ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

25

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΛΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

Απρίλιος 2024

Αυτοέκδοση: Άλγεβρα Β΄ Λυκείου - 25 Επαναληπτικά Θέματα
Υπεύθυνος έκδοσης: Λευτέρης Παπανικολάου
Σχήματα, γραφιστικά: Κώστας Τσόλκας
Σελιδοποίηση: Κώστας Τσόλκας
ISBN XXX-XXX-XX-XXXX-X
Πρώτη ψηφιακή έκδοση: Αυτοέκδοση από τον Λευτέρη Παπανικολάου, Πάτρα, Απρίλιος 2024

Τρόποι επικοινωνίας:
EMAIL: left-eris82@hotmail.com
FACEBOOK: Lefteris Papanikolaou

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το φυλλάδιο αυτό αφορά το μάθημα της Άλγεβρας Β Λυκείου και έρχεται σε συνέχεια του αντίστοιχου για την Α Λυκείου. Περιέχει 25 συνδυαστικά/επαναληπτικά θέματα από τα οποία κάποια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προετοιμασία πριν από τις εξετάσεις και άλλα ακόμα και ως θέματα διαγωνισμάτων. Κατά τη δημιουργία του φυλλαδίου δόθηκε βάρος σε δύο επίπεδα:

- Να καλυφθεί όσο το δυνατόν περισσότερο όλο το φάσμα των ασκήσεων, σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο, ώστε ο/η μαθητής/-ήτρια να έχει μία πλήρη εικόνα των υποψήφιων θεμάτων των εξετάσεων.
- Να υπάρξει μία πρώτη επαφή, σε πρωταρχικό στάδιο βεβαίως, με θέματα τα οποία συναντάμε κατά κόρον στα Μαθηματικά Γ Λυκείου (μονοτονία, ολικά ακρότατα, γραφικές παραστάσεις, σύνολο τιμών κτλ) και τα οποία είναι ύψιστης σημασίας.

Θα ήθελα να τονίσω ότι υπάρχουν ζητήματα που περιέχονται σε κάποια από τα 25 θέματα τα οποία είτε είναι εκτός διδακτέας ύλης (τουλάχιστον για τα παιδιά της Θεωρητικής Κατεύθυνσης) είτε είναι αυξημένης δυσκολίας. Αυτά προορίζονται για τους μαθητές που αναζητούν το κάτι παραπάνω και η διδασκαλία τους ή μη, επαφίεται στον εκάστοτε συνάδελφο.

Για τυχόν λάθη ή παραλείψεις, παρακαλούνται οι αναγνώστες να επικοινωνήσουν μαζί μου και οι σχετικές επισημάνσεις θα ληφθούν υπόψιν για μελλοντικές διορθώσεις.

Θερμές ευχαριστίες στον καλό φίλο και συνάδελφο Κώστα Τσόλκα για την πολύτιμη συμβολή του στο σχεδιασμό του φυλλαδίου!

Ο συγγραφέας

Λευτέρης Παπανικολάου

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω $\alpha,\beta \in (0,1)\cup(1,+\infty)$. Θεωρούμε την παράσταση $\Lambda = \dfrac{\ln\beta}{\ln\alpha} + \dfrac{\ln\alpha}{\ln\beta}$ και τη συνάρτηση $f(x) = \alpha\eta\mu^2 x + \beta\sigma\upsilon\nu^2 x$, $x \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι:

i) $|\Lambda| \geq 2$ για κάθε $\alpha,\beta \in (0,1)\cup(1,+\infty)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

ii) $\Lambda = \dfrac{\ln^2(\alpha\beta)}{\ln\alpha \cdot \ln\beta} - 2$ για κάθε $\alpha,\beta \in (0,1)\cup(1,+\infty)$

B) Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$

ii) $f(x) = (\alpha-\beta)\eta\mu^2 x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$

iii) Αν $\Lambda = 2$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Γ) Θέτουμε $\beta = \alpha^y$, όπου $y \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\Lambda = \kappa\pi$ έχει δύο άνισες (πραγματικές) ρίζες για κάθε τιμή της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{Z}^*$.

Δ) Αν οι αριθμοί $\log_{2024}\alpha^2$, $\log_{2024}(\alpha^2 - 2\alpha + 4)$, $\log_{2024}4$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και οι αριθμοί $\ln\sqrt[2024]{e}$, $\beta - 2$, $\ln e^{2024}$ με $\beta \neq 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να βρείτε τα ολικά ακρότατα και την περίοδο της συνάρτησης $g(x) = (\beta - 3\alpha)\eta\mu(\alpha\beta x) + \log 2 + \log(\alpha+\beta)$, $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2ο

A) Έστω $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ και $\theta \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Να αποδείξετε ότι: $\log_\alpha(\varepsilon\varphi\theta)^\beta + \log_\alpha(\sigma\varphi\theta)^\beta = 0$.

B) Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = -2\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x - 1$, $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και οι παραστάσεις:

$$K = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{2021\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\eta\mu\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)\cdot\sigma\varphi^2\left(\dfrac{35\pi}{6}\right)}{\eta\mu\left(\dfrac{23\pi}{3}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{8\pi}{3}\right)} \quad \text{και} \quad \Lambda = \left[f\left(\frac{\pi}{4}\right)+2\right]^{\log_{\frac{9}{2}} e}.$$

i) Να βρείτε τις ρίζες και στη συνέχεια το πρόσημο της συνάρτησης f για τις διάφορες τιμές του $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

ii) Να αποδείξετε ότι: $K = 2\sqrt{3}$

iii) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε $\mu,\nu \in (0,+\infty)$ με $\mu \neq 1$ ισχύει $\left(\sqrt{\mu}\right)^{\log_\mu \nu} = \sqrt{\nu}$ και στη συνέχεια ότι: $\Lambda = \sqrt{e}$.

iv) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\left(\dfrac{K}{2}\right)^2 - \Lambda$ και Λ.

ΘΕΜΑ 3ο

A) Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=\Delta\cdot x^2-\Delta\cdot x+\frac{3}{4}$, όπου $\Delta\neq 0$, η διακρίνουσά του. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $\Delta\cdot e^{2x}-\Delta\cdot e^{x}+\frac{3}{4}=0$

B) Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x)=(\lambda^2-2\lambda-3)x^3+(\lambda^2-9)x^2+(1-\lambda)x+3-\lambda \quad \text{και} \quad Q(x)=(\lambda+1)x^2-(\lambda^2-1)x-\lambda-1 \ ,$$

όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ παράμετρος.

i) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε ως προς το βαθμό τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$.

ii) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε ως προς το βαθμό το γινόμενο των πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$.

iii) Να βρεθούν όλοι οι $\lambda\in\mathbb{R}$ για τους οποίους το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει ως ρίζα τον αριθμό λ.

iv) Για $\lambda=-1$ να λύσετε την εξίσωση: $P(x)=Q(x)$

v) Για $\lambda=1$ να λύσετε την ανίσωση: $P(x)+Q(x)>x$

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε πολυώνυμο $P(x)=x^3-4x^2-x+\alpha$, όπου $\alpha>0$, για το οποίο ισχύει: $\sqrt{\log_2 P(0)-1}=\sqrt{3-\log_2 P(0)}$

A) Να βρεθεί ο σταθερός όρος α του $P(x)$.

Για $\alpha=4$:

B) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο του $P(x)$.

Γ) Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο τέτοιο ώστε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $Q(x):(x-1)$ και $Q(x):(x+1)$ να είναι ίσα με 2 και -2 αντίστοιχα.

i) Να βρείτε το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ της διαίρεσης $Q(x):(x^2-1)$

ii) Αν $\upsilon(x)=2x$, να λύσετε την ανίσωση: $\frac{P(x)}{\upsilon(x)}\leq-\frac{3}{2}$

iii) Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu^4x-(2\eta\mu x)^2+\left(\frac{2}{\eta\mu x}\right)^2=1$

ΘΕΜΑ 5ο

A) Έστω δύο συναρτήσεις f και g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ τέτοιες ώστε

- f και g γνησίως αύξουσες στο Δ
- $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta$ και $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Delta$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση γινόμενο $f \cdot g$ των f και g, της οποίας η τιμή στο $x \in \Delta$ ισούται με $f(x) \cdot g(x)$, είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο Δ.

Β) Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2} \cdot \ln x^2$

i) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ είναι το σύνολο $D_\varphi = [-1,0) \cup (0,1]$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση φ είναι άρτια.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

iv) Να αποδείξετε ότι: $\min \varphi(x) = 0$

v) Να λύσετε την εξίσωση: $\left(\ln \frac{1}{x}\right)^{\varphi(x)} = 1$

ΘΕΜΑ 6°

Α) Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\begin{cases} \text{συν}\alpha + \sqrt{2}\,\text{ημ}\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+1\right) \\ \sqrt{2}\,\text{συν}\alpha - 3\,\text{ημ}\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}-3\right) \end{cases}$$

i) Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

ii) Για $\alpha = \frac{\pi}{4}$ και $\beta = \frac{3\pi}{4}$, να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 - y^2 = \text{εφ}\alpha \\ x^4 + y^4 = -\text{σφ}\beta \end{cases}$

Β) Δίνονται οι ανισώσεις: $\sqrt{x+2} \geq x$ (1) και $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \geq \sqrt{x} - 1$ (2).

i) Να λύσετε τις ανισώσεις (1) και (2).

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in (1, +\infty)$ ισχύει: $\sqrt{\log_\alpha \beta + \frac{1}{\log_\alpha \beta} + 2} \leq \log_\alpha \beta + \frac{1}{\log_\alpha \beta}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (e, +\infty)$ ισχύει: $\frac{\sqrt{\log_\alpha \alpha^4 + \log_{\ln\alpha} e}}{\sqrt{\log_\alpha \alpha^4 + \log_{\ln\alpha} e} - 2} < \sqrt{\log_\alpha \alpha^4 + \log_{\ln\alpha} e} - 1$

ΘΕΜΑ 7°

Α) Να λυθεί η ανίσωση: $\sqrt{1-x^2} \leq 1 - x$ (1)

Β) Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 10^{\text{ημ}x + \text{συν}y} = 10^{\sqrt{2}} \\ \left(10^{\text{ημ}x}\right)^{\text{συν}y} = \sqrt{10} \end{cases}$ (2) για $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-\rho \ln x + \text{εφ}(\pi + x_0) - \text{σφ}\left(\frac{2019\pi}{2} - y_0\right)}$, όπου ρ η μεγαλύτερη λύση της ανίσωσης (1) και (x_0, y_0) η λύση του συστήματος (2).

i) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\sqrt{-\ln x}\ ,\ 0<x\le 1$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ολικά της ακρότατα.

iii) Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύουν:

$0<\alpha-\beta\le\frac{\pi}{4}$, $0<\alpha+\beta\le\frac{\pi}{4}$ και

- $e^{\sqrt{-\ln \varepsilon\varphi(\alpha-\beta)}}=e^{-\sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)}}}$

ΘΕΜΑ 8ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\ ,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\frac{1}{\eta\mu^4 x}-\sigma\varphi^4 x-\frac{2}{\varepsilon\varphi^2 x}$

A) Να αποδείξετε ότι:

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το σύνολο $D_g=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ne\kappa\pi \text{ και } x\ne\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ \kappa\in\mathbb{Z}\right\}$

ii) Η συνάρτηση g είναι σταθερή και ισχύει: $g(x)=1$ για κάθε $x\in D_g$

B) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δεν έχουν κοινό σημείο.

Γ) Να αποδείξετε ότι:

i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ υπάρχει $y\in\mathbb{R}$ με $y\ne x$ τέτοιος ώστε $f(y)=f(x)$

ii) Ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

iii) $\max f(x)=\sqrt{2}$ και $\min f(x)=-\sqrt{2}$

ΘΕΜΑ 9ο

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)$ και το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\left(\frac{1}{e}+1\right)x^2+\left(\frac{1}{e}-2\right)x+\frac{2}{e}$.

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και στη συνέχεια να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

B) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f(\xi)=\alpha$

Γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης f και του πολυωνύμου $P(x)$ τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$.

Δ) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο του πολυωνύμου $P(x)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι το γινόμενο των ριζών του ισούται με τον αντίθετο του σταθερού του όρου.

Ε) Να αποδείξετε ότι:

i) $f\left(\frac{1}{e^{\nu}}\right)=\ln\nu$, για κάθε ν θετικό ακέραιο

ii) $P\left(f\left(\frac{1}{e^{4}}\right)\right)<0$

ΘΕΜΑ 10ο

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=\left[\left(\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\right)^2-1-\left(\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}\right)^2\right]x^5+x^4+2x^3+3x^2+4x-2$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 4ου βαθμού και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη τιμή του καθώς και τη θέση του ολικού ελαχίστου.

B) Έστω το πολυώνυμο $Q(x)=x^3+2x$. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):Q(x)$ και να βρείτε το πηλίκο $h(x)$ και το υπόλοιπο $f(x)$.

Γ) Έστω $f(x)=x^2-2$ και $M(x,f(x))$, όπου $x\in\mathbb{R}$. Έστω επίσης A και B τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x΄x.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ii) Να βρείτε όλους τους $x\in\mathbb{R}$ για τους οποίους τα σημεία A, B και M είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

iii) Να βρείτε το μοναδικό $\xi\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ για τον οποίο το εμβαδόν του τριγώνου MAB (όταν το M κινείται κάτω από τον άξονα $x'x$) γίνεται μέγιστο.

iv) Έστω τα σημεία $M_1(x_1,f(x_1))$, $M_2(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(\xi,f(\xi))$, όπου x_1,x_2 οι αριθμοί του **Γii)** με $x_1<x_2$ και ξ ο αριθμός του **Γiii)**. Να αποδείξετε ότι: $(ABM_1)+(ABM_2)=(AB\Gamma)$.

ΘΕΜΑ 11ο

A) Δίνονται οι εξισώσεις $\eta\mu(\pi x)=0$ (1) και $\sigma\upsilon\nu(\pi x)=0$ (2).

i) Να αποδείξετε ότι κάθε λύση της εξίσωσης (1) είναι ακέραιος αριθμός και, αντίστροφα, κάθε ακέραιος αριθμός είναι λύση της εξίσωσης (1).

ii) Να αποδείξετε ότι καμία λύση της εξίσωσης (2) δεν είναι ακέραιος αριθμός.

iii) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} e^x+e^y=x_0 \\ e^{2x}+e^{2y}=\frac{x_0}{2} \end{cases}$, όπου $x_0\in\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{30}}{5}\right)$ τέτοιος ώστε $\eta\mu(\pi x_0)=0$.

B) Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$, όπου $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α rad.

Γ) Αν $\varepsilon\varphi\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, όπου $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας β rad.

Δ) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

i) $\varepsilon\varphi\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = (\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + \frac{2\sqrt{14}}{9}$

ii) $2\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x + 2\sqrt{3}\eta\mu^3 x + 3\sqrt{3}\eta\mu^2 x + 3\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu x - 2\sqrt{3}\eta\mu x = \sigma\varphi^2\beta - 5$, αφού πρώτα τη γράψετε στη μορφή: $2(\eta\mu x + 2)\left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{3}\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right) = 0$ όπου α και β οι αριθμοί των **Β)** και **Γ)** .

Ε) Να βρείτε όλους τους $x \in (2\pi, 3\pi)$ για τους οποίους ισχύει:

$$\left[\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\right] \cdot \left[\sqrt{3}\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 0$$

ΘΕΜΑ 12ο

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln\left(x + \frac{4\beta}{\pi}\right)$, $h(x) = \alpha\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\beta$, $x \in \mathbb{R}$ και $\varphi(x) = -x + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$ όπου $\alpha > 0$ και $\beta \in (0, \pi)$ τέτοιοι ώστε το σημείο $K\left(\frac{\pi}{6}, \frac{e-1}{2}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης h και το μέγιστο της h να ισούται με α .

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f καθώς και τους τύπους των συναρτήσεων f , h και φ .

Για $\alpha = e - 1$ και $\beta = \frac{\pi}{2}$:

Β) **i)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = h(2x) - (\alpha + 2)\eta\mu(2x)$.

ii) Στο ίδιο καρτεσιανό επίπεδο Oxy να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και φ .

Γ) Έστω $A(-1, 0)$ και $B(0, \ln 2)$ τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Έστω επίσης $\Gamma(e - 1, 0)$ και $\Delta(0, e - 1)$ τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

i) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΟΑΒ και ΟΓΔ και να αποδείξετε ότι:

$$(O\Gamma\Delta) > 2(OAB)$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = \varphi(x)$.

Δ) Έστω $M(x_0, f(x_0))$, όπου $x_0 > 0$, σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και N η προβολή του M στον άξονα $y'y$.

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΒ, όπου $B(0, \ln 2)$, δεν είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, την τιμή του x_0 ώστε τα τρίγωνα ΜΒΝ και ΟΒΕ να είναι ίσα, όπου Ε το σημείο τομής της ΜΒ με τον $x'x$.

ΘΕΜΑ 13ο

Δίνονται οι εξισώσεις: $3^{3x+1}+22\cdot 3^{2x}-43\cdot 3^{x}+18=0$ (1) και $\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}=\sqrt{x}$ (2)

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+\kappa}-x$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$.

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ακριβώς δύο λύσεις, τους αριθμούς $x_1=0$ και $x_2=\log_3 2-1$.

Β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (2) έχει ακριβώς δύο λύσεις, τους αριθμούς $x_3=0$ και $x_4=9+4\sqrt{5}$.

Γ) Για $\kappa=x_4-4\sqrt{5}-\dfrac{3^{x_2+2}}{2}$:

i) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το διάστημα $I=[-6,+\infty)$

ii) Να βρείτε όλους τους $x\in\mathbb{R}$ για τους οποίους η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x.

iii) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(-6)$, $f\left(-\dfrac{23}{4}\right)$, $f(3)$ και με βάση το αποτέλεσμα της σύγκρισης, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη στο I.

ΘΕΜΑ 14ο

Α) Θεωρούμε το σύστημα: $\begin{cases}(\lambda^2-1)x+y=1\\(2\lambda^2-2)x+\lambda y=\lambda^2\end{cases}$ (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ παράμετρος.

i) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda=1$, τότε το σύστημα (1) έχει άπειρο πλήθος λύσεων, ενώ αν $\lambda=-1$ ή $\lambda=2$, τότε το σύστημα (1) είναι αδύνατο.

ii) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda\in\mathbb{R}-\{-1,1,2\}$, τότε το σύστημα (1) έχει μοναδική λύση, το ζεύγος:

$$(x,y)=\left(\frac{\lambda}{(2-\lambda)(1+\lambda)},\frac{\lambda^2-2}{\lambda-2}\right).$$

iii) Αν το ζεύγος $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ είναι λύση του συστήματος (1) να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases}\dfrac{x+2y}{4}+z=\lambda\\3x-y+2z=-\lambda\\x-y-\dfrac{3}{4}z=\lambda^2+\lambda\end{cases}$

Β) Θεωρούμε την εξίσωση: $\sqrt{x^2-2\alpha x}=\alpha\sqrt{3}$ (2) όπου α θετική παράμετρος.

i) Να βρείτε τις δύο λύσεις της εξίσωσης (2) και να δείξετε ότι είναι ετερόσημες.

ii) Αν x_1 και x_2 η μεγαλύτερη και η μικρότερη αντίστοιχα λύση της εξίσωσης (2), να αποδείξετε ότι η αντίστροφη εξίσωση $\dfrac{x_1}{x_2}x^4+x^3-2x^2+x+\dfrac{x_1}{x_2}=0$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 15ο

Δίνονται η εξίσωση $\sqrt{1-\log^2 x}=\sqrt{-\left(\log x-\log^2 x\right)}$ (1) και η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\alpha^2-3\alpha+2}{\alpha+1}\right)^x$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

A) Να λύσετε την εξίσωση (1).

B1) Να βρείτε όλες τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

B2) Για ποιες από τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, η συνάρτηση f είναι:

- **i)** γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$;
- **ii)** γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$;
- **iii)** σταθερή στο $\mathbb{R}$;

Γ) Για $\alpha=0$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-g(x)$, όπου $g(x)=\sqrt{18-x}$.

- **i)** Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ είναι το διάστημα $(-\infty,18]$.
- **ii)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,18]$ και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση: $\varphi(x)<0$
- **iii)** Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), να αποδείξετε ότι ισχύει: $\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)<0$.

ΘΕΜΑ 16ο

Δίνεται το μη μηδενικό πολυώνυμο $P(x)=-P(0)x^3+2P(0)x^2-2P(0)x+P(0)$ για το οποίο ισχύει ότι ο αριθμός $\rho=-P(0)$ είναι ρίζα του.

A) Να αποδείξετε ότι:

- **i)** Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού.
- **ii)** $P(0)=-1$
- **iii)** Το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-x+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
- **iv)** Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ ισχύει: $\frac{P(2-x)+P(x)}{(x-1)^2}=2$.

B) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$, $x>0$.

- **i)** Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x),\ \sigma(x)=\ln|x|,\ g(x)=2\ln\sqrt{x-1}\ \text{ και }\ h(x)=\frac{1}{2}\ln(x-1)^2.$$

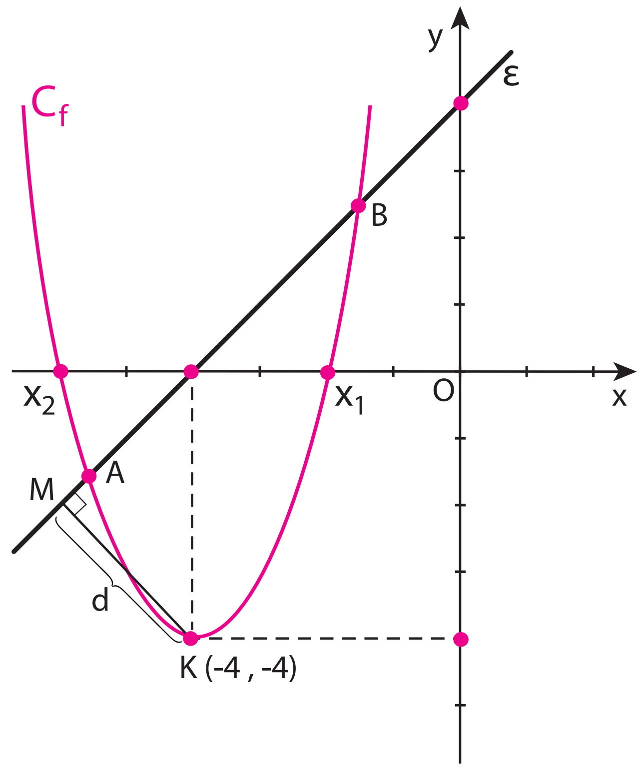
- **ii)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(P(x))=\ln P(x)$
- **iii)** Να λύσετε την εξίσωση: $P(x)=-f(x)$.

Γ) Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$, $x>0$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma=\frac{\varphi(10)+\varphi(20)+\varphi(30)+...+\varphi(2020)-\varphi(1)-\varphi(2)-\varphi(3)-...-\varphi(202)}{\varphi\left(\sqrt[10]{10}\right)}+\frac{P(-2020)+P(2022)}{2021^2}$$

ΘΕΜΑ 17ο

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση (παραβολή) μίας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και μία ευθεία ε: $y=\alpha x+\kappa$, όπου $\kappa=\alpha(\gamma-\beta)$ και $\alpha\neq 0$. Υποθέτουμε ότι η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $K(-4,-4)$ και για τις δύο άνισες ρίζες x_1, x_2 της f, με $x_1>x_2$ ισχύει: $|x_2-x_1|=4$.



A) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f και την εξίσωση της ευθείας ε.

B) Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $f(x)=x^2+8x+12$, $\in\mathbb{R}$ και ε: $y=x+4$.

i) Να δείξετε ότι ισχύει: $f(2(-4)-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x-4)$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα των y.

iii) Να βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η παραβολή βρίσκεται κάτω από την ευθεία ε.

iv) Αν A και B είναι τα κοινά σημεία της παραβολής με την ευθεία ε, να δείξετε ότι $\frac{(AB)}{d}=\frac{\sqrt{17}}{2}$, όπου d η απόσταση της κορυφής $K(-4,-4)$ της παραβολής από την ε.

v) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε: $f(2024)=e^{x_0}$.

ΘΕΜΑ 18ο

Θεωρούμε:

- τη συνάρτηση $f(x)=\ln συν(\pi x)$, $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και
- το πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+7x+6+\ln 2+f\left(\frac{1}{3}\right)$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Α) Να αποδείξετε ότι, αν το σημείο $M(x_0,y_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τότε και το σημείο $M'(-x_0,y_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\frac{1}{2},0\right]$, $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ και να βρείτε το ολικό της μέγιστο.

Γ) Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε για το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ της διαίρεσης $P(x):(x^2-1)$ να ισχύει $\upsilon(x)=5x+1$

Δ) Για $\alpha=-2$ και $\beta=-6$:

i) Να βρείτε όλες τις ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση:

$$2^{P(x)-1}=\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{2^{P(x)-1}}{2}}}{2}}$$

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Phi=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^5-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^4-2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

ΘΕΜΑ 19ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{x^2-1}{\upsilon(x)}$, όπου $\upsilon(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης $(x^4-x^3-x+7):(x^3+x-1)$

Α) Να βρείτε το πολυώνυμο $\upsilon(x)$.

Για $\upsilon(x)=-x^2+x+6$:

Β) **i)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης g και στη συνέχεια να καθορίσετε το πρόσημό της για τις διάφορες τιμές του $x\in A$.

ii) Να βρείτε όλους τους $x\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $0<g(x)<1$.

Υπάρχει $\mu\in\mathbb{Z}$ ώστε να ισχύει: $0<g(\mu)<1$;

Γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=[g(2)]^x$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $g\left(f\left(\frac{4}{3}\right)\right)<0$

ii) $\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^x < \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^x} < \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^x$ για κάθε $x \in (-2,2)$.

ΘΕΜΑ 20ο

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 12x^3 - 20x^2 + 11x - 2$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln(4 - x^2) - \ln(2 + x)$.

Α1) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ δεν έχει ακέραια ρίζα.

Α2) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ δεν έχει αρνητική ρίζα.

Α3) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $2x - 1$ είναι διαιρέτης του $P(x)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Α4) Να προσδιορίσετε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ για τον οποίο το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) + \alpha$ διαιρείται (ακριβώς) με το πολυώνυμο $x - 1$.

Β1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Β2) Για $\alpha = -1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = Q(x)$ έχει μοναδική λύση, όπου το $Q(x)$ είναι το πολυώνυμο του **Α4)** .

ΘΕΜΑ 21ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha x^3 - 10$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}^*$ η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

Β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, -9)$

Γ) Για $\alpha = 1$:

i) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \ln x^\lambda - \ln y^\lambda = 6 \\ \ln x^\lambda \cdot \ln y^\lambda = 27 \end{cases}$, όπου $\lambda = f\left(\sqrt[3]{3}\right) + 10$.

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει με την ευθεία $y = -x$ μοναδικό κοινό σημείο το οποίο και να βρείτε.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $(e^x + 1)^2 > 2(e^x + 5e^{-x})$ και να βρείτε τη μικρότερη ακέραια λύση της.

ΘΕΜΑ 22ο

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3x^2-12x+9$ και $g(x)=3x^2$.

Α1) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g μετά από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις, μίας οριζόντιας κατά δύο μονάδες προς τα δεξιά και μίας κατακόρυφης κατά τρεις μονάδες προς τα κάτω.

Α2) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Α3) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε η παραβολή $y=3x^2-12x+9$ και η ευθεία $y=\kappa$ να έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Α4) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(2-x)=f(2+x)$ και στη συνέχεια ότι $f\left(-\frac{1}{1000}\right)>f(4)$.

Β) Θεωρούμε και τη συνάρτηση $\varphi(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και φ έχουν κοινό σημείο με τετμημένη ρ, η οποία ανήκει στο ανοικτό διάστημα $\left(\frac{4}{5},1\right)$.

Γ) Έστω επίσης οι εξισώσεις $3x^2-12x+9=8x^2$ (1) και $\sqrt{3x^2-12x+9}=\sqrt{8}x$ (2).

i) Να λύσετε τις εξισώσεις (1) και (2).

ii) Να εξηγήσετε γιατί δεν έχουν τις ίδιες λύσεις, αν και η (1) προκύπτει από την (2) εφόσον υψώσουμε και τα δύο μέλη της στο τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 23ο

Θεωρούμε τον αριθμό $\kappa=\log_\alpha\beta$, όπου $\alpha=\sqrt{25^{\frac{1}{3}\log_5\sqrt{8}+\frac{1}{2}}-5}$, $\beta=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-\alpha}+1$ και το πολυώνυμο $P(x)=\kappa x^4+\lambda x^3+(\kappa+1)x^2+\lambda x+1$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Έστω ακόμα το πολυώνυμο $Q(x)=x^4-8x^3+17x^2+2x-24$.

Α) Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^4+\lambda x^3+2x^2+\lambda x+1$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in(-2,2)$ ισχύει $P(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-\lambda$ να ισούται με το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x+1$.

Δ) Να αναλύσετε το $Q(x)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση:

$$1+17\cdot2^{-2x}-2^{3-x}+2^{1-3x}-3\cdot2^{3-4x}>0$$

Ε) Για $\lambda=0$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x)=\log P(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x)=2\log\left(x^2+1\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Έστω επίσης το πολυώνυμο $R(x)=Q(x)+25$. Να αποδείξετε ότι ισχύει $R(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$, όπου $g(x)=\log R(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 24ο

Α1) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{3x+6}-\sqrt{x+3}=1 \quad (1)$

Α2) Να λύσετε την ανίσωση $(2x)^{\ln x} \le (x+2)^{\ln x} \quad (2)$

Α3) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\sqrt[2023]{(x+2)^{\ln x}-(2x)^{\ln x}}}{\sqrt{3}\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}-1}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι ο αριθμός 2 είναι η μοναδική της ρίζα.

Β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

i) $ημx \cdot συνx = \dfrac{(ημx+συνx)^2-1}{2}$ **ii)** $2(ημ^3x+συν^3x)=-(ημx+συνx)^3+3(ημx+συνx)$

Γ) Να βρείτε όλους τους $x \in \mathbb{R}$ οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $ημ^3x+συν^3x=2024^{f(2)}$, όπου f η συνάρτηση του ερωτήματος **Α3)**.

ΘΕΜΑ 25ο

Α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 64 \\ \log_2 x + \log_2\left(2\sqrt{y}\right)=3 \end{cases}$.

Β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=α^{2x}+3α^x-8β$, όπου $α,β\in\mathbb{R}$ με $α\ne β$ και τέτοιοι ώστε να ισχύουν

- $\log_α \dfrac{4}{9}=-2$ και
- $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{β^2+\frac{3}{4}}=\left(\dfrac{1}{36}\right)^{β}$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}+3\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}-4$, $x\in\mathbb{R}$

ii) Να λύσετε την ανίσωση $9^x+2^x\cdot 3^{x+1}-4^{x+1}<0$ και στη συνέχεια να βρείτε όλους τους $x\in\mathbb{R}$ για τους οποίους η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x.

Γ) Ένα δείγμα μίας ραδιενεργού ουσίας διασπάται σύμφωνα με τον τύπο $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$, $t\ge 0$, όπου $Q(t)$ η ποσότητα (σε κιλά) που απομένει μετά από t ώρες, $Q_0>0$ η αρχική ποσότητα και $c<0$ μία σταθερά.

i) Αν ο χρόνος ημιζωής της ραδιενεργού ουσίας είναι 120 (πρώτα) λεπτά, να αποδείξετε ότι:

$$Q(t)=Q_0\cdot 2^{-\frac{t}{2}},\ t\ge 0.$$

ii) Αν επιπλέον η αρχική ποσότητα ήταν 16000 γραμμάρια, να βρείτε μετά από πόσες ώρες θα έχουν απομείνει 2 κιλά.

iii) Λαμβάνοντας υπόψιν τα ζητήματα **i)** και **ii)**, να αποδείξετε ότι $Q(t)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t-8}$, $t\ge 0$ και να κάνετε μία πρόχειρη γραφική παράσταση για τη συνάρτηση $Q(t)$.

Τρόποι επικοινωνίας:
EMAIL: left-eris82@hotmail.com
FACEBOOK: Lefteris Papanikolaou