

**Επαναληπτικά Διαγωνίσματα
στα Μαθηματικά προσανατολισμού
της Γ΄ Λυκείου
από το Askisopolis
2023 - 2024**



**Αντώνης Βαλέργας
Στέλιος Μιχαήλογλου
Θανάσης Νικολόπουλος
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Βαγγέλης Τόλης
Ισαάκ Χιονίδης**

**Αποστόλης Κακαβάς
Άγγελος Μπλιάς
Δημήτρης Πατσιμάς
Νίκος Σαμπάνης
Νίκος Τούντας**



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Μαθηματικά προσανατολισμού Γ' Λυκείου
12ο Γενικό Διαγώνισμα

11-5-2024

Θέμα Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και
- $f(a) \neq f(b)$

τότε να αποδείξετε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιος, ώστε: $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

A2. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και πότε προς τα κάτω;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

β. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$.

γ. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f , είναι πάντοτε διάστημα.

δ. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

ε. Το ορισμένο ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης είναι πάντοτε μη αρνητικός αριθμός.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται πολυώνυμο τρίτου βαθμού $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $P(0) = 1$, $P'(1) = -2$, $P''(-1) = -12$ και $P^{(3)}(1) = 6$.

B1. Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

B2. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

Μονάδες 6

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση P ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 3

B4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση P έχει ακριβώς 3 ρίζες $x_1 < x_2 < x_3$, οι δύο εκ των οποίων ανήκουν σε διάστημα της μορφής $(a, a+1)$, $a \in \mathbb{Z}$.

Μονάδες 6

B5. Έστω $x > 0$. Ένα υλικό σημείο $M(x, y)$ κινείται επί της καμπύλης P με θετικό ρυθμό μεταβολής.

Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M την στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του.

Μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $(f'(x) - 1)^2 \leq 2f(0) \cdot (1 - f(1))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) = 0$.

Γ1. Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(0)$ και $f(1)$.

Μονάδες 7

Αν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$

Γ2. Να βρείτε τη συνάρτηση $y = g(\varphi x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 6

Για $y = g(\varphi x) = x$

Γ3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_{f(0)}^{f(1)} \frac{1}{1+t^2} dt$ και $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} dt$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το ευρύτερο διάστημα του άξονα των τετμημένων στο οποίο πρέπει να ανήκει το σημείο $A(\alpha, 0)$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, από το οποίο να μην διέρχονται εφαπτομένες της C_g .

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x+1) - e^x + x + 1$, $x > -1$ και $g(x) = \frac{1}{x+1} - e^x + 1$, $x > -1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 > -1$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο στο x_0 για το οποίο ισχύει $f(x_0) < \frac{2x_0^2 + 2x_0 - 1}{x_0 + 1}$.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x$ και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $\ln(x+1) < e^x$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 f(x) \sqrt{x+1} dx < \frac{62}{5}$.

Μονάδες 6

Καλή τύχη!