

ΕΠΑΛ 2024 – ΣΤΑΣΙΝΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – 09/05/2024

ΘΕΜΑ Α

1) Να αποδείξετε ότι για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες :

i. $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, \kappa$

ii. $f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = 1$

2) Έστω $x_1 < x_2 < \dots < x_\kappa$, $\kappa \leq \nu$ οι διαφορετικές τιμές μιας μεταβλητής X , ενός δείγματος μεγέθους ν . Να συμπληρώσετε τους παρακάτω τύπους :

i. $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_\kappa = \underline{\hspace{2cm}}$

ii. $f_1\% + f_2\% + \dots + f_\kappa\% = \underline{\hspace{2cm}}$

iii. $f_i = \frac{\boxed{\hspace{1cm}}}{\boxed{\hspace{1cm}}}$ και ονομάζεται $\underline{\hspace{2cm}}$

iv. $\nu = \frac{\boxed{\hspace{1cm}}}{\boxed{\hspace{1cm}}}$ και ονομάζεται $\underline{\hspace{2cm}}$

v. $\nu_i = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ και ονομάζεται $\underline{\hspace{2cm}}$

vi. $N_1 = \underline{\hspace{2cm}}$

vii. $\nu_\kappa = N_\kappa - \underline{\hspace{2cm}}$

viii. $N_\kappa = \underline{\hspace{2cm}}$

ix. $F_1 = \underline{\hspace{2cm}}$

x. $f_\kappa = F_\kappa - \underline{\hspace{2cm}}$

xi. $F_k = \underline{\hspace{2cm}}$

xii. $f_i\% = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}$

xiii. Αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε :

$$\alpha_i = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \frac{\boxed{\hspace{1cm}}}{\boxed{\hspace{1cm}}} = 360^\circ \cdot \underline{\hspace{1cm}}$$

3) Να συμπληρώσετε κατάλληλα τα παρακάτω κενά :

i. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας $\underline{\hspace{2cm}}$ μεταβλητής.

ii. Στην περίπτωση που έχουμε μια ποσοτική και διακριτή μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το $\underline{\hspace{2cm}}$ συχνοτήτων.

iii. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των $\underline{\hspace{2cm}}$ όσο και των $\underline{\hspace{2cm}}$ δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.

iv. Όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις, η κατανομή τους μπορεί να περιγραφεί με το $\underline{\hspace{2cm}}$ στο οποίο οι τιμές παριστάνονται γραφικά σαν σημεία υπεράνω ενός οριζόντιου άξονα.

v. Το $\underline{\hspace{2cm}}$ ή $\underline{\hspace{2cm}}$ διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου μεγέθους.

vi. Η γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το λεγόμενο $\underline{\hspace{2cm}}$ συχνοτήτων.

vii. Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και ότι το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό (τείνει στο μηδέν), τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης, η οποία ονομάζεται $\underline{\hspace{2cm}}$ συχνοτήτων.

viii. Η διακύμανση είναι μια αξιόπιστη παράμετρος διασποράς, αλλά έχει ένα μειονέκτημα. Δεν εκφράζεται με τις μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις. Αν όμως πάρουμε θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, θα έχουμε ένα μέτρο διασποράς που θα εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού, όπως όλα τα μέτρα θέσης. Η ποσότητα αυτή λέγεται $\underline{\hspace{2cm}}$ και συμβολίζεται με $\underline{\hspace{1cm}}$.

ix. Ο $\underline{\hspace{2cm}}$ είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης, εκφράζεται επί τοις εκατό και παριστάνει ένα μέτρο σχετικής διασποράς των τιμών και όχι της απόλυτης διασποράς όπως για παράδειγμα η τυπική απόκλιση, και έχει τύπο : $CV = \underline{\hspace{1cm}}$.

x. Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε μια από τις ιδιότητες για την τυπική απόκλιση s είναι πως το εύρος ισούται περίπου με $R \approx \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -(x+a)(x+1)^2$, $a \in \mathbb{R}$.

- 1) Να δείξετε ότι $f'(x) = (x+1)(-3x-2a-1)$
- 2) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να βρείτε τη τιμή του πραγματικού αριθμού a .

Για $a = -2$:

- 3) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς μονοτονία και ακρότατα.
- 4) Να δείξετε ότι $f(x) \leq 4$ για κάθε $x > -1$ και να βρείτε τη διάμεσο των τιμών $f\left(\frac{3}{20}\right), f\left(\frac{17}{20}\right), f\left(\frac{1}{4}\right), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{13}{20}\right)$
- 5) Να μελετήσετε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής

κλάσεις	Κέντρα x_i	Συχνότητα	Αθροιστική συχνότητα				
$[0, 2)$		6					
$[2, 4)$			9				
$[4, 6)$							
$[6, 8)$							
$[8, 10)$							
Σύνολο							

όπου για τις αθροιστικές συχνότητες ισχύει ο τύπος $N_i = i^2 + 5i$, για $i = 3, 4, 5$.

- 1) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.
- 2) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο του παραπάνω δείγματος.
- 3) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα.
- 4) Αν $x_1, x_2, \dots, x_5$ οι τιμές της παραπάνω μεταβλητής είχαν $w_1 = 0,3$, $w_2 = 0,4$, $w_3 = 0,6$, $w_4 = 0,4$, $w_5 = 0,3$ αντίστοιχα συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), τότε υπολογίστε τον σταθμικό τους μέσο.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \neq 1 \\ 3x + \lambda, & x = 1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) Βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Για $\lambda = -1$

- 2) Με την βοήθεια του ορίου $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ να υπολογίσετε την τιμή $f'(1)$ καθώς και την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 1$.
- 3) Υποθέτουμε ότι ο χρόνος επίδρασης σε λεπτά ενός φαρμάκου που χορηγείται σε μικρά παιδιά, ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή, με μέση τιμή $\bar{x} = f(3)$ και τυπική απόκλιση $s = f'(1)$. Αφού δείξετε ότι $\bar{x} = 12$ και $s = 3$, σε πόσα από τα 4000 παιδιά που χορηγήθηκε το συγκεκριμένο φάρμακο, ο χρόνος επίδρασης ήταν τουλάχιστον 18 λεπτά;
- 4) Αν $x_1, x_2, \dots, x_{4000}$ είναι οι παραπάνω χρόνοι των 4000 παιδιών με $\bar{x} = 12$ και $s = 3$, να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό τον οποίο πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμία από τις παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_{4000}$, ώστε το δείγμα που θα προκύψει να είναι ομοιογενές.

Υποδείξεις

ΘΕΜΑ Α

1) Σελ. 65 σχολικό βιβλίο

2)

- i. v
- ii. 100
- iii. $\frac{v_i}{v}$
- iv. $\frac{v_i}{f_i}$
- v. $f_i \cdot v$
- vi. v_1
- vii. N_{k-1}
- viii. v
- ix. f_1
- x. F_{k-1}
- xi. 1
- xii. $100 \cdot f_i$
- xiii. $360 \cdot \frac{v_i}{v}, f_i$

3)

- i. ποιοτικής
- ii. διάγραμμα
- iii. ποιοτικών, ποσοτικών
- iv. σημειόγραμμα
- v. χρονόγραμμα, χρονολογικό
- vi. ιστόγραμμα
- vii. καμπύλη
- viii. τυπική απόκλιση, s
- ix. Συντελεστής μεταβολής, $\frac{s}{|\bar{x}|}$
- x. $6 \cdot s$

ΘΕΜΑ Β

- 1) Κανόνας γινομένου ή πράξεις στην συνάρτηση f , παράγωγο και παραγοντοποίηση
- 2) $f'(1) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a = -2$
- 3) Για κάθε $x > -1$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=1$ οπότε $f(x) \leq 4$ για κάθε $x > -1$
Είναι για $x \in [-1, 1]$ η $f \uparrow$ και $\frac{3}{20} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{13}{20} < \frac{17}{20} \Rightarrow f\left(\frac{3}{20}\right) < f\left(\frac{1}{4}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{13}{20}\right) < f\left(\frac{17}{20}\right)$ οπότε είναι
 $\delta = f\left(\frac{1}{2}\right) = \dots$
- 4) Μονοτονία ακρότατα για την συνάρτηση f' , οπότε πίνακα για f'', f'

ΘΕΜΑ Γ

- 1) Από τον τύπο $N_i = i^2 + 5i$, για $i = 3, 4, 5$, είναι $N_3 = 24$, $N_4 = 36$, $N_5 = 50$ οπότε

κλάσεις	Κέντρα x_i	Συχνότητα	Αθροιστική συχνότητα			
[0, 2)	1	6	6			
[2, 4)	3	3	9			
[4, 6)	5	15	24			
[6, 8)	7	12	36			
[8, 10)	9	14	50			
Σύνολο		50				

- 2) $\bar{x} = \frac{300}{50} = 6$ και η διάμεσος γραφικά μέσω του ιστογράμματος αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % και το πολύγωνο αυτού, είναι $\delta \approx 6,2$
- 3) $v_1 + v_2 + \dots + v_k = v = 50$
- 4) $\bar{x} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i} = \frac{10}{2} = 5$

ΘΕΜΑ Δ

- 1) f συνεχής στο πεδίο ορισμού της, άρα συνεχής και στο σημείο $x=1$, οπότε: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \dots$
- 2) $f'(1) = 3$ και εφαπτομένη: $y = 3x - 1$
- 3) Τουλάχιστον 18 λεπτά, το 2,5% των παιδιών, οπότε $2,5\% \cdot 4000 = 100$ παιδιά
- 4) Έστω $y_i = x_i + c$, $c > 0$ για $i = 1, 2, \dots, 4000$ οι νέοι χρόνοι. Τότε $\bar{y} = \bar{x} + c = 12 + c$ και $s_y = s_x = 3$.
Τότε όμως $CV_y \leq 10\% \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow c \geq 18$, άρα ο μικρότερος θετικός αριθμός $c = 18$

[Στασινός Παναγιώτης, για τις όποιες παρατηρήσεις – υποδείξεις : pstassinios@gmail.com](mailto:pstassinios@gmail.com)