



ΑΡΧΗ 1ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

Γ' ΤΑΞΗ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 01 ΜΑΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ-

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι, αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$.

Μονάδες 9

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , μπορεί να έχει δυο κοινά σημεία με τον άξονα $y'y$.

β. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και

$\gamma \in (a, \beta)$ τότε ισχύει $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$.

γ. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n+1}} = +\infty$.

δ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ και οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε όλο το πεδίο ορισμού τους, τότε

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΤΕΛΟΣ 1ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

Γ' ΤΑΞΗ

ε. Ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}$, για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{e^{2ax} + e^{ax} + 1}{e^{2ax} + 1} - a$, $a \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του $a \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $a=1$.

B2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δυο σημεία καμψής.

Μονάδες 6

B4. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες $x=-2$ και $x=-1$ είναι μικρότερο από το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)\eta\mu x = x$ για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\eta\mu x}, & x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

ΑΡΧΗ 3ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

Γ' ΤΑΞΗ

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης
 $\sqrt{2}f(x) = \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ4. Αν $g(x) = \ln x$, να ορίσετε την σύνθεση της συνάρτησης f' με την g .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h) - f(0)}{h} = 0$
για την οποία ισχύει $f(x) - f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$ για κάθε $x \geq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - \eta\mu x$, $x \geq 0$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu(\ln \alpha) = \alpha - 1$, $\alpha \geq 1$.

Μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{\pi}{2}} - 1 < \frac{e^{\pi} + 1}{2}$.

Μονάδες 4

Δ5. Σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f έτσι ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του να δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = \alpha^2(t) + 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η ταχύτητα της τεταγμένης του σημείου να είναι ίση με 1 μονάδα/sec.

Μονάδες 5