



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΜΑΡΤΗ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)
33° ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7.

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle. (μονάδες 2) και στη συνέχεια να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. (μονάδες 1).

Μονάδες 3

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό

«Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ , στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων για την f .»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 2)

Μονάδες 3

A4. Επιλέξτε τη σωστή ή τις σωστές απαντήσεις

Η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ έχει παράγωγο

A. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

B. Άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Γ. η f Δεν είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 3

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας 1 μονάδα η σωστή απάντηση 1 μονάδα η αιτιολόγηση)

α. Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, τότε. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.

β. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει ακριβώς μια ρίζα $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι 1-1 στο $[\alpha, \beta]$.



γ. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, για το οποίο ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.

δ. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών, μιας παραγωγίσιμης και κυρτής συνάρτησης f , υπάρχει πάντα, ακριβώς μια ρίζα της παραγώγου συναρτήσεως δηλαδή της f' .

ε. Αν συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ με $\alpha, \beta \in \Delta$ και ισχύει ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο

διάστημα αυτό, τότε
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

Μονάδες 6

B2. Να ορίσετε τη σύνθεση της $g(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ με την f^{-1} .

Μονάδες 5

B3. Να δείξετε ότι για κάθε $0 < x < 1$ ισχύει ότι: $3\ln x + \ln(\sin x) < \ln(\eta\mu x)$.

Μονάδες 6

B4. Ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$, τη χρονική στιγμή $t=0$ ξεκινά από το σημείο $O(0,0)$ και κινείται στη γραφική παράσταση της f^{-1} , με τέτοιο τρόπο, ώστε $\alpha = \alpha(t) > 0$, για κάθε $t > 0$ και έστω (ε) η εφαπτομένη ευθεία προς τη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(\alpha, \beta)$ η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(x_A, 0)$, και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, y_B)$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι $\alpha'(t) = 2\mu/\text{sec}$ να βρείτε

α) το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου A , τη χρονική στιγμή t_0 όπου το M διέρχεται από το σημείο $M_0(8, f^{-1}(8))$. (Μονάδες 4)

β) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMK όπου K είναι η προβολή του σημείου $M(\alpha, \beta)$ στον θετικό ημιάξονα Ox , τη χρονική στιγμή t_0 όπου το M διέρχεται από το σημείο $M_0(8, f^{-1}(8))$. (μονάδες 4)

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση : $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

- $f(x \cdot y) \leq x \cdot f(y) + y \cdot f(x)$, για κάθε $x > 0$ και για κάθε $y > 0$ και
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$

Γ1. α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$ και $f'(1) = 1$ (μονάδες 2)

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $x + f(x) - x \cdot f'(x) = 0$ για κάθε $x > 0$. (μονάδες 7)

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε την f .

Μονάδες 4

Αν $f(x) = x \cdot \ln x$, $x > 0$

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι δεν έχει σημεία καμπής

Μονάδες 6

Γ4. α) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική

παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \alpha$ όπου $0 < \alpha < 1$. (μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{\alpha \rightarrow 0} E(\alpha)$ (μονάδες 2)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} και για τις οποίες ισχύουν ότι:

- $f''(x) + f(x) = g''(x) + g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = g(0) + 1$ και $f'(0) = g'(0)$

Και θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Δ1. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $G(x) = H'(x) \cdot \sin x + H(x) \cdot \eta\mu x$ είναι σταθερή στο \mathbb{R} και να βρεθεί. (μονάδες 2)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = H'(x) \cdot \eta\mu x - H(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x$ είναι σταθερή στο \mathbb{R} και να βρεθεί. (μονάδες 2)

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε τη συνάρτηση $H(x) = f(x) - g(x)$

Μονάδες 6

Αν $H(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 0$ και $x = 2\pi$

Μονάδες 5

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $e^{H(x)-1} - \frac{11}{e}x^2 = e^{x^2} - \frac{11}{e}(H(x)-1)$

Μονάδες 5



Δ5. Να υπολογίσετε το ότι $I = \int_{e^{\pi}}^{e^{2\pi}} H(\ln x) dx$

Μονάδες 5

©2024 Βασίλης Γ. Κουγιουμτσιάδης

Μέλλοντας ή Αόριστος;
ένα και μοναδικό συστατικό
που δεν ταιριάζει στο ψέμα,
ούτε χωράει στη βολική αμνησία.
Σπέρμα Ζωής κι Αλήθειας.
Αίμα.

Μια ανταριασμένη Θύελλα.
Μια χειροπιαστή Ουτοπία.
Μια Κραυγή,
Αγριεμένη και τρεμάμενη,
Πέλαγα συντονίζει,
Ανεπαρκή τοιχώματα ξυπνάει.
Γκρεμίζει σαθρές βεβαιότητες.
Μπολιάζει Όνειρο.
Τώρα και Πάντα.
Με πρόσωπο στον Καιρό
κι ας Φυσάει Κόντρα .
Και Ναι Χαμογελάμε,
Γιατί εμείς τις Υπερβάσεις μας τις επιλέξαμε
κι εννοείται τις Υπογράφουμε.



supremum

ΕΚΔΟΣΕΙΣ

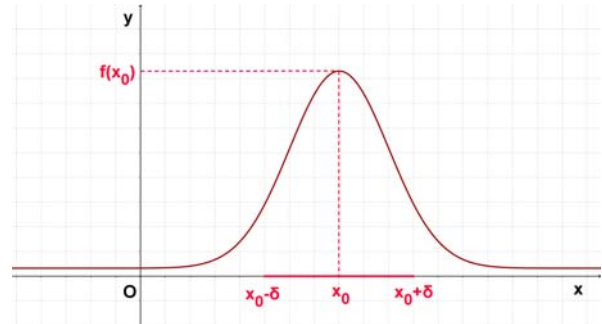


Απαντήσεις

Α1. (Θεώρημα του Fermat)

Αφού η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ αυτό θα είναι ή τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο, έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η f στο x_0

παρουσιάζει τοπικό μέγιστο άρα $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



και από υπόθεση έχουμε επίσης ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 άρα θα

υπάρχει και θα είναι πραγματικός αριθμός το όριο του λόγου μεταβολής της f στο x_0 δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \text{ και έτσι αναγκαστικά θα είναι και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0). \text{ Τότε}$$

I. Για τα $x > x_0$, δηλαδή $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ τότε $f(x) \leq f(x_0)$ δηλαδή

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \text{ και } x - x_0 > 0$$

άρα $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ για κάθε $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ και υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \text{ άρα σύμφωνα με γνωστό θεώρημα των ορίων θα είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ άρα } \boxed{f'(x_0) \leq 0} \text{ (I).}$$

II. Για τα $x < x_0$, δηλαδή $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ τότε $f(x) \leq f(x_0)$ δηλαδή

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \text{ και } x - x_0 < 0$$

άρα $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \text{ άρα}$$



σύμφωνα με γνωστό θεώρημα των ορίων θα είναι $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

άρα $f'(x_0) \geq 0$ (II).

Επομένως από τις (I) και (II) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

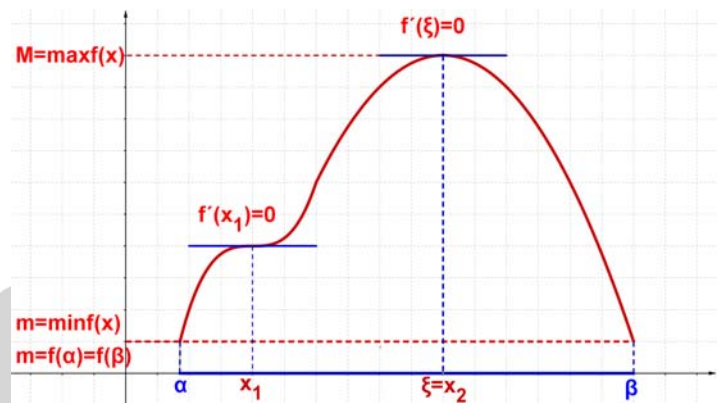
A2. Το Θεώρημα του Rolle

Αν η συνάρτηση f

- είναι ορισμένη και **συνεχής** στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και
- η f είναι **παραγωγίσιμη**, τουλάχιστον, στο ανοιχτό διάστημα (a, β)
- και $f(a) = f(\beta)$, δηλαδή λαμβάνει στα άκρα του διαστήματος τιμές ίσες,

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ στο τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

δηλαδή σε ένα τουλάχιστον σημείο $A(\xi, f(\xi)) \in C_f$, η γραφική παράσταση της f , θα δέχεται εφαπτομένη ευθεία, με συντελεστή διεύθυνσης μηδέν, δηλαδή παράλληλη στον άξονα $x'x$.



A3. Για τον ισχυρισμό: «Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ , στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων για την f .»

α. Είναι αληθές

β. Αιτιολόγηση. Με Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι στο εσωτερικό σημείο $x_0 \in \Delta$, στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη ήταν θέση τοπικού ακροτάτου για την f , τότε επειδή είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat θα έπρεπε αναγκαστικά $f'(x_0) = 0$, άτοπο γιατί από υπόθεση έχουμε ότι η f' είναι διαφορετική από το μηδέν. Άρα τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) \neq 0$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .

A4.

Η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ έχει παράγωγο

A. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, **ΣΩΣΤΟ**



Β. Άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. **ΛΑΘΟΣ**

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και στο $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ και στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$, άλλα δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της αφού

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, 1) \text{ και } f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (1, +\infty)$$

Δηλαδή

- Για κάθε $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow 1 > f(x_1) > f(x_2) > 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα και στο $\Delta_1 = (-\infty, 0)$

- Για κάθε $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) > 1$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα και στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$

- Όμως αν επιλέξουμε $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < 1 < f(x_2)$

Άρα η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, ούτε αλλάζει πάντα την ανισοτική σχέση μεταξύ των x_1, x_2 στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ούτε βέβαια πάντα την διατηρεί.

Άρα δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Γ. η f Δεν είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της. **ΛΑΘΟΣ**

Η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αφού για κάθε $y \in f(A) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς

$$x \text{ την: } y = e^{\frac{1}{x}}, x \neq 0, y \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln y, x \neq 0, y \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{1}{\ln y}}, x \neq 0, y \in (0, 1) \cup (1, +\infty), \text{ άρα η } f \text{ είναι 1-1 στο } D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

A5.

α. Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, τότε. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.

ΛΑΘΟΣ (το θεώρημα λέει ότι τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$)

(το όριο μπορεί να είναι ίσο με μηδέν **αντιπαράδειγμα:** $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ προφανώς

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και για κάθε x κοντά στο $x_0 = 0$ και υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0)$$

β. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει ακριβώς μια ρίζα $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι 1-1 στο $[\alpha, \beta]$.



ΛΑΘΟΣ (αντιπαράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 3, x \in [-3, 2]$)

Προφανώς είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[-3, 2]$

$$f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 - (-3) + 3 = -9 < 0$$

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2 + 3 = \frac{8}{3} + 1 > 0$$

Άρα $f(-3) \cdot f(2) < 0$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-3, -1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, το οποίο όμως είναι μοναδικό αφού

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x + 3 \right)' = x^2 - 1,$$

$x \in [-3, 2]$, όπως φαίνεται από το πρόσημο της παραγώγου το οποίο μεταβάλλεται

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3, -1]$ και λαμβάνει τιμές στο

$$f(\Delta_1) = [f(-3), f(-1)] = \left[-9, \frac{11}{3} \right]. \text{ Ακριβώς στο διάστημα αυτό από το Θεώρημα}$$

Bolzano υπάρχει το $x_0 \in (-3, -1)$, στο οποίο η f έχει την μοναδική της ρίζα $f(x_0) = 0$

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ και λαμβάνει τιμές στο

$$f(\Delta_2) = [f(1), f(-1)] = \left[\frac{7}{3}, \frac{11}{3} \right], \text{ άρα}$$

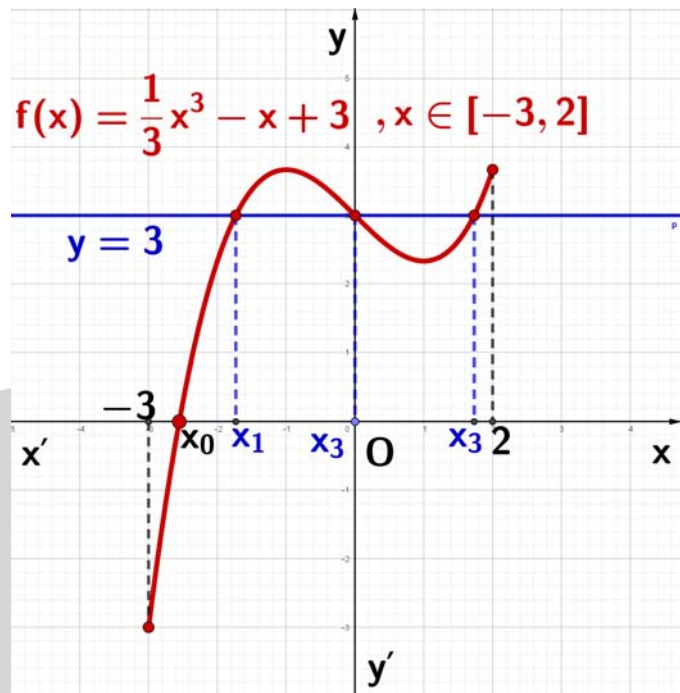
$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [-1, 1].$$

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$ και λαμβάνει τιμές στο

$$f(\Delta_3) = [f(1), f(2)] = \left[\frac{7}{3}, \frac{11}{3} \right], \text{ έτσι επίσης άρα } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 2]$$

Έτσι παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $[-3, 2]$, η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει ακριβώς μια ρίζα $x_0 \in (-3, -1) \subseteq (-3, 2)$, όμως η f δεν είναι 1-1 στο $[-3, 2]$, αφού τις

τιμές $\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3} \right)$ τις λαμβάνει περισσότερες από μια φορά.



x	-3	-1	1	2		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	-9	$\frac{11}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{11}{3}$		



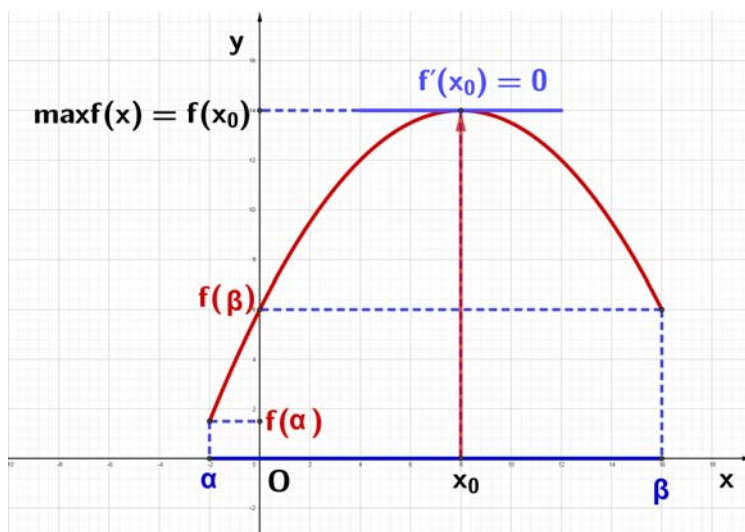
Για παράδειγμα η ευθεία $y = 3$, έχει με την γραφική παράσταση της

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 3, \quad x \in [-3, 2], \text{ ακριβώς τρία κοινά σημεία.}$$

γ. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, για το οποίο ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.

ΛΑΘΟΣ

(προφανώς δεν εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle όμως...



- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- Η f παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ άρα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[\alpha, \beta]$ και όπως στο διπλανό σχήμα λαμβάνει την μέγιστη τιμή της στο εσωτερικό σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ στο οποίο είναι

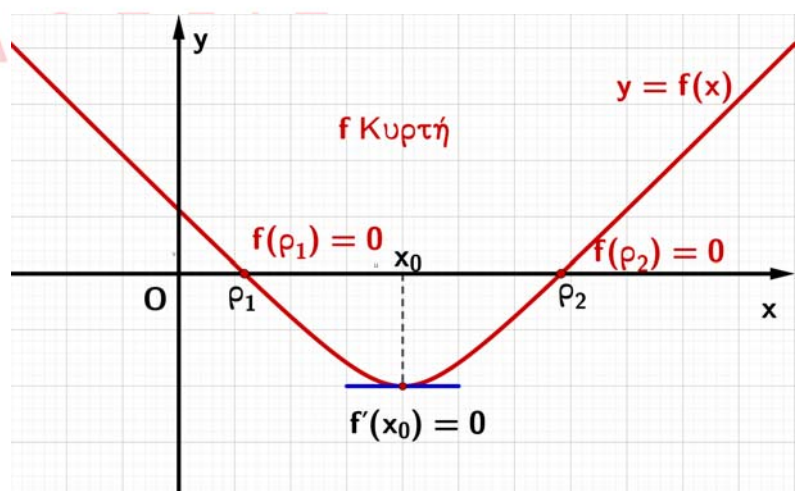
παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του (α, β) , άρα από το Θεώρημα του Fermat $f'(x_0) = 0$, Δηλαδή υπάρχει σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, παρόλο ότι $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και δεν εφαρμόζεται για την f το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

δ. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών, μιας παραγωγίσιμης και κυρτής συνάρτησης f , υπάρχει πάντα, ακριβώς μια ρίζα της παραγώγου συναρτήσεως δηλαδή της f' .

ΣΩΣΤΟ

Απολόγηση. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και ρ_1, ρ_2 δύο διαδοχικές ρίζες της δηλαδή $\rho_1 \neq \rho_2$ με $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ και

έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι: $\rho_1 < \rho_2$. Τότε αν θεωρήσουμε την f στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ η f σαν παραγωγίσιμη είναι και συνεχής και





έχουμε ότι $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ άρα από το Θεώρημα του ROLLE θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$. Έτσι μεταξύ των δύο διαδοχικών ριζών της f βρήκαμε μία ρίζα της παραγώγου συνάρτησης. Επειδή η f επιπλέον είναι κυρτή άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , άρα και η f' και 1-1 στο \mathbb{R} , άρα η ρίζα $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$ είναι η μοναδική ρίζα της παραγώγου συναρτήσεως.

ε. Αν συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ με $\alpha, \beta \in \Delta$ και ισχύει ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο

διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$

ΛΑΘΟΣ

(αφού μπορεί $\alpha = \beta$ και τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ ή $\alpha > \beta$ και τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$)

ΘΕΜΑ Β

B1. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} ,

Αφού για κάθε $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, άρα και 1-1, και το σύνολο

τιμών της είναι: $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \right) = (-\infty, +\infty)$,

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη και ορίζεται η $f^{-1}: f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και γενικά ισχύει ότι $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, άρα στην περίπτωση μας,

$y = x^3 \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y}, & y < 0 \end{cases}$ έτσι η αντίστροφη συνάρτηση είναι

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

B2. Για τη σύνθεση της $g(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ με την $h = f^{-1}$, παρατηρούμε ότι θεωρητικά η σύνθεση αυτή θα έχει δύο κλάδους αφού η

$h(x) = f^{-1}(x) = \begin{cases} h_1(x) = \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ h_2(x) = -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$ οπότε $f^{-1} \circ g = h \circ g = \begin{cases} h_1 \circ g, & x \in D_1 \\ h_2 \circ g, & x \in D_2 \end{cases}$.

• Η σύνθεση της $g(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, με την $h_1(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$ ορίζεται στο



$$\begin{aligned} D_{h_1 \circ g} = D_1 &= \{x \in D_g / g(x) \in D_{h_1}\} = \{x \in \mathbb{R}^* / \ln|x| \in [0, +\infty)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^* / \ln|x| \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^* / \ln|x| \geq \ln 1\} \stackrel{\ln x}{=} \\ & \quad \text{γν. αυξουσα} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^* / |x| \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \neq \emptyset \end{aligned}$$

και έχει τύπο $(h_1 \circ g)(x) = h_1(g(x)) = \sqrt[3]{\ln|x|}$, $x \in D_1 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

• Η σύνθεση της $g(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, με την $h_2(x) = -\sqrt[3]{-x}$, $x < 0$ ορίζεται

$$\begin{aligned} \text{στο } D_{h_2 \circ g} = D_2 &= \{x \in D_g / g(x) \in D_{h_2}\} = \{x \in \mathbb{R}^* / \ln|x| \in (-\infty, 0)\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^* / \ln|x| < 0\} = \{x \in \mathbb{R}^* / \ln|x| < \ln 1\} \stackrel{\ln x}{=} \\ & \quad \text{γν. αυξουσα} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^* / |x| < 1\} = (-1, 0) \cup (0, 1) \neq \emptyset \end{aligned}$$

και έχει τύπο $(h_2 \circ g)(x) = h_2(g(x)) = -\sqrt[3]{-\ln|x|}$, $x \in D_2 = (-1, 0) \cup (0, 1)$.

$$\text{Επομένως } (f^{-1} \circ g)(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\ln|x|} & , x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ -\sqrt[3]{-\ln|x|} & , x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \end{cases}$$

B3. Για κάθε $0 < x < 1$ ισχύει ότι $0 < x^3 < x < 1$: και για κάθε $x \in (0, 1) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

ότι $0 < x < \eta\mu x$ ή για κάθε $x \in (0, 1) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $0 < x < \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ ή ισοδύναμα

$x \cdot \sigma\upsilon\nu x < \eta\mu x$. Πράγματι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση (με δεδομένο ότι $\sigma\upsilon\nu x > 0$, για

κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $x \cdot \sigma\upsilon\nu x < \eta\mu x$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ή

ισοδύναμα $\eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. **Θεωρούμε την**

συνάρτηση $\varphi(x) = \eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ με $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, η φ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά και

γινόμενο παραγωγίσιμων και ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= (\eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = (\eta\mu x)' - (x \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = \\ &= \sigma\upsilon\nu x - \left[(x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x + x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' \right] = \\ &= \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x - x \cdot (-\eta\mu x) = x \cdot \eta\mu x > 0 \end{aligned}$$

Άρα $\varphi'(x) > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε



για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $x > 0 \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0) \Rightarrow \eta\mu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x > 0 \Rightarrow$

$$\eta\mu x > x \cdot \sigma\upsilon\nu x \quad \begin{matrix} \sigma\upsilon\nu x > 0 \\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{matrix} \Rightarrow \text{Άρα: } \boxed{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} > x}, \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Οπότε για κάθε $0 < x < 1$ ισχύει ότι $0 < x^3 < x < 1$ και $0 < x^3 < x < \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, όμως η

συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, και για κάθε $x \in (0, 1) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$0 < \eta\mu x < 1$ και $0 < \sigma\upsilon\nu x < 1$ οπότε

$$0 < x^3 < \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \quad \begin{matrix} \ln x \\ \text{γν. αυξουσα} \end{matrix} \Rightarrow \ln x^3 < \ln \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Rightarrow 3 \ln x < \ln(\eta\mu x) - \ln(\sigma\upsilon\nu x), \text{ άρα}$$

$$3 \ln x + \ln(\sigma\upsilon\nu x) < \ln(\eta\mu x) \text{ για κάθε } 0 < x < 1.$$

B4. Αφού το σημείο $M(\alpha, \beta)$, τη χρονική στιγμή $t=0$ ξεκινά από το σημείο

$O(0,0)$ και κινείται στη γραφική παράσταση της f^{-1} , με τέτοιο τρόπο, ώστε

$\alpha = \alpha(t) > 0$, για κάθε $t > 0$ άρα $\beta = f^{-1}(\alpha) = \sqrt[3]{\alpha}$ με $\alpha > 0$, και (ε) η εφαπτομένη ευθεία προς τη γραφική παράσταση της f^{-1} στο σημείο $M(\alpha, \sqrt[3]{\alpha})$ με $\alpha > 0$.

Οπότε επειδή η $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ και είναι

$$(f^{-1}(x))' = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}, \text{ για } x > 0,$$

άρα η εφαπτομένη ευθεία (ε) στο σημείο $M(\alpha, \sqrt[3]{\alpha})$ με $\alpha > 0$, θα έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y - \sqrt[3]{\alpha} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2}}(x - \alpha) \text{ η οποία τέμνει τον άξονα } x'x \text{ στο σημείο } A(x_A, 0),$$

Θέτουμε στην (ε) όπου $y=0$ και έχουμε

$$0 - \sqrt[3]{\alpha} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2}}(x_A - \alpha) \stackrel{\alpha > 0}{\Rightarrow} -3 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2} \cdot \sqrt[3]{\alpha} = x_A - \alpha \Rightarrow$$

$$-3\sqrt[3]{\alpha^2} \cdot \alpha = x_A - \alpha \Rightarrow x_A = -3\alpha + \alpha \Rightarrow x_A = -2\alpha$$

Άρα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(x_A = -2\alpha, 0)$, με $\alpha > 0$, άρα την κάθε

χρονική στιγμή ισχύει $x_A(t) = -2\alpha(t)$, με $\alpha = \alpha(t) > 0$. Ενώ για τον άξονα $y'y$

που τον τέμνει στο σημείο $B(0, y_B)$, θέτουμε στην (ε) όπου $x=0$ και έχουμε



$$y_B - \sqrt[3]{\alpha} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2}}(0 - \alpha) \Rightarrow y_B = \sqrt[3]{\alpha} - \frac{\alpha}{3 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2}} \Rightarrow$$

$$y_B = \sqrt[3]{\alpha} - \frac{\sqrt[3]{\alpha^3}}{3 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2}} \Rightarrow y_B = \sqrt[3]{\alpha} - \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{3} \Rightarrow y_B = \frac{2\sqrt[3]{\alpha}}{3}$$

Άρα η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B\left(0, y_B = \frac{2\sqrt[3]{\alpha}}{3}\right)$, με $\alpha > 0$.

Επομένως την κάθε χρονική στιγμή είναι $y_B(t) = \frac{2\sqrt[3]{\alpha(t)}}{3}$ με $\alpha = \alpha(t) > 0$.

(το παραπάνω θα το χρησιμοποιούσαμε αν ζητούσε και το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του B κάποια χρονική στιγμή t_1)

Αφού ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M είναι $\alpha'(t) = 2\mu/\text{sec}$, έχουμε

α) Για το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου A τη χρονική στιγμή t_0 όπου το M διέρχεται από το σημείο $M_0(8, f^{-1}(8))$ είναι $\alpha(t_0) = 8$ και $x'_A(t) = -2\alpha'(t) = -2 \cdot 2 = -4 \mu/\text{sec}$

β) Αφού το K είναι η προβολή του σημείου $M(\alpha, \beta)$ στον θετικό ημιάξονα Ox, άρα το εμβαδόν του τριγώνου OMK θα δίνεται από τον τύπο:

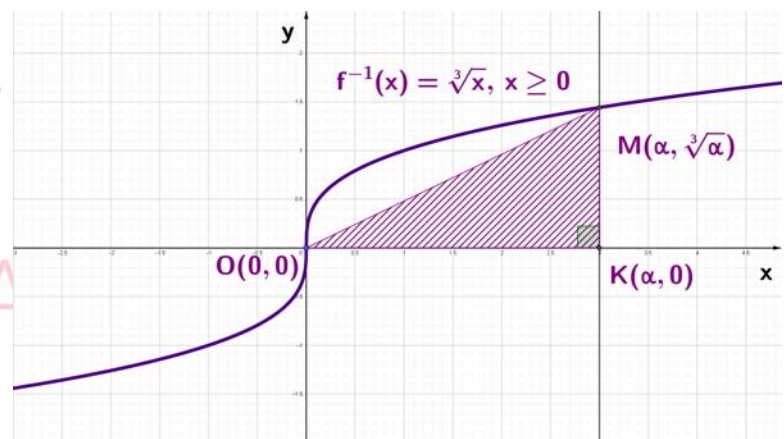
$$(OMK) = E(\alpha) = \frac{1}{2}(OK) \cdot (MK)$$

$$E(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha \cdot f^{-1}(\alpha)$$

$$E(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt[3]{\alpha} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \alpha^{\frac{1}{3}}$$

$$E(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\alpha^{\frac{4}{3}}$$

Δηλαδή $E(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^{\frac{4}{3}}$ $\alpha > 0$. (Εμβαδό στατικό, χωρίς «κίνηση»)



Άρα εφόσον το $\alpha = \alpha(t) > 0$, για κάθε $t > 0$ μεταβάλλεται με ρυθμό

$\alpha'(t) = 2\mu/\text{sec}$ άρα και το εμβαδόν του τριγώνου την κάθε χρονική στιγμή θα

δίνεται από τον τύπο: $E(t) = \frac{1}{2}[\alpha(t)]^{\frac{4}{3}}$



Άρα ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού την κάθε χρονική στιγμή είναι

$$E'(t) = \left(\frac{1}{2} [\alpha(t)]^{\frac{4}{3}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot [\alpha(t)]^{\frac{4}{3}-1} \cdot \alpha'(t) = \frac{2}{3} [\alpha(t)]^{\frac{1}{3}} \cdot \alpha'(t)$$

Άρα $E'(t) = \frac{2}{3} [\alpha(t)]^{\frac{1}{3}} \cdot \alpha'(t)$, την κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$.

Επομένως τη χρονική στιγμή t_0 όπου το Μ διέρχεται από το σημείο $M_0(8, f^{-1}(8))$ αφού $\alpha(t_0) = 8$ και $\alpha'(t) = 2 \mu/\text{sec}$, ο ρυθμός μεταβολής του θα

$$\text{είναι } E'(t_0) = \frac{2}{3} [\alpha(t_0)]^{\frac{1}{3}} \cdot \alpha'(t_0) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot 2 = \frac{8}{3} \text{ τ.μ./sec}$$

(extra) (*) Αν ζητούσε και το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Β τη χρονική στιγμή t_0 όπου το Μ διέρχεται από το σημείο $M_0(8, f^{-1}(8))$ είναι $\alpha(t_0) = 8$ και

$$\begin{aligned} y'_B(t) &= \left(\frac{2\sqrt[3]{\alpha(t)}}{3} \right)' = \frac{2}{3} \left(\sqrt[3]{\alpha(t)} \right)' \stackrel{\alpha(t) > 0}{=} \frac{2}{3} \cdot \left((\alpha(t))^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} (\alpha(t))^{\frac{1}{3}-1} \cdot \alpha'(t) = \\ &= \frac{2}{9} (\alpha(t))^{-\frac{2}{3}} \cdot \alpha'(t) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{(\alpha(t))^{\frac{2}{3}}} \cdot \alpha'(t) = \frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2(t)}} \cdot \alpha'(t) \end{aligned}$$

Άρα την κάθε χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Β στο οποίο η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ δίνεται από τη συνάρτηση

$$y'_B(t) = \frac{2 \cdot \alpha'(t)}{9 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2(t)}}, \text{ με } \alpha = \alpha(t) > 0, \text{ επομένως τη χρονική στιγμή } t_0 \text{ όπου το Μ}$$

διέρχεται από το σημείο $M_0(8, f^{-1}(8))$ είναι $\alpha(t_0) = 8$, θα είναι

$$y'_B(t_0) = \frac{2 \cdot \alpha'(t_0)}{9 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2(t_0)}} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot \sqrt[3]{8^2}} = \frac{4}{9 \cdot 4} = \frac{1}{9} \mu/\text{sec}$$

**ΘΕΜΑ Γ**

Αφού για την $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει ότι $f(x \cdot y) \leq y \cdot f(x) + x \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in (0,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο, Επομένως θα ισχύει ότι $y \cdot f(x) + x \cdot f(y) - f(x \cdot y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in (0,+\infty)$ ή ισοδύναμα

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\varphi(y) = y \cdot f(x) + x \cdot f(y) - f(x \cdot y)$, θα έχουμε ότι ισχύει $\varphi(y) \geq 0$, (1) για κάθε $y \in (0,+\infty)$ και παρατηρούμε ότι

$\varphi(1) = 1 \cdot f(x) + x \cdot f(1) - f(x \cdot 1) = f(x) - f(x) = 0$, έτσι από τη σχέση (1) έχουμε ότι

ισχύει $\boxed{\varphi(y) \geq \varphi(1)}$, (1) για κάθε $y \in (0,+\infty)$ και η $\varphi(y) = y \cdot f(x) + x \cdot f(y) - f(x \cdot y)$

είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = 1$, ως προς y , για κάθε $y \in (0,+\infty)$ και μάλιστα

$$\begin{aligned} \varphi'(y) &= \frac{d}{dy}(y \cdot f(x) + x \cdot f(y) - f(x \cdot y)) = (y \cdot f(x) + x \cdot f(y) - f(x \cdot y))' = \\ &= f(x) \cdot (y)' + x \cdot f'(y) - f'(x \cdot y) \cdot (x \cdot y)' = \\ &= f(x) \cdot 1 + x \cdot f'(y) - f'(x \cdot y) \cdot x \cdot (y)' = \\ &= f(x) + x \cdot f'(y) - f'(x \cdot y) \cdot x \cdot 1 \end{aligned}$$

Επομένως $\boxed{\varphi'(y) = f(x) + x \cdot f'(y) - f'(x \cdot y) \cdot x}$, για κάθε $y \in (0,+\infty)$

Έτσι η συνάρτηση $\varphi(y) = y \cdot f(x) + x \cdot f(y) - f(x \cdot y)$, στο εσωτερικό σημείο $y_0 = 1$ του

$(0,+\infty)$ λαμβάνει ελάχιστο αφού $\boxed{\varphi(y) \geq \varphi(1)}$, για κάθε $y > 0$ και είναι και παραγωγίσιμη

στο σημείο $y_0 = 1$, άρα σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat θα ισχύει ότι :

$$\varphi'(1) = 0 \Leftrightarrow f(x) + x \cdot f'(1) - f'(x \cdot 1) \cdot x = 0 \text{ ή}$$

$$f(x) + x \cdot 1 - f'(x) \cdot x = 0, \text{ για κάθε } x > 0 \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$x = f'(x) \cdot x - f(x), \text{ για κάθε } x > 0 \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$f'(x) \cdot x - (x)' f(x) = x, \text{ για κάθε } x > 0 \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$\frac{f'(x) \cdot x - (x)' f(x)}{x^2} = \frac{x}{x^2}, \text{ για κάθε } x > 0 \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x > 0 \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (\ln x)' \text{ για κάθε } x > 0.$$

Επομένως από το πόρισμα των συνεπειών του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού θα υπάρχει σταθερά $C \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει



$$\boxed{\frac{f(x)}{x} = \ln x + c}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$\text{Άρα θα ισχύει και για } x=1 \Rightarrow \frac{f(1)}{1} = \ln 1 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\boxed{\frac{f(x)}{x} = \ln x}, \text{ για κάθε } x > 0. \quad \boxed{f(x) = x \cdot \ln x}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Γ3. α) Για την μονotonία f

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ και ισχύει ότι

$$f'(x) = (x \cdot \ln x)' = (x)' \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, x > 0$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \ln x + 1 > 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \ln x > -1 \\ x > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow \frac{e^x}{\text{γν. αυξουσα}} \\ \Leftrightarrow e^{\ln x} > e^{-1} \\ \Leftrightarrow x > \frac{1}{e} \end{array} \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f'(x) < 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \ln x + 1 < 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \ln x < -1 \\ x > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow \frac{e^x}{\text{γν. αυξουσα}} \\ \Leftrightarrow e^{\ln x} < e^{-1} \\ \Leftrightarrow x < \frac{1}{e} \end{array} \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e}$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Έτσι έχουμε

• Η f είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ και $f'(x) < 0$

για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ άρα η f είναι γνησίως

φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ και ισχύει ότι για κάθε

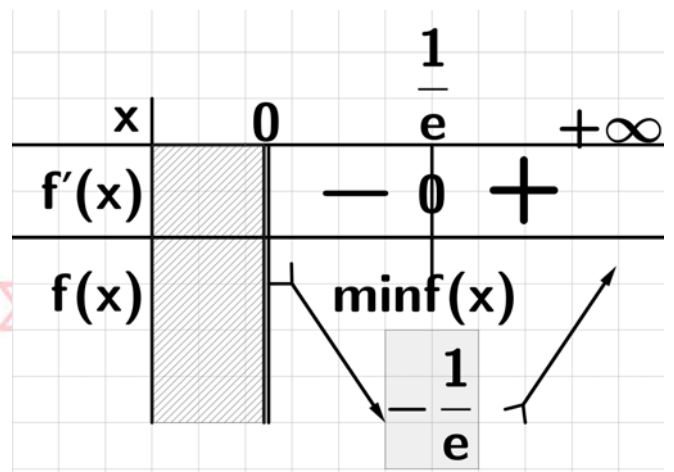
$$x \in \left(0, \frac{1}{e}\right] \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) \quad (1)$$

• Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ άρα η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ και ισχύει ότι για κάθε

$$x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right) \Rightarrow x \geq \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) \quad (2)$$

Επομένως από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι





$f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$, για κάθε $x > 0$, επομένως η f στο $x_0 = \frac{1}{e}$, λαμβάνει ολικό ελάχιστο το

$$\min f(x) = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \cdot \ln e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι δεν έχει σημεία καμπής

Γ3. β) Η $f'(x) = \ln x + x$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων

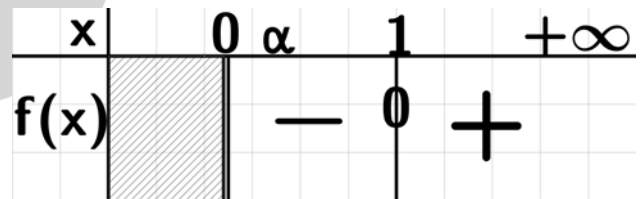
συναρτήσεων και μάλιστα $f''(x) = (f'(x))' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$,

επομένως η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

Γ4. α) Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο συνεχών και για το πρόσημο της έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής

$$\begin{aligned} \bullet f(x) \geq 0 & \left\{ \begin{array}{l} x \cdot \ln x \geq 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln x \geq 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{γν. αυξουσα}} \left\{ \begin{array}{l} \ln x \geq \ln 1 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \geq 1 \\ \bullet f(x) < 0 & \left\{ \begin{array}{l} x \cdot \ln x < 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ln x < 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{γν. αυξουσα}} \left\{ \begin{array}{l} \ln x < \ln 1 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε τον παρακάτω πίνακα για το πρόσημο της f . Έτσι για το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \alpha$ όπου $0 < \alpha < 1$, παρατηρούμε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, 1]$, επομένως



$$E(\alpha) = \int_{\alpha}^1 -f(x) dx = \int_{\alpha}^1 x \cdot \ln x dx = \int_1^{\alpha} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\right]_1^{\alpha} - \int_1^{\alpha} \frac{x^2}{2} \cdot (\ln x)' dx$$

$$E(\alpha) = \left[\frac{\alpha^2}{2} \cdot \ln \alpha - \frac{1^2}{2} \cdot \ln 1\right] - \int_1^{\alpha} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \ln \alpha - \frac{1}{2} \int_1^{\alpha} x dx, \text{ άρα}$$

$$E(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \ln \alpha - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\alpha} = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \ln \alpha - \left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right) = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \ln \alpha - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Επομένως $E(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \ln \alpha - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{4}$ με $0 < \alpha < 1$.

β) Για το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow 0} E(\alpha)$ έχουμε



$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} E(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[\frac{\alpha^2}{2} \cdot \ln \alpha - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{4} \right] = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[\frac{\alpha}{2} \cdot (\alpha \cdot \ln \alpha) - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{4} \right]$$

προφανώς έχουμε ότι:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{2} = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \text{ και}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha \cdot \ln \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\alpha \cdot \ln \alpha) \begin{pmatrix} 0 \cdot (-\infty) \\ \text{A.M.} \end{pmatrix} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\ln \alpha}{\frac{1}{\alpha}} \begin{pmatrix} \frac{-\infty}{+\infty} \\ \text{DLH} \end{pmatrix} \stackrel{2\text{ος κ}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{(\ln \alpha)'}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)'}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha \cdot \ln \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\alpha}}{-\frac{1}{\alpha^2}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\alpha^2}{\alpha} \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (-\alpha) = 0. \text{ Επομένως}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} E(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[\frac{\alpha}{2} \cdot (\alpha \cdot \ln \alpha) - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{1}{4} \right] = 0 \cdot 0 - 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $H(x) = f(x) - g(x)$

Και $H(0) = f(0) - g(0) = 1$, αφού από υπόθεση έχουμε $f(0) = g(0) + 1$

Αφού οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , Άρα η συνάρτηση $H(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και μάλιστα ισχύει $H'(x) = f'(x) - g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $H'(0) = f'(0) - g'(0) = 0$

Επίσης η $H'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως διαφορά παραγωγίσιμων και

ισχύει ότι $H''(x) = (H'(x))' = (f'(x) - g'(x))' = f''(x) - g''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Από υπόθεση έχουμε ότι ισχύει $f''(x) + f(x) = g''(x) + g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή ισοδύναμα $f''(x) - g''(x) = g(x) - f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή

$$H''(x) = f''(x) - g''(x) = -(f(x) - g(x)) = -H(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως για την $H(x) = f(x) - g(x)$, ισχύει ότι: $H''(x) = -H(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Η συνάρτηση $G(x) = H'(x) \cdot \text{συν}x + H(x) \cdot \eta\mu x$, είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ως άθροισμα και γινόμενο παραγωγίσιμων και ισχύει



$$\begin{aligned}
G'(x) &= (H'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + H(x) \cdot \eta\mu x)' = \\
&= H''(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + H'(x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' + H'(x) \cdot \eta\mu x + H(x) \cdot (\eta\mu x)' = \\
&= H''(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - \cancel{H'(x) \cdot \eta\mu x} + \cancel{H'(x) \cdot \eta\mu x} + H(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = \\
&= H''(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + H(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = [H''(x) + H(x)] \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0
\end{aligned}$$

Επομένως $G'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έτσι από το Θεώρημα των συνεπειών του Θ.Μ.Τ. η $G(x) = H'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + H(x) \cdot \eta\mu x$, είναι σταθερή στο \mathbb{R} , δηλαδή θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $G(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα

$$H'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + H(x) \cdot \eta\mu x = c \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αφού η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα ισχύει και για $x = 0$, επομένως

$$x = 0 \Rightarrow \cancel{H'(0) \cdot \sigma\upsilon\nu 0} + H(0) \cdot \eta\mu 0 = c \Rightarrow c = 0 \text{ και τότε}$$

$$H'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + H(x) \cdot \eta\mu x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Όμοια η συνάρτηση $\varphi(x) = H'(x) \cdot \eta\mu x - H(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ως διαφορά και γινόμενα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και μάλιστα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= (H'(x) \cdot \eta\mu x - H(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x)' = \\
&= H''(x) \cdot \eta\mu x + H'(x) \cdot (\eta\mu x)' - (H'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + H(x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x)') = \\
&= H''(x) \cdot \eta\mu x + \cancel{H'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x} - \cancel{H'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x} + H(x) \cdot \eta\mu x = \\
&= H''(x) \cdot \eta\mu x + H(x) \cdot \eta\mu x = [H''(x) + H(x)] \cdot \eta\mu x = 0 \cdot \eta\mu x = 0
\end{aligned}$$

Επομένως $\varphi'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έτσι από το Θεώρημα των συνεπειών του Θ.Μ.Τ. η $\varphi(x) = H'(x) \cdot \eta\mu x - H(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x$, είναι σταθερή στο \mathbb{R} , δηλαδή θα υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\varphi(x) = c_1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα

$$H'(x) \cdot \eta\mu x - H(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = c_1 \quad (2), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αφού η (2) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα ισχύει και για $x = 0$, επομένως

$$x = 0 \Rightarrow \cancel{H'(0) \cdot \eta\mu 0} - H(0) \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = c_1 \Rightarrow c_1 = -1 \text{ και τότε}$$

$$H'(x) \cdot \eta\mu x - H(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = -1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Έτσι για την συνάρτηση $H(x) = f(x) - g(x)$, έχουμε ότι ισχύουν



$$\left. \begin{array}{l} H'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + H(x) \cdot \eta\mu x = 0 \\ H'(x) \cdot \eta\mu x - H(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = -1 \end{array} \right\} \cdot \left. \begin{array}{l} \cdot \eta\mu x \\ \cdot (-\sigma\upsilon\nu x) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} H'(x) \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + H(x) \cdot \eta\mu^2 x = 0 \\ -H'(x) \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + H(x) \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = \sigma\upsilon\nu x \end{array} \right\}$$

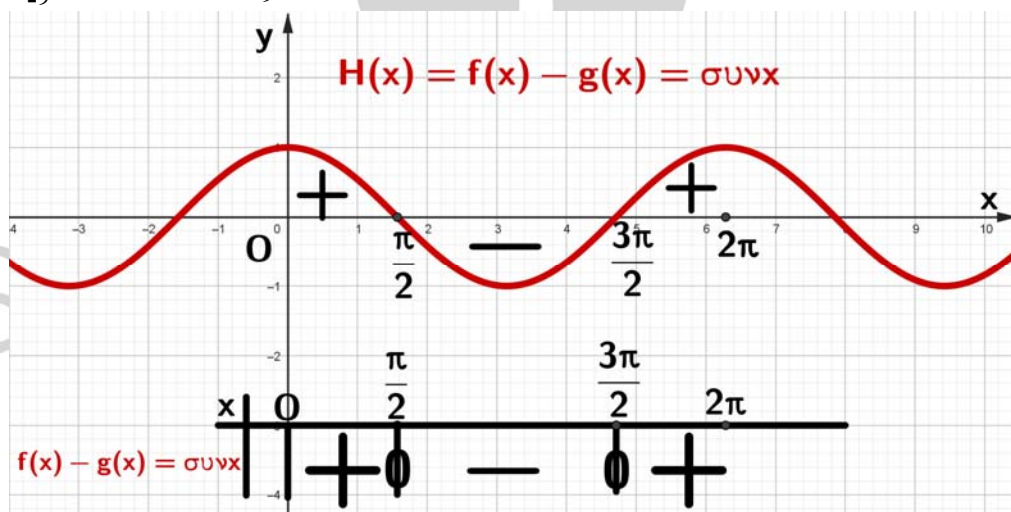
Και αν προσθέσουμε κατά μέλη

$$\cancel{H'(x) \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} + H(x) \cdot \eta\mu^2 x - \cancel{H'(x) \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} + H(x) \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = \sigma\upsilon\nu x$$

$$H(x) \cdot (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \boxed{H(x) = \sigma\upsilon\nu x}$$

Δ3. Για το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και τις κατακόρυφες ευθείες $x=0$ και $x=2\pi$, Μελετούμε το πρόσημο της διαφοράς $f-g$, δηλαδή της συνάρτησης $H(x) = f(x) - g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $H(x) = \sigma\upsilon\nu x$, διαπιστώνουμε ότι

- $H(x) \geq 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \geq 0 \\ \Leftrightarrow x \in [0, 2\pi] \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ και
- $H(x) < 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x < 0 \\ \Leftrightarrow x \in [0, 2\pi] \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$



το πρόσημο της διαφοράς φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) - g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Επομένως αφού οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[0, 2\pi]$, άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και τις κατακόρυφες ευθείες $x=0$ και $x=2\pi$, θα δίνεται από τον τύπο:



$$E(\Omega) = \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (g(x) - f(x)) dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (f(x) - g(x)) dx$$

Επομένως

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\sigma\upsilon\nu x dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sigma\upsilon\nu x dx = \\ &= [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\eta\mu x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + [\eta\mu x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \left(\eta\mu \frac{\pi}{2} - \eta\mu 0\right) - \left(\eta\mu \frac{3\pi}{2} - \eta\mu \frac{\pi}{2}\right) + \left(\eta\mu 2\pi - \eta\mu \frac{3\pi}{2}\right) = \\ &= 1 - 0 - (-1 - 1) + (0 - (-1)) = 1 + 2 + 1 = 4\tau.μ. \end{aligned}$$

Δ4. Η εξίσωση $e^{H(x)-1} - \frac{11}{e}x^2 = e^{x^2} - \frac{11}{e}(H(x)-1)$, μπορεί να μετασχηματισθεί ως εξής πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με e

$$\frac{e^{H(x)}}{e} - \frac{11}{e}x^2 = e^{x^2} - \frac{11}{e}(H(x)-1) \Leftrightarrow$$

$$e^{H(x)} - 11x^2 = e^{x^2} \cdot e - 11(H(x)-1) \Leftrightarrow$$

$$e^{H(x)} - 11x^2 = e^{x^2+1} - 11H(x) + 11 \Leftrightarrow$$

$$e^{H(x)} + 11H(x) = e^{x^2+1} + 11 + 11x^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{e^{H(x)} + 11H(x) = e^{x^2+1} + 11(x^2 + 1)} (*)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $d(x) = e^x + 11x$, $x \in \mathbb{R}$.

Προφανώς η d είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και μάλιστα

$d'(x) = (e^x + 11x)' = e^x + 11 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η d είναι γνησίως αύξουσα

στο \mathbb{R} άρα και 1-1 στο \mathbb{R} , και τότε η (*) γίνεται



$$e^{H(x)} + 11H(x) = e^{x^2+1} + 11(x^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$d(H(x)) = d(x^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$H(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow \boxed{\text{συν}x = x^2 + 1}$$

Ξέρουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 + 1 \geq 1$ και το "=" μόνο για $x = 0$, ενώ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει επίσης ότι $\text{συν}x \leq 1$ και το "=" για $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, έτσι για να είναι

$$\text{δυνατή η ισότητα } \text{συν}x = x^2 + 1 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{συν}x = 1 \\ x^2 + 1 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{x = 0} \text{ (για } k = 0)$$

$$\Delta 5. \text{ Για το } I = \int_{e^\pi}^{e^{2\pi}} H(\ln x) dx = \int_{e^\pi}^{e^{2\pi}} \text{συν}(\ln x) dx$$

$$\text{Θέτουμε όπου } \ln x = u \Leftrightarrow \boxed{x = e^u}$$

$$\text{Άκρα: Όταν } x = e^\pi \Leftrightarrow u = \ln e^\pi \Leftrightarrow u = \pi$$

$$\text{Όταν } x = e^{2\pi} \Leftrightarrow u = \ln e^{2\pi} \Leftrightarrow u = 2\pi$$

$$\text{Διαφορικό: } \boxed{dx = d(e^u) = (e^u)' du = e^u du}$$

Έτσι το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} I &= \int_{e^\pi}^{e^{2\pi}} H(\ln x) dx = \int_{e^\pi}^{e^{2\pi}} \text{συν}(\ln x) dx = \int_{\pi}^{2\pi} \text{συν}u \cdot e^u du = \int_{\pi}^{2\pi} \text{συν}u \cdot (e^u)' du = \\ &= \left[\text{συν}u \cdot e^u \right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} (\text{συν}u)' \cdot e^u du = (\text{συν}2\pi \cdot e^{2\pi}) - (\text{συν}\pi \cdot e^\pi) - \int_{\pi}^{2\pi} (-\eta\mu u) \cdot e^u du = \end{aligned}$$

Επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται



$$\begin{aligned}
 I &= 1 \cdot e^{2\pi} - (-1) \cdot e^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \eta\mu u \cdot e^u du = e^{2\pi} + e^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \eta\mu u \cdot (e^u)' du = \\
 &= e^{2\pi} + e^{\pi} + \left[\eta\mu u \cdot e^u \right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} (\eta\mu u)' \cdot e^u du = \\
 &= e^{2\pi} + e^{\pi} + (\cancel{\eta\mu 2\pi} \cdot e^{2\pi}) - (\cancel{\eta\mu \pi} \cdot e^{\pi}) - \int_{\pi}^{2\pi} \sigma\upsilon\nu u \cdot e^u du \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\boxed{I = e^{2\pi} + e^{\pi} - I}$$

$$\text{Άρα } I = \int_{e^{\pi}}^{e^{2\pi}} H(\ln x) dx = \int_{e^{\pi}}^{e^{2\pi}} \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx = \int_{\pi}^{2\pi} \sigma\upsilon\nu u \cdot e^u du.$$

$$I + I = e^{2\pi} + e^{\pi} \Leftrightarrow 2I = e^{2\pi} + e^{\pi} \Leftrightarrow \boxed{I = \frac{e^{2\pi} + e^{\pi}}{2}}$$

supremum

ΕΚΔΟΣΕΙΣ

©2024 Βασίλης Γ. Κουγιουμτσιάδης