

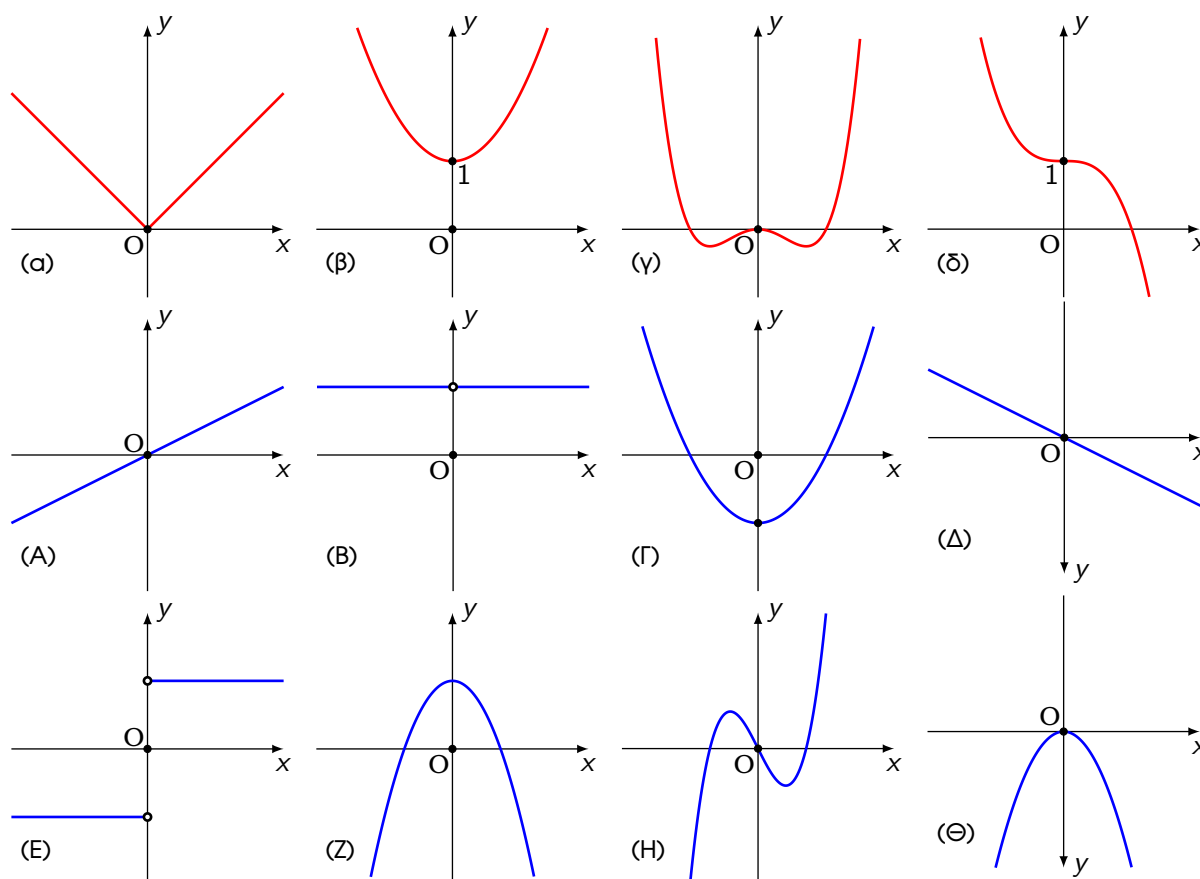
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΖΗΤΗΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

- A2.** Να αντιστοιχίσετε κάθε μια από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ που είναι η παράγωγός της.



Μονάδες 4

- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Κάθε συνάρτηση f που έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
- β) Κάθε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ είναι σταθερή.
- γ) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.
- δ) Αν μια συνάρτηση f δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα Δ και αλλάζει πρόσημο στο διάστημα αυτό, τότε δεν είναι συνεχής στο Δ .

- ε) Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ υπάρχει ακριβώς ένα σημείο στο οποίο δεν είναι συνεχής.

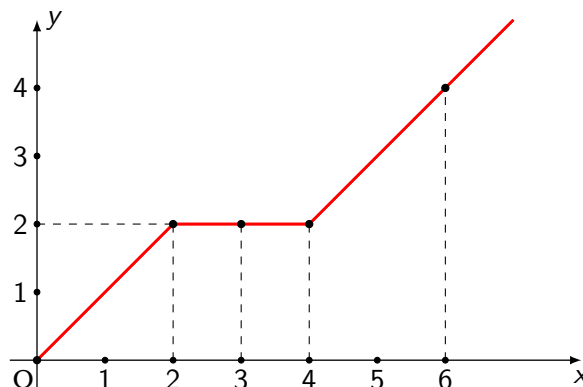
Μονάδες 10

- A4.** Έστω η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Να αντιγράψετε στο τετράδιό σας τα ολοκληρώματα και να συμπληρώσετε τα κενά τετράγωνα με τις τιμές των ολοκληρωμάτων:

$$\int_0^2 f(x) dx = \square \quad \int_0^3 f(x) dx = \square$$

$$\int_4^6 f(x) dx = \square \quad \int_0^6 f(x) dx = \square$$



Μονάδες 4

ΖΗΤΗΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $h(x) = \frac{x-1}{x+1}$ και $g(x) = e^x$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση h αντιστρέφεται και η αντίστροφή της είναι $h^{-1}(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $x \in [-1, 1)$.

Μονάδες 6

- β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h και h^{-1} δεν έχουν κοινά σημεία.

Μονάδες 3

- B2.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = h \circ g$.

Μονάδες 4

Δίνεται ότι $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- B3.** Να αποδείξετε ότι:

- α) Η συνάρτηση f είναι περιπτή.

Μονάδες 3

β) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.

Μονάδες 4

- B4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται ανάμεσα σε αυτές.

Μονάδες 5

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2) \cdot \ln x$, $x > 0$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, 0)$.

Μονάδες 4

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι:

- α)** Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1, 2]$.

Μονάδες 2

- β)** Υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 > 0$ στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο

Μονάδες 4

- γ)** $f(x) + \frac{(x_0 - 2)^2}{x_0} \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 4

- Γ3.** Να εξετάσετε αν η εξίσωση $2f(x) + x = 1 - \frac{(x_0 - 2)^2}{x_0}$ έχει λύση στο $(0, +\infty)$.

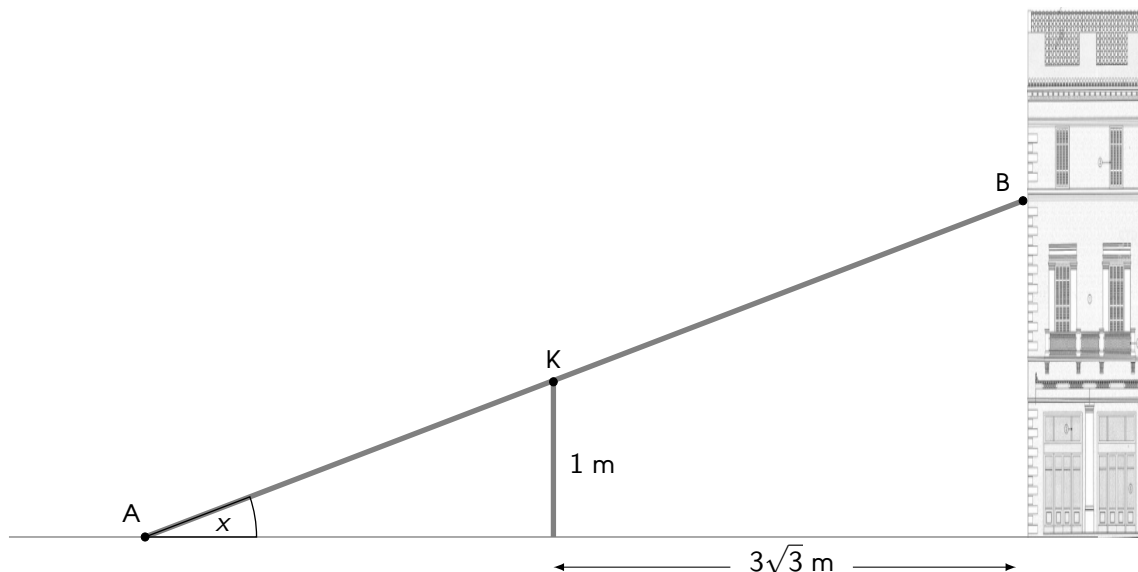
Μονάδες 5

- Γ4.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{\eta\mu x}{f(x) - f(x_0)} + \sigma\upsilon\nu \left(\frac{x}{x - x_0} \right) \right]$.

Μονάδες 6

ΖΗΤΗΜΑ Δ

Ο κατακόρυφος τοίχος ύψους 1 m του παρακάτω σχήματος απέχει $3\sqrt{3}$ m από ένα ψηλό κτήριο. Ένα δοκάρι στηρίζεται στα αριστερά του τοίχου και φτάνει μέχρι το κτήριο. Αν θεωρήσουμε ότι το πάχος του τοίχου όπως και του δοκαριού είναι αμελητέα και x rad, με $0 < x < \frac{\pi}{2}$, είναι η γωνία που σχηματίζει το δοκάρι AB με το έδαφος όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τότε:



- Δ1.** Να εκφράσετε τα ΚΑ και ΚΒ συναρτήσει της γωνίας x και να αποδείξετε ότι το μήκος ΑΒ του δοκαριού, σε μέτρα, συναρτήσει της γωνίας x είναι

$$(AB) = f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{3\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Μονάδες 3

- Δ2.** Να βρείτε το ελάχιστο μήκος του δοκαριού ΑΒ που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε.

Μονάδες 5

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο τιμές της γωνίας x , για τις οποίες το μήκος ΑΒ του δοκαριού γίνεται 10 m.

Μονάδες 4

- Δ4.** Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha \leq x \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \leq \alpha + \beta - x \leq \beta$.

Μονάδες 2

β) Η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 3

γ) $2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq f(x) + f(\alpha + \beta - x) \leq f(\alpha) + f(\beta)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 5

δ) $(\beta - \alpha) \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < (\beta - \alpha) \cdot \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$.

Μονάδες 3

Καλή επιτυχία στις Πανελλήνιες Εξετάσεις

Νίκος Παπαγγελής

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο.

A2. $\alpha \rightarrow E \quad \beta \rightarrow A \quad \gamma \rightarrow H \quad \delta \rightarrow \Theta$

A3. $\Lambda - \Lambda - \Lambda - \Sigma - \Lambda$

A4. 2 - 4 - 6 - 12

ΖΗΤΗΜΑ Β

B1. α) Η συνάρτηση h είναι συνεχής και για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει

$$h'(x) = \dots = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1 - 1$. Συνεπώς η συνάρτηση h αντιστρέφεται. Έχουμε:

$$h(0) = \dots = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \dots = 1$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι

$$h([0, +\infty)) = [h(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)) = [-1, 1)$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης h^{-1} είναι το διάστημα $[-1, 1)$.

Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και για κάθε $y \in [-1, 1)$ έχουμε:

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \frac{1+y}{1-y}$$

Επομένως η αντίστροφη συνάρτηση της h είναι η $h^{-1}(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $x \in [-1, 1)$.

β) Στο διάστημα $[0, 1)$, θεωρούμε την εξίσωση

$$h(x) = h^{-1}(x) \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 = -1$$

που είναι αδύνατη. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h και h^{-1} δεν έχουν κοινά σημεία.

B2. Πρέπει $x \in D_g$ και $g(x) \in D_h$.

$$x \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) \in D_h \Leftrightarrow e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Επομένως η συνάρτηση $f = h \circ g$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) = \frac{g(x)-1}{g(x)+1} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

Επομένως $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

B3. α) Για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}$ ισχύουν $-x \in \mathbb{R}$ και

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{\frac{1 - e^x}{e^x}}{\frac{1 + e^x}{e^x}} = -f(x)$$

Άρα η f είναι περιπτή.

β) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ θέτουμε

$$x = -u$$

οπότε

$$dx = -du$$

$$x = -1 \Rightarrow u = 1, \quad x = 1 \Rightarrow u = -1$$

Επομένως

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx = - \int_1^{-1} f(-u) du = - \int_1^{-1} f(u) du = - \int_{-1}^1 f(x) dx = -I$$

Επομένως

$$I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$$

B4. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

οπότε η ευθεία $y = -1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

οπότε η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Για να αποδείξουμε ότι η C_f βρίσκεται ανάμεσα στις ασύμπτωτες, αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει $-1 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$-1 < f(x) < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{e^x - 1}{e^x + 1} < 1 \Leftrightarrow -e^x - 1 < e^x - 1 < e^x + 1 \dots$$

που ισχύει.

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = ((x-2) \cdot \ln x)' = \dots = \ln x + 1 - \frac{2}{x}$$

και

$$f''(x) = \left(\ln x + 1 - \frac{2}{x} \right)' = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, 0)$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 1$$

Γ2. α) Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ και $f(1) = f(2) = 0$. Επομένως για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1, 2]$.

β) Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1 < x_0 < 2$. Επομένως x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

Επίσης αν $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) = 0$ και αν $0 < x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) = 0$.

Η ρίζα και το πρόσημο της f' , καθώς και η μονοτονία και η θέση του ελαχίστου της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$		$f(x_0)$	

Ο.Ε.

Επομένως, υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 > 0$ στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο.

γ) Ισχύει

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 + 1 - \frac{2}{x_0} = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{2 - x_0}{x_0}$$

οπότε

$$f(x_0) = (x_0 - 2) \cdot \ln x_0 = (x_0 - 2) \cdot \frac{2 - x_0}{x_0} = -\frac{(x_0 - 2)^2}{x_0}$$

Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{(x_0 - 2)^2}{x_0} \Leftrightarrow f(x) + \frac{(x_0 - 2)^2}{x_0} \geq 0.$$

Γ3. Για κάθε $x > 0$ ισχύουν:

$$f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{(x_0 - 2)^2}{x_0} \quad (1)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $x = x_0$ και επειδή η f είναι κυρτή η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη στο σημείο $A(1, 0)$, με εξαίρεση το σημείο αυτό. Επομένως

$$f(x) \geq -x + 1 \quad (2)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $x = 1$. Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε

$$2f(x) > -x + 1 - \frac{(x_0 - 2)^2}{x_0} \Leftrightarrow 2f(x) + x > 1 - \frac{(x_0 - 2)^2}{x_0}$$

επειδή οι ισότητες δεν ισχύουν συγχρόνως. Επομένως η εξίσωση $2f(x) + x = 1 - \frac{(x_0 - 2)^2}{x_0}$ δεν έχει λύση στο $(0, +\infty)$.

Γ4. Για κάθε x κοντά στο x_0 ισχύει:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{x-x_0}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{f(x)-f(x_0)} - 1 &\leq \frac{\eta\mu x}{f(x)-f(x_0)} + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{x-x_0}\right) \end{aligned}$$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 > 0$$

επειδή $x_0 \in (1, 2) \subset (0, \pi)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

και

$$f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$$

κοντά στο x_0 . Επομένως

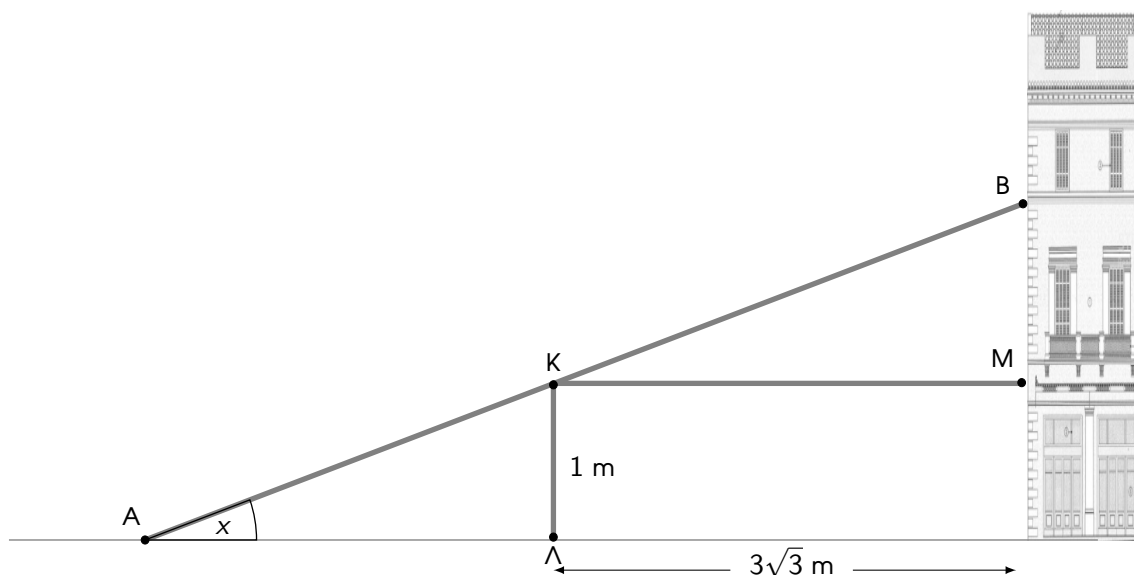
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\eta\mu x}{f(x) - f(x_0)} - 1 \right) = +\infty,$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{\eta\mu x}{f(x) - f(x_0)} + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{x-x_0}\right) \right] = +\infty$$

ΖΗΤΗΜΑ Δ

Δ1. Σύμφωνα με το σχήμα φέρνουμε τις καθέτους από το Κ προς το έδαφος, ΚΛ και προς το κτίριο ΚΜ αντίστοιχα.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΑ έχουμε:

$$\eta\mu x = \frac{ΚΛ}{ΑΚ} \Leftrightarrow ΑΚ = \frac{1}{\eta\mu x}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΜΒ έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{ΚΜ}{ΚΒ} \Leftrightarrow ΚΒ = \frac{3\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu x}$$

Επομένως το μήκος ΑΒ του δοκαριού, σε μέτρα, συναρτήσει της γωνίας x είναι

$$(ΑΒ) = f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{3\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Δ2. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\eta\mu x} + \frac{3\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \dots = \frac{(\sqrt{3} \cdot \eta\mu x)^3 - (\sigma\upsilon\nu x)^3}{(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)^2}$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (\sqrt{3} \cdot \eta\mu x)^3 = (\sigma\upsilon\nu x)^3 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \epsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Η ρίζα και το πρόσημο της f' , καθώς και η μονοτονία και η θέση του ελαχίστου της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$		$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$	

Ο.Ε.

Επομένως, το ελάχιστο μήκος του δοκαριού ΑΒ που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dots = 8 \text{ m}$$

Δ3. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \dots = +\infty$$

οπότε ,

$$f\left(\left(0, \frac{\pi}{6}\right)\right] = [8, +\infty) \text{ και } f\left(\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [8, +\infty)$$

τα οποία περιέχουν την τιμή 10. Επομένως υπάρχουν ακριβώς δύο τιμές της γωνίας x , για τις οποίες το μήκος ΑΒ του δοκαριού γίνεται 10 m.

Δ4. α) Έχουμε:

$$\alpha \leq x \leq \beta \Leftrightarrow -\alpha \geq -x \geq -\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta - \alpha \geq \alpha + \beta - x \geq \alpha + \beta - \beta \Leftrightarrow \alpha \leq \alpha + \beta - x \leq \beta$$

β) Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$f''(x) = \left(\frac{(\sqrt{3} \cdot \eta\mu x)^3 - (\sigma\upsilon\nu x)^3}{(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)^2} \right)' = \dots > 0$$

οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) + f(\alpha + \beta - x), \quad x \in [\alpha, \beta]$$

Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ έχουμε

$$g'(x) = (f(x) + f(\alpha + \beta - x))' = f'(x) - f'(\alpha + \beta - x)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή, η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε και $1 - 1$. Έτσι έχουμε:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(\alpha + \beta - x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f'(\alpha + \beta - x) \Leftrightarrow x = \alpha + \beta - x \Leftrightarrow x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(\alpha + \beta - x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(\alpha + \beta - x) \Leftrightarrow x > \alpha + \beta - x \Leftrightarrow x > \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(\alpha + \beta - x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\alpha + \beta - x) \Leftrightarrow x < \alpha + \beta - x \Leftrightarrow x < \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Η ρίζα και το πρόσημο της g' , καθώς και η μονοτονία και η θέση των ακροτάτων της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	α	$\frac{\alpha + \beta}{2}$	β
$g'(x)$	—	0	+
$g(x)$			
	O.M.	O.E.	O.M.

Έχουμε

$$g_{min} = g\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

και

$$g_{max} = g(\alpha) = g(\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$$

οπότε για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει

$$2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq g(x) \leq f(\alpha) + f(\beta) \Leftrightarrow$$

$$2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq f(x) + f(\alpha + \beta - x) \leq f(\alpha) + f(\beta)$$

γ) Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει

$$2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq f(x) + f(\alpha + \beta - x) \leq f(\alpha) + f(\beta)$$

και επειδή οι ισότητες ισχύουν μόνο για μεμονωμένες τιμές, έχουμε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) dx < \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + f(\alpha + \beta - x)) dx < \int_{\alpha}^{\beta} (f(\alpha) + f(\beta)) dx \Leftrightarrow$$

$$2(\beta - \alpha) \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx < (\beta - \alpha) \cdot (f(\alpha) + f(\beta)) \quad (1)$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx$ θέτουμε $u = \alpha + \beta - x$, οπότε $du = -dx$.

Για $x = \alpha \Rightarrow u = \beta$ και για $x = \beta \Rightarrow u = \alpha$, οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Επομένως, από τη σχέση (1) έχουμε

$$2(\beta - \alpha) \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < (\beta - \alpha) \cdot (f(\alpha) + f(\beta)) \Leftrightarrow$$

$$(\beta - \alpha) \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < (\beta - \alpha) \cdot \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$