



Ν. Ζ. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗΣ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

2024

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

A2. Να δώσετε τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής.

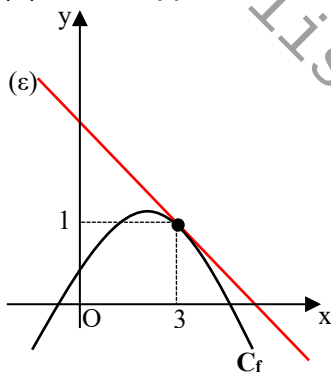
Μονάδες 4

A3. Πότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Μονάδες 4

A4. Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

α) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(3, 1)$. Αν το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με 6 τ.μ., τότε η $f'(3)$ είναι ίση με:



A. $-\frac{4}{3}$

B. $-\frac{4}{5}$

Γ. -1

Δ. $-\frac{2}{3}$

Ε. $-\frac{1}{3}$

β) Αν $\alpha > 0$ και ισχύει $\left(\int_0^{\alpha} x dx\right)^2 = \int_0^{\alpha} x^2 dx$, τότε η τιμή του α είναι:

A. $\frac{4}{3}$

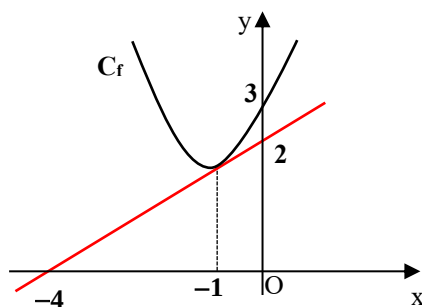
B. 1

Γ. $\frac{2}{3}$

Δ. $\frac{1}{4}$

Ε. $\frac{1}{6}$

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x = -1$. Αν ισχύει $\int_{-1}^0 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln \alpha$ τότε η τιμή του α είναι:



A. 3

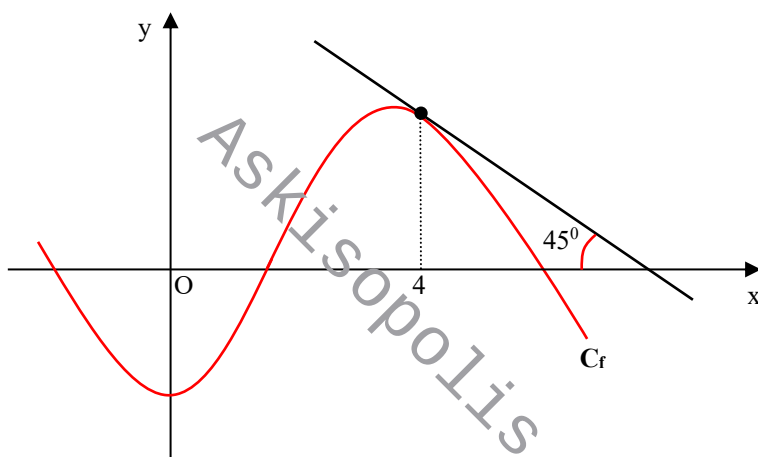
B. 2

Γ. $\frac{3}{2}$

Δ. 1

Ε. $\frac{1}{2}$

δ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(4, f(4))$.



Τότε το ολοκλήρωμα $\int_0^4 f'(x) \cdot f''(x) dx$ είναι ίσο με:

A. 0

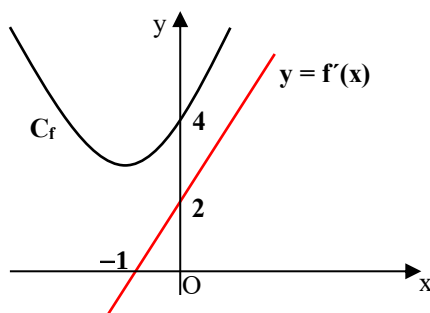
B. $-\frac{1}{2}$

Γ. $\frac{1}{2}$

Δ. $\frac{1}{6}$

Ε. $-\frac{1}{6}$

ε) Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα καθώς και η γραφική παράσταση της $y = f'(x)$.



Τότε οι τιμές των α , β , γ είναι:

- A.** $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 2,$ **B.** $\alpha = 2, \beta = 2, \gamma = 4,$ **Γ.** $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 2,$
Δ. $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 4$ **E.** $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 4$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + 2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$ και $\beta^2 > 8\alpha$, της οποίας η ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η ευθεία $(\varepsilon_1) : y = x + 1$.

B1. Να βρείτε τις τιμές των α και β (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε την ασύμπτωτη (ε_2) της f στο $-\infty$ (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Δίνεται η συνάρτηση $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) \geq -1$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και τέτοια ώστε $f(g(x)) = \sqrt{x+1}$ για κάθε $x \geq 0$

B2. Να βρείτε τον τύπο της g .

Μονάδες 4

Αν $g(x) = \sqrt{x} - 1, x \geq 0$

B3. Σημείο $M(x, \sqrt{x} - 1)$, $0 < x < 1$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g . Αν A είναι η προβολή του M πάνω στον άξονα $x'x$ και B η προβολή του M πάνω στον άξονα $y'y$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου $OAMB$ γίνεται μέγιστο.

B4. Αν d η κατακόρυφη απόσταση των σημείων $N(x, g(x))$ της C_g και $\Sigma(x, x + 1)$ της ασύμπτωτης (ε_1) με $x > 0$, να βρείτε σε ποια θέση η απόσταση είναι ελάχιστη και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο N είναι παράλληλη στην (ε_1) .

B5. Τη χρονική στιγμή t_0 που η απόσταση d γίνεται ελάχιστη, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του N είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του N .

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda x + 1, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα σε δύο διαφορετικά σημεία x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ (μονάδες 3), στη συνέχεια να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων (μονάδες 3) και να αποδείξετε ότι $x_1 < -1 < x_2$ (μονάδες 2)

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η f παρουσιάζει σημείο καμπής και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής K .

Μονάδες 3

Αν $K(-1, \lambda + 3)$, με $\lambda > -3$ το σημείο καμπής,

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο K και να αποδείξετε ότι σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 3

Γ4. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε) , C_f και των ευθειών $x = x_1$, $x = -1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε) , C_f και των ευθειών $x = x_2$, $x = -1$.

Μονάδες 7

Γ5. Αν $\lambda = -3$, να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη της.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + \alpha \sin x, & x < 0 \\ 2 + x - e^{\beta x}, & x \geq 0 \end{cases}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη

στο $x_0 = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$ και να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα (μονάδες 3) και στη συνέχεια να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής (μονάδες 3)

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μια ακριβώς ρίζα x_1 στο διάστημα $(-\infty, 0)$ (μονάδες 2) και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα x_2 στο $(0, +\infty)$ (μονάδες 2)

Μονάδες 4

Δ4. Να αποδείξετε ότι

i. $0 \leq f(x) \leq 2$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ (μονάδες 2)

ii. Υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ (μονάδες 3)

Μονάδες 5

Δ5. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) \geq \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)}{3}$

Μονάδες 6

Ν. Ζ. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗΣ

Σχόλιο: Είναι αρκετά πλούσιο, που σκοπό έχει τη μεγαλύτερη δυνατή επανάληψη.