



Διαγώνισμα Μαθηματικά

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΝΙΚΟΣ ΣΟΥΡΜΠΗΣ

22/05/2024

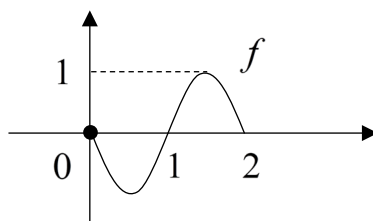
ΘΕΜΑ Α

A1) Έστω συνάρτηση f , συνεχής στο διάστημα Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο διάστημα Δ .

A2) Που βρίσκεται το λάθος : $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \stackrel{x=\frac{1}{u}}{=} \dots = -\int_{-1}^1 \frac{1}{u^2 + 1} du = -I \Rightarrow I = 0$.

A3) Με δεδομένο το σχήμα της f βρείτε το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αν είναι

$$g(x) = \sqrt{-x^2 + x}$$



A4) Θεωρούμε την πρόταση « Αν για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ισχύει $f'(x) > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση ». Να χαρακτηρίσετε την πρόταση αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντηση.

A5) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Όταν η συνάρτηση f είναι $1-1$ τότε τα διαφορετικά $x_1, x_2 \in A$ δεν έχουν πάντοτε διαφορετικές τιμές.
2. Αν f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$
3. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon \varphi x$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = \frac{-1}{\eta \mu^2 x}$.
4. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0, 1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.
5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και G είναι μία αρχική της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha)$.

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & , \quad x < 0 \\ x^2 + x & , \quad x \geq 0 \end{cases}, A = \mathbb{R}.$

B1) Να βρείτε τη μονοτονία της f και το $f(A)$.

B2) Να λύσετε την ανίσωση $f(1 - \sin^2 x) < x^4 + x^2 + f(f(0))$.

B3) Να γίνει η γραφική παράσταση της f .

B4) Να υπολογίσετε το $I = \int_0^1 f(x-1)dx$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\eta \mu x}, x \in (0, \pi).$

Γ1) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το ακρότατο της f και να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Γ2) Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ώστε η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ3) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, \pi)$ ισχύει ότι

$$2e^{f(x)} > f^2(x) + 2f(x) + 2.$$

Γ4) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στην C_f τον άξονα $x'x$,

$$\text{και τις ευθείες } x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με f', g' συνεχείς στο $\mathbb{R}$ όπου ισχύουν:

$$f'(x) \neq g'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x) + x}{x} = 2025.$$

Δ1) Να δείξετε ότι $f'(0) - g'(0) = 2024$.

Δ2) Να δείξετε ότι για $x > 0$ είναι $f(x) > g(x)$ ενώ για $x < 0$

είναι $f(x) < g(x)$ και να λύσετε την ανίσωση :

$$f(\sqrt{x}) - f(\eta\mu x) > g(\sqrt{x}) - g(\eta\mu x), \quad x \in [0, +\infty).$$

Δ3) Να βρείτε $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει :

$$f(\alpha) + \int_{f(\alpha)}^{g(\alpha)} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} dx = \int_{f(\alpha)}^{g(\alpha)} (f(x) - g(x)) dx + g(\alpha).$$

Δ4) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στις συναρτήσεις

$$f_1(x) = e^{\sqrt{x}} - 1, \quad f_2(x) = \eta\mu x, \quad x = \pi.$$