το ακρότατο της f .

5 Μονάδες)

- iv. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή και να σχεδιάσετε πρόχειρα το διάγραμμά της.

(5 Μονάδες)

- v. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , την ευθεία (ε): $y = 4x - 4$ και τις ευθείες $x = 1, x = 2$.

(6 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) της C_f με την μικρότερη κλίση και μετά να δείξετε ότι η (ε) διαπερνά τη C_f .

(5 Μονάδες)

- ii. Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία (ε): $y = 9x - 8$.

(5 Μονάδες)

- iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \ln x}{\eta \mu x}$.

(5 Μονάδες)

- iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{f(x) - 6}{2 + x^2} dx$.

(5 Μονάδες)

- v. Θεωρούμε επιπλέον συνάρτηση g με παράγωγο $g'(x) = f(x) + ax - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου a ώστε η g να είναι κυρτή.

(5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με τις ιδιότητες

- Η f είναι κυρτή.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = 3$.
- i. Να δείξετε ότι η f έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο, έστω ξ , με $\xi^2 < \xi$ το οποίο είναι θέση ελάχιστου.

(Μονάδες 5)

Δίνεται επίσης ότι $f(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{2}{x} \right)$.

- ii. Δείξτε ότι η ευθεία $(\varepsilon) : y = 3x - 1$ εφάπτεται στη C_f στο $x_0 = 1$.

(Μονάδες 4)

- iii. Να εξετάσετε αν το διάγραμμα της f

(α) διέρχεται από το σημείο $\Sigma(3, 3 + f(2))$.

(Μονάδες 5)

(β) έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη.

(Μονάδες 3)

- iv. Να δείξετε ότι $\int_0^1 \left(2^{\frac{3}{2}x^2 - x + 1} \cdot \ln 2^{f(x)} \right) dx > 2(\sqrt{2} - 1)$.

(Μονάδες 5)

- v. Να βρείτε την παραπάνω συνάρτηση f , αν επιπλέον ισχύει $f''(x) = 6$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ