

## ΘΕΜΑ 02

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = 0$
- $\left| e^{f(x)}(\sqrt{x^2+1}-x) - e^{f(y)}(\sqrt{y^2+1}-y) \right| \leq (x-y)^2$ , για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Δ1)** Να αποδείξετε ότι

α) η συνάρτηση  $g(x) = e^{f(x)}(\sqrt{x^2+1}-x)$  είναι σταθερή

β) ο τύπος της συνάρτησης  $f$  είναι  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ .

**Δ2)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

**Δ3)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = x + f(2x)$ .

**Δ4)** α) Να αποδείξετε ότι  $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$ .

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ .

Δημ. Σπαθάρης