



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥΡΙΑΚΗ 14 ΑΠΡΙΛΗ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

40° ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^v$ με $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Να αποδείξετε είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f'(x) = v \cdot x^{v-1}$, δηλαδή να δείξετε ότι $(x^v)' = v \cdot x^{v-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7.

A2. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 3

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο A και για την οποία ισχύει ότι $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$, τότε αναγκαστικά η f είναι 1-1 στο A »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A** αν είναι αληθές, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδές. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια 1-1 συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $\widehat{xOy}$ και $\widehat{x'O'y'}$

β. Αν για την συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή ότι: για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, τότε η f είναι αναγκαστικά 1-1 στο A .

γ. Αν μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε το μέγιστο της είναι σε κάθε περίπτωση το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

δ. Αν το σύνολο τιμών μιας συνεχούς (και μη σταθερής) συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$, τότε αναγκαστικά η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$.

ε. Για κάθε ζεύγος f, g συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει σε

κάθε περίπτωση ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)] dx = \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \mu \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ e^{x-1} + 1, & x > 1 \end{cases}$,

B1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f , αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4) και να ορίσετε τη σύνθεση της $g(x) = \eta\mu x + 1$ με την f^{-1} . (μονάδες 3).

Μονάδες 7

B4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -8$ και $x = 2$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, 4)$, εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και έχει σημείο καμπής το $A(-1, f(-1))$

Γ1. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

Αν $\alpha = -3, \beta = 0, \gamma = 4$

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

Μονάδες 6

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 2$.

Μονάδες 4

Γ5. Να δείξετε ότι $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (4 - \eta\mu^3 x - 3\eta\mu^2 x) dx < 2\pi$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η $f: (0 + \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και για την οποία ισχύουν ότι



- Η γραφική της παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$, στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ και

- $x \cdot f'(x) + x^2 \cdot f''(x) = 2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $G(x) = x \cdot f'(x) - 2\ln x$ είναι σταθερή (μονάδες 2) στο $(0, +\infty)$ και να βρείτε την f (μονάδες 3)

Μονάδες 5

Αν $f(x) = (\ln x)^2$, $x > 0$

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{(x-1)^2} \right]$.

Μονάδες 4

Δ4. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής (μονάδες 3) και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $e \cdot (\ln x)^2 + e \leq 2x$, $x > 0$. (μονάδες 3).

Μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 \frac{f(x)}{e^x} dx < \frac{2e-5}{e^2}$.

Μονάδες 4

Δ6. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

Μονάδες 2

©2024 Βασίλης Γ. Κουγιουμτσιάδης

**«Κι αν τώρα σ' άδειο τσίρκο ακροβατώ ξανά
σφραγίζοντας με νόημα το στόμα...
είναι γιατί βαθιά ...βαθιά παραφυλάει
η δύσκολη εφηβεία των»59**



Υ.Γ.

Το τελευταίο κομμάτι αφιερωμένο
σ' αυτούς που με σκέδαση αναγκάστηκαν να αποπειραθούν να νιώσουν
ή να ονειρευτούν: **πως είναι τα πράγματα όταν εκρήγνυνται...**

Ξέχασαν βέβαια ότι η αυθεντική μυρωδιά από το φυτίλι ,
δεν έχει καμία απολύτως σχέση
με την αποφορά που έχουν τα κοινόχρηστα σεντόνια,
εμποτισμένα με την ακλόνητη ξινίλα των συμβολαίων
και των άπλυτων υπογείων

πόσο μάλλον που η στιφάδα
αυτών των ανήθικων ζουμερών «πάντα»,
αυτών που «τρέχουν» ανεξέλεγκτα από τα κλειδωμένα μέλη,
είναι εντελώς ασυμβίβαστη
με την υπολογιστική δυσσομία των πληρωμένων λογαριασμών
και τη μοιραία κατάληξη των προγραμματισμένων πεντάλεπτων.

και βέβαια πάντα,
η αιώνια ευωδία που κρύβουν οι κωνικές μελωδίες και οι νεανικές ανατροπές
δεν έχει απολύτως καμία σχέση
με την πλαστική και άοσμη διαίωσιση του είδους των δυστυχισμένων,
που τάχα σαν θαύμα,
επωάζουν μέσα στους δοσομετρητές των δοκιμαστικών σωλήνων

**Στους δρόμους ταχύτητας, τα λεγόμενα sprint
ή στους άλλους δρόμους ημιαντοχής
ή ακόμα και σ' αυτούς της παρατεταμένης αντοχής ...
μετράει**

**είτε το «μπαμ» που έχει ο καθένας μέσα του,
η έκρηξη των ταξιδιών που ρέει στις τσιτωμένες φλέβες του,
είτε η ανθεκτικότητα των ονείρων και η επιμονή των κορυφών που έχουν
σημαδέψει τη ζωή του...**

Έτσι λυπάμαι....

**Αλλά δεν έχετε καμία τύχη
Θα είστε πάντα δεύτεροι**

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Για τη συνάρτηση $f(x) = x^v$ με $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, θεωρούμε το λόγο μεταβολής στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$. Έτσι για $x \neq x_0$ είναι:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} \text{ ή}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2} \cdot x_0 + x^{v-3} \cdot x_0^2 + \dots + x^2 \cdot x_0^{v-3} + x \cdot x_0^{v-2} + x_0^{v-1})}{x - x_0}$$

$$\text{Άρα } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2} \cdot x_0 + x^{v-3} \cdot x_0^2 + \dots + x^2 \cdot x_0^{v-3} + x \cdot x_0^{v-2} + x_0^{v-1}$$

Οπότε προφανώς υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\underbrace{x^{v-1} + x^{v-2} \cdot x_0 + x^{v-3} \cdot x_0^2 + \dots + x^2 \cdot x_0^{v-3} + x \cdot x_0^{v-2} + x_0^{v-1}}_{v \text{ όροι} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{x_0^{v-1} + x_0^{v-2} \cdot x_0 + x_0^{v-3} \cdot x_0^2 + \dots + x_0^2 \cdot x_0^{v-3} + x_0 \cdot x_0^{v-2} + x_0^{v-1}}_{v \text{ όροι}} = v \cdot x_0^{v-1}$$

Άρα η $f(x) = x^v$ με $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ και μάλιστα

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = v \cdot x_0^{v-1}$$

Άρα η $f(x) = x^v$ με $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι

$$f'(x) = v \cdot x^{v-1}, \text{ δηλαδή να δείξετε ότι } (x^v)' = v \cdot x^{v-1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A2. το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και G είναι μια παράγουσα της

$$f \text{ στο } [a, b], \text{ τότε } \int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a), \text{ ή } \int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

A3. Για τον ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο A και για την οποία ισχύει ότι $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$, τότε αναγκαστικά η f είναι 1-1 στο A »

α. Αληθής

β. Αιτιολόγηση (με Απόδειξη) Με απαγωγή σε άτοπο



Έστω ότι η f δεν είναι 1-1 στο A , τότε θα υπήρχαν έστω και δύο $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ αλλά $f(x_1) = f(x_2)$. Αφού $x_1 \neq x_2$, έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_1 < x_2$. Θεωρούμε την f στο διάστημα $[x_1, x_2] \subseteq A$

- Η f συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq A$
- η f παραγωγίσιμη (τουλάχιστον) στο (x_1, x_2)
- και $f(x_1) = f(x_2)$

Τότε από το Θεώρημα του Rolle θα υπήρχε $x_0 \in (x_1, x_2) \subset A$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$. Το οποίο είναι Άτοπο αφού από υπόθεση έχουμε $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in A$.

Επομένως τέτοια x_1, x_2 δεν υπάρχουν και τότε για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ άρα η f είναι 1-1 στο A .

Υπενθυμίζουμε ότι :

- αν ένας ισχυρισμός είναι λάθος, αυτό αιτιολογείται με κατάλληλο αντιπαράδειγμα.
- Όμως υπάρχουν και Ισχυρισμοί οι οποίοι είναι Αληθείς!!!!. Έναν ισχυρισμό ο οποίος είναι Αληθής, η αιτιολόγησή του, δεν γίνεται με την επίκληση παραδειγμάτων, αλλά πρέπει να τον αποδείξουμε χρησιμοποιώντας άλλα Θεωρήματα και πορίσματα ή σχόλια που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο....

A4.

α. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια 1-1 συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $\widehat{xOy}$ και $\widehat{x'O'y'}$

ΣΩΣΤΟ (σχολικό βιβλίο σελίδα 36-37)

β. Αν για την συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή ότι: για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, τότε η f είναι αναγκαστικά 1-1 στο A .

ΛΑΘΟΣ (το παραπάνω ισχύει για κάθε συνάρτηση είτε είναι 1-1 είτε όχι)

γ. Αν μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε το μέγιστο της είναι σε κάθε περίπτωση το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

ΣΩΣΤΟ (επειδή είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα από το Θεώρημα της Μέγιστης και της Ελάχιστης Τιμής λαμβάνει μέγιστο στο $[\alpha, \beta]$, το οποίο σύμφωνα με το σχόλιο ii) της σελίδας 142 θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.)

δ. Αν το σύνολο τιμών μιας συνεχούς (και μη σταθερής) συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$, τότε αναγκαστικά η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$.

ΛΑΘΟΣ (Αντιπαράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in [\alpha, \beta] = \left[-\frac{11}{5}, \frac{21}{10}\right]$

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο

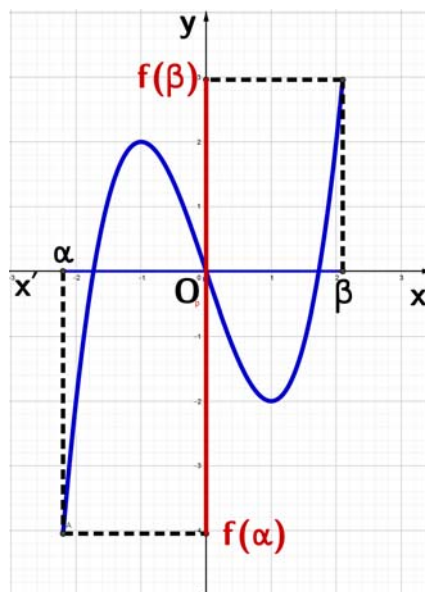
$$\Delta = [\alpha, \beta] = \left[-\frac{11}{5}, \frac{21}{10}\right]$$

και έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta) = \left[f\left(-\frac{11}{5}\right), f\left(\frac{21}{10}\right)\right]$,

χωρίς όμως να είναι γνησίως αύξουσα στο

$$\Delta = [\alpha, \beta] = \left[-\frac{11}{5}, \frac{21}{10}\right]$$

(Μπορούμε να θεωρήσουμε την $f(x) = x^3 - 3x$,
 $x \in [\alpha, \beta] = [-2, 2]$)



ε. Για κάθε ζεύγος f, g συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει σε

$$\text{κάθε περίπτωση ότι: } \int_{\alpha}^{\beta} [\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)] dx = \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \mu \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

ΣΩΣΤΟ (σχολικό βιβλίο σελίδα 214) Ιδιότητες του Ορισμένου Ολοκληρώματος.

ΘΕΜΑ Β

B1. Για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ e^{x-1} + 1, & x > 1 \end{cases}$,

παρατηρούμε

- Η $f(x) = 2 - \sqrt{1-x}$, είναι συνεχής στο $(-\infty, 1)$ ως διαφορά και σύνθεση συνεχών.
- $f(x) = e^{x-1} + 1$ είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών.
- Η συνέχεια της f στο $x_0 = 1$

I. $x \rightarrow 1^-$ τότε $x < 1$ επομένως η $f(x) = 2 - \sqrt{1-x}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - \sqrt{1-x}) = 2 - \sqrt{1-1} = 2 \text{ και } f(1) = 2 - \sqrt{1-1} = 2$$

II. $x \rightarrow 1^+$ τότε $x > 1$ επομένως η $f(x) = e^{x-1} + 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{x-1} + 1) = e^{1-1} + 1 = 1 + 1 = 2$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ άρα θα υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 = f(1)$.

Άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

B2. Για την μονοτονία της f .

• Η $f(x) = 2 - \sqrt{1-x}$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (-\infty, 1)$, ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει ότι

$$f'(x) = (2 - \sqrt{1-x})' = 0 - \frac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0, \text{ για κάθε } x < 1.$$

• Η $f(x) = e^{x-1} + 1$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 1$, ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει ότι

$$f'(x) = (e^{x-1} + 1)' = e^{x-1} \cdot (x-1)' + 0 = e^{x-1} > 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

Άρα παρατηρούμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, άρα το $f(1)$, δεν είναι ακρότατο για την f και η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$$\mathbb{R} \text{ και το σύνολο τιμών της } f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - \sqrt{1-x}) =$$

(θέτουμε $u = 1 - x$ και τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x) = +\infty$) Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - \sqrt{1-x}) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (2 - \sqrt{u}) = 2 - (+\infty) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} + 1) =$$

(θέτουμε $t = x - 1$ και τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} t = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$) Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} + 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^t + 1) = +\infty$$

Επομένως το σύνολο τιμών της $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Σημείωση : Είναι χρήσιμο σε αυτό το παράδειγμα που στη συνέχεια ζητείται η εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης, να βρούμε και τα επιμέρους (αναγκαστικά ξένα μεταξύ τους σύνολα τιμών), τα οποία θα αποτελούν τους περιορισμούς για την αλλαγή τύπου της αντίστροφης συνάρτησης) Έτσι

• Η f είναι συνεχής στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα (και στο $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ και το (επιμέρους) σύνολο τιμών της είναι

$$\text{το } f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 2]$$

• Η f είναι συνεχής στο $\Delta_2 = (1, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα (και στο $\Delta_2 = (1, +\infty)$ και το (επιμέρους) σύνολο τιμών της είναι

$$\text{το } f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (2, +\infty)$$



B3. Όπως ήδη αποδείξαμε: η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1, επομένως, αντιστρέφεται ορίζεται δηλαδή η αντίστροφη $f^{-1}: f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ δηλαδή $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και γενικά ισχύει ότι

$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $y \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ή στην περίπτωση μας

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \begin{cases} 2 - \sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ e^{x-1} + 1, & x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \sqrt{1-x}, & x \leq 1, y \leq 2 \\ y = e^{x-1} + 1, & x > 1, y > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} = 2-y, & x \leq 1, y \leq 2 \\ e^{x-1} = y-1, & x > 1, y > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{1-x})^2 = (2-y)^2, & x \leq 1, y \leq 2 \\ x-1 = \ln(y-1), & x > 1, y > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1-x = (2-y)^2, & x \leq 1, y \leq 2 \\ x = 1 + \ln(y-1), & x > 1, y > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - (2-y)^2, & x \leq 1, y \leq 2 \\ x = 1 + \ln(y-1), & x > 1, y > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x = \begin{cases} 1 - (2-y)^2, & y \leq 2 \\ 1 + \ln(y-1), & y > 2 \end{cases}} \quad \text{Επομένως } x = f^{-1}(y) = \begin{cases} 1 - (2-y)^2, & y \leq 2 \\ 1 + \ln(y-1), & y > 2 \end{cases}$$

Άρα η $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τύπο $\boxed{f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 - (2-x)^2, & x \leq 2 \\ 1 + \ln(x-1), & x > 2 \end{cases}}$

Για τη σύνθεση της $g(x) = \eta\mu x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ με την f^{-1}

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} f_1^{-1}(x) = 1 - (2-x)^2, & x \leq 2 \\ f_2^{-1}(x) = 1 + \ln(x-1), & x > 2 \end{cases}$$

Θεωρητικά θα πρέπει να εξετάσουμε για τις δύο συνθέσεις της g με κάθε μια από τις συναρτήσεις που απαρτίζουν την f^{-1} :

$$(f^{-1} \circ g)(x) = \begin{cases} (f_1^{-1} \circ g)(x) \\ (f_2^{-1} \circ g)(x) \end{cases}$$

• Η σύνθεση της $g(x) = \eta\mu x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ με την $f_1^{-1}(x) = 1 - (2-x)^2$, $x \leq 2$ ορίζεται στο

$$D_{f_1^{-1} \circ g} = \left\{ x \in D_g = \mathbb{R} / g(x) = \eta\mu x + 1 \in D_{f_1^{-1}} = (-\infty, 2] \right\} \quad \text{ή}$$

$$D_{f_1^{-1} \circ g} = \{ x \in \mathbb{R} / \eta\mu x + 1 \leq 2 \} = \{ x \in \mathbb{R} / \eta\mu x \leq 1 \} = \mathbb{R} \neq \emptyset \quad \text{και έχει τύπο}$$

$$(f_1^{-1} \circ g)(x) = f_1^{-1}(g(x)) = f_1^{-1}(\eta\mu x + 1) = 1 - (2 - (\eta\mu x + 1))^2 = 1 - (1 - \eta\mu x)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Έτσι είναι προφανές ότι σύνθεση της $g(x) = \eta\mu x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ με την

$$f_2^{-1}(x) = 1 + \ln(x-1), x > 2 \text{ δεν ορίζεται αφού}$$

$$D_{f_2^{-1} \circ g} = \left\{ x \in D_g = \mathbb{R} / g(x) = \eta\mu x + 1 \in D_{f_2^{-1}} = (2, +\infty) \right\} \text{ ή}$$

$$D_{f_2^{-1} \circ g} = \{ x \in \mathbb{R} / \eta\mu x + 1 > 2 \} = \{ x \in \mathbb{R} / \eta\mu x > 1 \} = \emptyset$$

Άρα τελικά η σύνθεση της g με την f^{-1} έχει μόνο έναν κλάδο:

$$\boxed{(f^{-1} \circ g)(x) = (f_1^{-1} \circ g)(x) = 1 - (1 - \eta\mu x)^2}, x \in \mathbb{R}.$$

B4. Για το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -8$ και $x = 2$, παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $[-8, 2]$.

Για το πρόσημο της f .

- Προφανώς $f(x) = e^{x-1} + 1 > 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$

- Για τα $x \in [-8, 1]$ έχουμε $f(x) = 2 - \sqrt{1-x}$, έτσι

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ x \in [-8, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2 - \sqrt{1-x} \geq 0 \\ x \in [-8, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \geq \sqrt{1-x} \geq 0 \\ x \in [-8, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2^2 \geq (\sqrt{1-x})^2 \\ x \in [-8, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 4 \geq 1-x \\ x \in [-8, 1] \end{array} \right\}$$

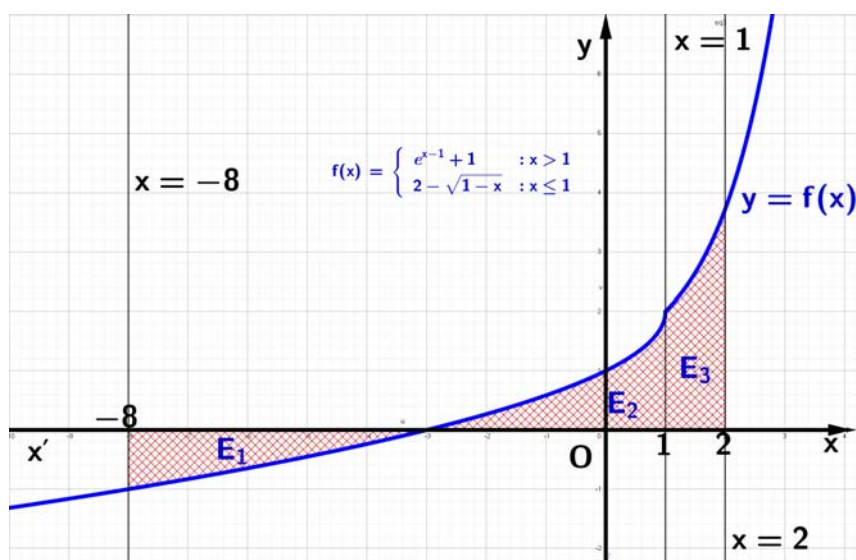
$$\left. \begin{array}{l} x \geq -3 \\ x \in [-8, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in [-3, 1]$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) < 0 \\ x \in [-8, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2 - \sqrt{1-x} < 0 \\ x \in [-8, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2 < \sqrt{1-x} \geq 0 \\ x \in [-8, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2^2 < (\sqrt{1-x})^2 \\ x \in [-8, 1] \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in [-8, -3)$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα για το πρόσημο της f (το 1 εμφανίζεται γιατί σε εκείνο το σημείο αλλάζει τύπο η f)

x	$-\infty$	-8	-3	1	2	$+\infty$
$f(x)$		—	0	+	+	

$$\text{Έτσι } E(\Omega) = \int_{-8}^2 |f(x)| dx = \int_{-8}^{-3} -f(x) dx + \int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = E_1 + E_2 + E_3$$



$$E_1 = \int_{-8}^{-3} -f(x) dx = \int_{-8}^{-3} (\sqrt{1-x} - 2) dx = \int_{-8}^{-3} \sqrt{1-x} dx - \int_{-8}^{-3} 2 dx.$$

Στο ολοκλήρωμα $\int_{-8}^{-3} \sqrt{1-x} dx$ θέτουμε $\boxed{\sqrt{1-x} = u} \Rightarrow 1-x = u^2 \Rightarrow \boxed{1-u^2 = x}$

Άκρα: όταν $x = -8 \Rightarrow u = \sqrt{1-(-8)} = \sqrt{9} = 3$

όταν $x = -3 \Rightarrow u = \sqrt{1-(-3)} = \sqrt{4} = 2$

Διαφορικό $dx = d(1-u^2) = (1-u^2)' du = -2u du$ άρα $\boxed{dx = -2u du}$

$$\int_{-8}^{-3} \sqrt{1-x} dx = \int_3^2 u(-2u) du = \int_2^3 2u^2 du = \left[\frac{2u^3}{3} \right]_2^3 = \frac{2 \cdot 3^3}{3} - \frac{2 \cdot 2^3}{3} = \frac{54-16}{3} = \frac{38}{3}$$

$$E_1 = \int_{-8}^{-3} \sqrt{1-x} dx - \int_{-8}^{-3} 2 dx = \frac{38}{3} - 2(-3 - (-8)) = \frac{38}{3} - 10 = \frac{38}{3} - \frac{30}{3} = \frac{8}{3}$$

Σημείωση: Μπορούσαμε το ολοκλήρωμα $\int_{-8}^{-3} \sqrt{1-x} dx$, να το υπολογίσουμε και

χωρίς αλλαγή μεταβλητής. Βλέπε τον τρόπο υπολογισμού του E_2 παρακάτω:

$$E_2 = \int_{-3}^1 f(x) dx = \int_{-3}^1 (2 - \sqrt{1-x}) dx = \int_{-3}^1 \left(2 + (1-x)^{\frac{1}{2}} (1-x)' \right) dx = \left[2x + \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_{-3}^1$$

$$E_2 = \left[2x + \frac{2}{3} \cdot (1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_{-3}^1 = 2 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot (1-1)^{\frac{3}{2}} - \left(2(-3) + \frac{2}{3} \cdot (1-(-3))^{\frac{3}{2}} \right) = 2 + 6 - \frac{2}{3} \sqrt{4^3}$$

$$E_2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

$$E_3 = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (e^{x-1} + 1) dx = \left[e^{x-1} + x \right]_1^2 = (e^{2-1} + 2) - (e^{1-1} + 1) = e + 2 - 1 - 1 = e$$

Επομένως

$$E(\Omega) = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} + e = \frac{16}{3} + e \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και

- η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, 4)$, επομένως

$$f(0) = 4 \Rightarrow -0^3 + \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = 4 \Rightarrow \boxed{\gamma = 4}, \text{ έτσι } \boxed{f(x) = -x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4}$$

- Η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ σε κάποιο σημείο $A(x_0, 0)$ άρα προφανώς

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{-x_0^3 + \alpha x_0^2 + \beta x_0 + 4 = 0} \quad (1)$$

δηλαδή στο σημείο $A(x_0, 0)$, η εφαπτομένη ευθεία προς την γραφική παράσταση της f είναι ο ίδιος ο άξονας $x'x$, ο οποίος έχει κλίση ίση με μηδέν, και αφού η f σαν πολυωνυμική 3^{ου} βαθμού είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα είναι παραγωγίσιμη και

στο x_0 και η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει όπως γνωρίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ευθείας, έτσι αναγκαστικά $\lambda = f'(x_0) = 0$ (2)

$$\text{Όμως } f'(x) = (-x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4)' = -3x^2 + 2\alpha x + \beta$$

Άρα $f'(x) = -3x^2 + 2\alpha x + \beta$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως από την σχέση (2)

$$-3x_0^2 + 2\alpha x_0 + \beta = 0 \quad (3)$$

• Έχουμε επίσης από την Υπόθεση ότι η C_f έχει σημείο καμπής το $A(-1, f(-1))$ και προφανώς επειδή η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, σαν πολυωνυμική

συνάρτηση 2^{ου} βαθμού και μάλιστα ισχύει $f''(x) = (f'(x))' = (-3x^2 + 2\alpha x + \beta)' = -6x + 2\alpha$

Δηλαδή $f''(x) = -6x + 2\alpha$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα το σημείο $A(-1, f(-1))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f στο σημείο $x_1 = -1$, επομένως από το σχετικό Θεώρημα αναγκαστικά θα ισχύει ότι $f''(-1) = 0$ (Στην πραγματικότητα πρόκειται για εφαρμογή του Θεωρήματος Fermat για την $f'(x)$)

$$\text{Έτσι } f''(-1) = 0 \Rightarrow -6 \cdot (-1) + 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = -3$$

Άρα $f(x) = -x^3 - 3x^2 + \beta x + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$(1) \Rightarrow -x_0^3 - 3x_0^2 + \beta x_0 + 4 = 0 \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow -3x_0^2 - 6x_0 + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 3x_0^2 + 6x_0 \quad (5)$$

Τότε από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} -x_0^3 - 3x_0^2 + \beta x_0 + 4 = 0 \\ \beta = 3x_0^2 + 6x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} -x_0^3 - 3x_0^2 + (3x_0^2 + 6x_0)x_0 + 4 = 0 \\ \beta = 3x_0^2 + 6x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -x_0^3 - 3x_0^2 + 3x_0^3 + 6x_0^2 + 4 = 0 \\ \beta = 3x_0^2 + 6x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x_0^3 + 3x_0^2 + 4 = 0 \\ \beta = 3x_0^2 + 6x_0 \end{array} \right\} (\Sigma)$$

Στο πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$

παρατηρούμε ότι $P(-2) = 0$ άρα κάνουμε

Horner με το $\rho = -2$ και τότε

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4 = (x + 2)(2x^2 - x + 2)$$

και τότε το σύστημα (Σ) γίνεται

x^3	x^2	x	σταθερός	$x - \rho$
2	3	0	4	
	-4	2	-4	$\rho = -2$
2	-1	2	0	

$$\left. \begin{aligned} (x_0 + 2)(2x_0^2 - x_0 + 2) &= 0 \\ \beta &= 3x_0^2 + 6x_0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \text{ή } x_0 + 2 &= 0 \text{ ή } 2x_0^2 - x_0 + 2 = 0 \\ \beta &= 3x_0^2 + 6x_0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x_0 &= -2 \\ \beta &= 3(-2)^2 + 6(-2) = 0 \end{aligned} \right\}$$

(αφού προφανώς η εξίσωση $2x_0^2 - x_0 + 2 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -15 < 0 \text{ και είναι αδύνατη στο } \mathbb{R})$$

Έτσι τελικά έχουμε πράγματι $\alpha = -3, \beta = 0, \gamma = 4$

και η γραφική παράσταση της f εφάπτεται τελικά στον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-2, 0)$ και

$$\boxed{f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4}, x \in \mathbb{R} \text{ και } \boxed{f'(x) = -3x^2 - 6x}, x \in \mathbb{R} \text{ και } \boxed{f''(x) = -6x - 6}$$

Γ2. Για την μονοτονία της f μελετάμε το πρόσημο της παραγώγου κατά τα γνωστά

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \text{ή } x = -2 \text{ ή } x = 0$$

• Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, -2]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x < -2$, άρα η f είναι γνησίως

φθίνουσα στο $(-\infty, -2]$. Και το σύνολο τιμών της είναι $f(\Delta_1) = \left[f(-2), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$, όπου

$$f(-2) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - 3x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty, \text{ επομένως}$$

$$f(\Delta_1) = \left[f(-2), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

• Η f είναι συνεχής στο $[-2, 0]$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-2, 0)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2, 0]$ και το σύνολο τιμών της $f(\Delta_2) = [f(-2), f(0)] = [0, 4]$

• Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Και το σύνολο τιμών της είναι

$$f(\Delta_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 4], \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty.$$

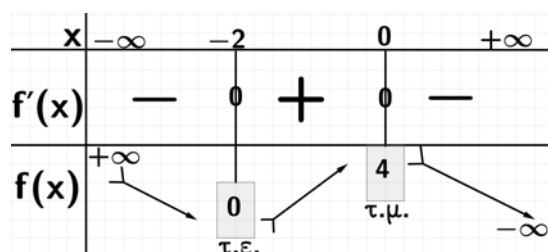
Άρα η f στο $x_0 = -2$ λαμβάνει ένα τοπικό ελάχιστο το $f(-2) = 0$ και στο $x_2 = 0$ λαμβάνει ένα τοπικό μέγιστο το $f(0) = 4$. Ενώ το σύνολο τιμών της είναι

$$f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = [0, +\infty) \cup [0, 4] \cup (-\infty, 4] = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Γ3. Για την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f , μελετάμε το πρόσημο της $f''(x) = -6x - 6$

$$\bullet f''(x) > 0 \Leftrightarrow -6x - 6 > 0 \Leftrightarrow -6x > 6 \Leftrightarrow x < -1$$

$$\bullet f''(x) < 0 \Leftrightarrow -6x - 6 < 0 \Leftrightarrow -6x < 6 \Leftrightarrow x > -1$$

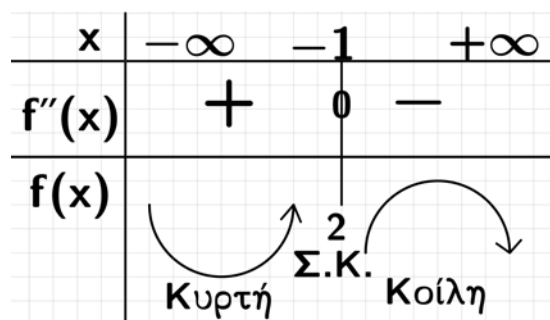


• $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x - 6 = 0 \Leftrightarrow -6x = 6 \Leftrightarrow x = -1$

Έτσι

• η f είναι συνεχής στο $(-\infty, -1]$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x < -1$ άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, -1]$.

• η f είναι συνεχής στο $[-1, +\infty)$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x > -1$ άρα η f είναι κοίλη στο $[-1, +\infty)$.



Παρατηρούμε ότι εκατέρωθεν του $x_1 = -1$, μεταβάλλει την κυρτότητα της και δέχεται εφαπτομένη ευθεία στο σημείο $A(-1, f(-1))$ άρα όπως το ξέραμε και από την υπόθεση το **σημείο** $A(-1, f(-1))$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

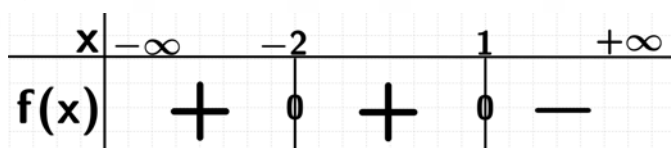
Γ4. Για το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=2$, πρέπει να μελετήσουμε το πρόσημο της f . Λύνουμε την ανίσωση $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$. Ξέρουμε ήδη ότι η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-2, 0)$, αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός -2 είναι ρίζα και μάλιστα διπλή της f , έτσι κάνουμε Horner με το $\rho = -2$. έτσι έχουμε ότι

x^3	x^2	x	σταθερός	$x - \rho$
-1	-3	0	4	
	2	2	-4	$\rho = -2$
-1	-1	2	0	

$$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4 = (x+2)(-x^2 - x + 2) = (x+2)(x+2)(-x+1), \text{ Δηλαδή}$$

$$f(x) = (x+2)^2(1-x)$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$



Σημείωση: Το πρόσημο της f όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, προκύπτει με την γνωστή διαδικασία, αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε θα διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα που χωρίζουν οι διαδοχικές ρίζες της το πεδίο ορισμού της. Έτσι

• Αν επιλέξουμε $t_1 = -3 \in (-\infty, -2)$ τότε η f στο διάστημα $(-\infty, -2)$ θα διατηρεί θετικό πρόσημο αφού $f(-3) = -(-3)^3 - 3(-3)^2 + 4 = 27 - 27 + 4 = 4 > 0$. Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -2)$.

• Αν επιλέξουμε $t_2 = 0 \in (-2, 1)$ τότε η f στο διάστημα $(-2, 1)$ θα έχει θετικό πρόσημο αφού $f(0) = 4 > 0$. Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-2, 1)$.

- Αν επιλέξουμε $t_3 = 2 \in (1, +\infty)$ τότε η f στο διάστημα $(1, +\infty)$ θα διατηρεί αρνητικό πρόσημο αφού $f(2) = -2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = -8 - 12 + 4 = -16 < 0$. Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=2$, θα δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{-2}^2 |f(x)| dx = \int_{-2}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 -f(x) dx = \\ &= \int_{-2}^1 (-x^3 - 3x^2 + 4) dx + \int_1^2 (x^3 + 3x^2 - 4) dx = \left[-\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x \right]_{-2}^1 + \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - 4x \right]_1^2 \\ E(\Omega) &= \left(-\frac{1^4}{4} - 1^3 + 4 \cdot 1 \right) - \left(-\frac{(-2)^4}{4} - (-2)^3 + 4 \cdot (-2) \right) + \left(\frac{2^4}{4} + 2^3 - 4 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^4}{4} + 1^3 - 4 \cdot 1 \right) = \\ &= -\frac{1}{4} - 1 + 4 + 4 - 8 + 8 + 4 + 8 - 8 - \frac{1}{4} - 1 + 4 = 16 - 2 - \frac{1}{2} = 14 - \frac{1}{2} = \frac{27}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Γ5. Για την ανισωτική σχέση $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (4 - \eta \mu^3 x - 3\eta \mu^2 x) dx < 2\pi$ παρατηρούμε ότι

η συνάρτηση $h(x) = 4 - \eta \mu^3 x - 3\eta \mu^2 x = f(\eta \mu x)$ είναι η σύνθεση της $d(x) = \eta \mu x$ με την $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$

Προφανώς για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right]$ επειδή η $d(x) = \eta \mu x$ είναι γνησίως αύξουσα

στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right]$ θα ισχύει ότι $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \Rightarrow \eta \mu \left(-\frac{\pi}{2} \right) \leq \eta \mu x \leq \eta \mu 0 \Rightarrow -1 \leq \eta \mu x \leq 0$

$\left. \begin{array}{l} -1 \leq \eta \mu x \leq 0 \\ f \text{ γν.αυξουσα στο } [-2, 0] \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) \leq f(\eta \mu x) \leq f(0) \Rightarrow 2 \leq f(\eta \mu x) \leq 4$

Έτσι για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right] \Rightarrow 2 \leq f(\eta \mu x) \leq 4$

Οι συναρτήσεις $\varphi(x)=2$, $J(x)=4$, $S(x)=f(\eta\mu x)=-\eta\mu^3 x-3\eta\mu^2 x+4$ είναι συνεχείς στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και όχι παντού ίσες άρα από το πόρισμα του Θεωρήματος 3 του Ολοκληρωτικού Λογισμού (είναι η γνωστή οδηγία του Ι.Ε.Π.)

$$2 \leq f(\eta\mu x) \leq 4 \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2 dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(\eta\mu x) dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 4 dx \Rightarrow$$

$$2\left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(\eta\mu x) dx < 4\left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (-\eta\mu^3 x - 3\eta\mu^2 x + 4) dx < 2\pi$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού η $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ επομένως η f' είναι και συνεχής στο $(0, +\infty)$ και επιπλέον ισχύει ότι: Η γραφική της παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$, στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ άρα καταρχάς $f(1) = 0$ και η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο $A(1, 0)$ είναι ο άξονας $x'x$, ο οποίος έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 0$, επομένως $f'(1) = \lambda = 0$. Η $G(x) = x \cdot f'(x) - 2\ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως γινόμενο και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων και μάλιστα ισχύει ότι

$$G'(x) = (x \cdot f'(x) - 2\ln x)' = (x)' \cdot f'(x) + x \cdot f''(x) - 2 \cdot \frac{1}{x} = f'(x) + x \cdot f''(x) - \frac{2}{x} \quad \text{ή}$$

$$G'(x) = \frac{x \cdot f'(x) + x^2 \cdot f''(x) - 2}{x} = \frac{2 - 2}{x} = 0 \quad \text{αφού από υπόθεση έχουμε ότι για κάθε}$$

$$x \in (0, +\infty) \text{ ισχύει ότι: } x \cdot f'(x) + x^2 \cdot f''(x) = 2,$$

Έτσι $G'(x) = 0$, για κάθε $x > 0$ επομένως Από το Θεώρημα των Συνεπειών του Θ.Μ.Τ.

του Διαφορικού Λογισμού, η συνάρτηση G είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$ έτσι θα υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $G(x) = c_1$, για κάθε $x > 0$

ή τελικά $\boxed{x \cdot f'(x) - 2\ln x = c_1}$, για κάθε $x > 0$.

Άρα αν θέσουμε όπου $x = 1 \Rightarrow 1 \cdot f'(1) - 2\ln 1 = c_1 \Rightarrow 0 - 2 \cdot 0 = c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

Έτσι τελικά $\boxed{x \cdot f'(x) - 2\ln x = 0}$, για κάθε $x > 0$.

Επομένως $x \cdot f'(x) - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow x \cdot f'(x) = 2\ln x \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x}}$ για κάθε $x > 0$.

$f'(x) = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$ ή

$f'(x) = 2 \cdot \ln x \cdot (\ln x)'$, για κάθε $x > 0$ ή

$f'(x) = ((\ln x)^2)'$, για κάθε $x > 0$. Επομένως Από το πόρισμα των Συνεπειών του Θ.Μ.Τ.

του Διαφορικού Λογισμού, θα υπάρχει σταθερά $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$\boxed{f(x) = (\ln x)^2 + c_2}$, για κάθε $x > 0$.

Επομένως για $x = 1 \Rightarrow f(1) = (\ln 1)^2 + c_2 \Rightarrow 0 = 0 + c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$

Έτσι $\boxed{f(x) = (\ln x)^2}$, $x > 0$

Δ2. Για την μονοτονία της f έχουμε ήδη ότι ισχύει

$f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$ για κάθε $x > 0$, επομένως

$$\bullet \left. \begin{matrix} f'(x) > 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} 2 \frac{\ln x}{x} > 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \ln x > 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \ln x > \ln 1 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{γν. αυξουσα}} \left. \begin{matrix} \ln x \\ x > 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x > 1$$

$$\bullet \left. \begin{matrix} f'(x) < 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} 2 \frac{\ln x}{x} < 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \ln x < 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \ln x < \ln 1 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{γν. αυξουσα}} \left. \begin{matrix} \ln x \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} x < 1 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$\bullet \left. \begin{matrix} f'(x) = 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} 2 \frac{\ln x}{x} = 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \ln x = 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x = 1$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η μοναδική ρίζα της παραγώγου και το πρόσημο της το οποίο καθορίζει την μονοτονία της f και το μοναδικό της ακρότατο



x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		—	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Ο.Ε.Τ.

- Η f συνεχής στο $(0,1]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, έτσι για κάθε $0 < x \leq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in (0,1]$. Και το

σύνολο τιμών της $f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right)$, όπου $f(1) = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(\ln x)(\ln x)] = (-\infty)(-\infty) = +\infty \text{ άρα}$$

$$f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

- Η f συνεχής στο $[1, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, έτσι για κάθε $x \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$. Και το

σύνολο τιμών της $f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$, όπου $f(1) = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = +\infty \text{ άρα } f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [0, +\infty)$.

Άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $f(x) \geq f(1)$, Δηλαδή η f στο σημείο $x_0 = 1$ λαμβάνει ολικό ελάχιστο το $\min f(x) = f(1) = (\ln 1)^2 = 0$. Δηλαδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$ και το " $=$ " μόνο για $x = 1$

Δ3. Για το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{(x-1)^2} \right]$, θέλει ιδιαίτερη προσοχή γιατί είναι από τις

περιπτώσεις που ενώ είναι απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0} \right)$ πρέπει να εφαρμόσουμε επιλεκτικά τον γνωστό κανόνα De L' Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2 - (\ln x)^2}{(x-1)^2 \cdot (\ln x)^2} \left(\frac{0}{0} \right), \text{ Άρα}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1-\ln x)(x-1+\ln x)}{(x-1)^2 \cdot (\ln x)^2} \text{ ή τελικά}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{(x-1-\ln x)}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x-1+\ln x)}{(\ln x)^2} \right]$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} \left(\frac{0}{0} \right)_{\text{DLH}}^{\text{L'H}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)^2)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1) \cdot (x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x-1}{x}}{2(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{x-1}}{2x \cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1+\ln x}{(\ln x)^2} \left(\frac{0}{0} \right)_{\text{DLH}}^{\text{L'H}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1+\ln x)'}{((\ln x)^2)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+\frac{1}{x}}{2 \cdot \ln x \cdot (\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x+1}{x}}{2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1+\ln x}{(\ln x)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{2 \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{2} \cdot \frac{1}{\ln x} \right) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty. \text{ αφού}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0 \\ x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \ln x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{(x-1-\ln x)}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x-1+\ln x)}{(\ln x)^2} \right] = \frac{1}{2} \cdot (+\infty) = +\infty$$

Δ4. Για την κυρτότητα της f , έχουμε ότι η $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων και ισχύει ότι

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(2 \frac{\ln x}{x} \right)' = 2 \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = 2 \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2}, \text{ άρα}$$

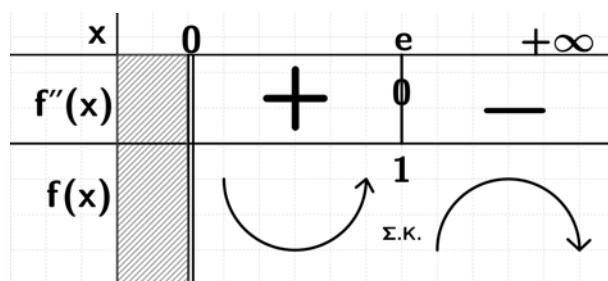
$$\boxed{f''(x) = 2 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}}, \quad x > 0.$$



$$\bullet \left. \begin{matrix} f''(x) > 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} 2 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} 1 - \ln x > 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \ln x < 1 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \ln x < \ln e \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow 0 < x < e$$

$$\bullet \left. \begin{matrix} f''(x) < 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} 2 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} 1 - \ln x < 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \ln x > 1 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \ln x > \ln e \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x > e$$

$$\bullet \left. \begin{matrix} f''(x) = 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} 2 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} 1 - \ln x = 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} \ln x = 1 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow x = e$$



- Η f συνεχής στο $(0, e]$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, e)$ άρα η f είναι **κυρτή** στο $(0, e]$.
- Η f συνεχής στο $[e, +\infty)$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (e, +\infty)$ άρα η f είναι **κοίλη** στο $[e, +\infty)$.

Έτσι παρατηρούμε ότι η f εκατέρωθεν του $x_0 = e$ μεταβάλλει την κυρτότητα της και η C_f δέχεται εφαπτομένη ευθεία στο $A(e, f(e))$ η οποία μάλιστα έχει συντελεστή διεύθυνσης αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = e$ και μάλιστα

$$\lambda = f'(e) = 2 \frac{\ln e}{e} = \frac{2}{e}. \text{ Άρα το } A(e, f(e)) \text{ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της}$$

C_f και η εφαπτομένη ευθεία που δέχεται η C_f στο $A(e, f(e))$ είναι η $\varepsilon: y - f(e) = f'(e)(x - e)$ ή

$$\varepsilon: y - 1 = \frac{2}{e}(x - e) \text{ ή } \varepsilon: \boxed{y = \frac{2}{e}x - 1}$$

- Αφού η f είναι **κυρτή** στο $(0, e]$, άρα σε κάθε σημείο του $(0, e]$ η εφαπτομένη ευθεία θα βρίσκεται από κάτω από την γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής, επομένως αφού η εφαπτομένη ευθεία στο



$A(e, f(e))$ είναι η $\varepsilon: y = \frac{2}{e}x - 1$ άρα $f(x) \geq \frac{2}{e}x - 1$ για κάθε $x \in (0, e]$ και το

"=" μόνο για $x = e$ ή ισοδύναμα θα ισχύει ότι

$$(\ln x)^2 \geq \frac{2}{e}x - 1 \Leftrightarrow e \cdot (\ln x)^2 \geq 2x - e \Leftrightarrow e \cdot (\ln x)^2 + e \geq 2x \text{ για κάθε } x \in (0, e]$$

επομένως $e \cdot (\ln x)^2 + e \geq 2x$ για κάθε $x \in (0, e]$ και το "=" μόνο για $x = e$.

• Αφού η f είναι **κοίλη** στο $[e, +\infty)$, άρα σε κάθε σημείο του $[e, +\infty)$ η εφαπτομένη ευθεία θα βρίσκεται από πάνω από την γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής, επομένως αφού η εφαπτομένη ευθεία στο

$A(e, f(e))$ είναι η $\varepsilon: y = \frac{2}{e}x - 1$ άρα $f(x) \leq \frac{2}{e}x - 1$ για κάθε $x \in [e, +\infty)$ και το

"=" μόνο για $x = e$ ή ισοδύναμα θα ισχύει ότι

$$(\ln x)^2 \leq \frac{2}{e}x - 1 \Leftrightarrow e \cdot (\ln x)^2 \leq 2x - e \Leftrightarrow e \cdot (\ln x)^2 + e \leq 2x \text{ για κάθε } x \in [e, +\infty)$$

επομένως $e \cdot (\ln x)^2 + e \leq 2x$ για κάθε $x \in [e, +\infty)$ και το "=" μόνο για $x = e$.

Επομένως η ανίσωση $e \cdot (\ln x)^2 + e \leq 2x \Leftrightarrow x \in [e, +\infty)$

Δ5. Για την ανισοτική σχέση $\int_1^2 \frac{f(x)}{e^x} dx < \frac{2e-5}{e^2}$., έχουμε ότι

Ισχύει ότι $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$ και το "=" μόνο για $x = 1$.

Έτσι για κάθε $x \in [1, 2]$ θα ισχύει επιπλέον ότι

$0 \leq \ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$ και το "=" μόνο για $x = 1$. Επομένως μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο γιατί είναι ανισοτική σχέση μεταξύ μη αρνητικών αριθμών

$$0^2 \leq (\ln x)^2 \leq (x - 1)^2, \text{ για κάθε } x \in [1, 2] \text{ και το "=" μόνο για } x = 1.$$

Επειδή προφανώς ισχύει $e^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως θα έχουμε

$$0 \leq \frac{(\ln x)^2}{e^x} \leq \frac{(x-1)^2}{e^x} \text{ ή}$$

$$0 \leq \frac{f(x)}{e^x} \leq \frac{(x-1)^2}{e^x}, \text{ για κάθε } x \in [1, 2] \text{ και το "=" μόνο για } x = 1 \text{ και οι συναρτήσεις}$$

$\frac{f(x)}{e^x}$ και $\frac{(x-1)^2}{e^x}$ είναι συνεχείς στο $[1, 2]$ και όχι παντού ίσες στο $[1, 2]$, επομένως από

το σχετικό πόρισμα του Θεωρήματος 3 των ιδιοτήτων του Ορισμένου Ολοκληρώματος (βλέπε τη σχετική οδηγία του Ι.Ε.Π.) θα ισχύει ότι

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{e^x} dx < \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{e^x} dx \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{e^x} dx < \int_1^2 \frac{x^2 - 2x + 1}{e^x} dx \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{e^x} dx < \int_1^2 \left(\frac{x^2 - 2x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) dx \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{e^x} dx < \int_1^2 -\frac{2x - x^2}{e^x} dx + \int_1^2 \frac{1}{e^x} dx \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{e^x} dx < \int_1^2 -\frac{(x^2)' \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} dx + \int_1^2 e^{-x} dx \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{e^x} dx < -\left[\frac{x^2}{e^x} \right]_1^2 + \left[-e^{-x} \right]_1^2 \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{e^x} dx < -\left(\frac{2^2}{e^2} - \frac{1^2}{e^1} \right) + \left(-e^{-2} - (-e^{-1}) \right) \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{e^x} dx < -\frac{4}{e^2} + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{e^x} dx < \frac{2}{e} - \frac{5}{e^2} \Rightarrow \boxed{\int_1^2 \frac{f(x)}{e^x} dx < \frac{2e-5}{e^2}}$$

Δ6. Για το εμβαδόν $E(\Omega)$, του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$, παρατηρούμε ότι $f(x) = (\ln x)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$ και η f είναι συνεχής στο $[1, e]$ επομένως



$$\begin{aligned}
E(\Omega) &= \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (\ln x)^2 dx = \int_1^e 1 \cdot (\ln x)^2 dx = \int_1^e (x)' \cdot (\ln x)^2 dx = \\
&= \left[x \cdot (\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \left((\ln x)^2 \right)' dx = e \cdot (\ln e)^2 - 1 \cdot (\ln 1)^2 - \int_1^e x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot (\ln x)' dx = \\
&= e \cdot 1 - 0 - \int_1^e \cancel{x} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = e - 2 \cdot \int_1^e \ln x dx = e - 2 \left[x \cdot \ln x - x \right]_1^e = \\
&= e - 2 \left[(e \cdot \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) \right] = e - 2 \left[(e \cdot 1 - e) - (1 \cdot \cancel{\ln 1} - 1) \right] = \\
&= e - 2(e - e + 1) = e - 2 \text{ τ.μ.}
\end{aligned}$$

Προφανώς χρησιμοποιήσαμε $(x \cdot \ln x - x)' = \ln x$ δηλαδή ότι η $G(x) = x \cdot \ln x - x$ είναι μια παράγουσα της $\ln x$ που δεν την έχει το σχολικό βιβλίο και πρέπει να φαίνεται ότι $(x \cdot \ln x - x)' = \ln x$ δηλαδή να φαίνεται αναλυτικά ότι:

$$G'(x) = (x \cdot \ln x - x)' = (x \cdot \ln x)' - (x)' = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' - 1 = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

©2024 Βασίλης Γ. Κουγιουμτσιάδης