A4 : Σ - Σ - Λ - Λ - Λ.

ΘΒ

Β1. $A_{h\circ f}=\begin{cases} x\in[-2,+\infty) \\ f(x)\in\mathbb{R}\end{cases} = [-2,+\infty)$

$h(f(x)) = \dfrac{\sqrt{x+2}^2-2}{\sqrt{x+2}^2+1} = \dfrac{x}{x+3}\ ,\ x\in[-2,+\infty)$

Β2. $f'(x)=\dfrac{3}{(x+3)^2}>0\ ,\ f''(x)=-\dfrac{6}{(x+3)^3}<0$ για κάθε $x\geq -2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+3}=1$ άρα η $y=1$ ορ. ασ/τη στο $(+\infty)$

Β3. $x\in[-2,+\infty) \xrightarrow{f\uparrow} f(x)\in[-2,1)$ δηλ. $A_{f^{-1}}=[-2,1)$

και $y=\dfrac{x}{x+3} \Rightarrow yx-x=-3y \Rightarrow x=\dfrac{3y}{1-y}$ άρα

$f^{-1}(x)=\dfrac{3x}{1-x}\ ,\ x\in[-2,1)$ $\quad E=\displaystyle\int_{-1}^{0}\left|\dfrac{3x}{1-x}\right|dx$ και επειδή $3x<0$

ενώ $(1-x)>0$ στο $(-1,0)$ είναι $\dfrac{3x}{1-x}<0$ άρα

$E=-\displaystyle\int_{-1}^{0}\dfrac{3x}{1-x}\,dx = 3\int_{-1}^{0}\dfrac{x}{x-1}\,dx = 3\cdot\Big[x+\ln|x-1|\Big]_{-1}^{0} = 3-3\ln2=3(1-\ln2)$

ΘΓ. Πρέπει $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$ δηλ. $\ln k+1=k \Rightarrow \ln k=k-1$

το οποίο ισχύει μόνο για $k=1$ (από την $\ln x\leq x-1$).

Συνεπώς, $f(x)=\begin{cases} 1+\ln x\ , & 0<x<1 \\ 1-\ln x\ , & x\geq1\end{cases}$

Γ2. i. Τα Α, Β έχουν την ίδια τεταγμένη συνεπώς, αν

$B(x,1-\ln\alpha)$, πρέπει $1+\ln x=1-\ln\alpha \Rightarrow \ln x=\ln\frac{1}{\alpha} \Rightarrow x=\frac{1}{\alpha}$

άρα $B(\frac{1}{\alpha},1-\ln\alpha)$.

ii) Είναι $f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\ , & 0<x<1 \\ -\frac{1}{x}\ , & x>1\end{cases}$ άρα $f'(\frac{1}{\alpha})=\dfrac{1}{\frac{1}{\alpha}}=\alpha$

ενώ $f'(\alpha)=-\frac{1}{\alpha}$ δηλαδή

$f'(1/\alpha)\cdot f'(\alpha)=-1$ άρα οι εφ/νες κάθετες μεταξύ τους.

Γ3. $E=\displaystyle\int_{1/\alpha}^{1}(1+\ln x-1+\ln\alpha)\,dx+\int_{1}^{\alpha}(1-\ln x-1+\ln\alpha)\,dx$

$=\Big[x\ln x-x+\ln\alpha\cdot x\Big]_{1/\alpha}^{1}+\Big[-x\ln x+x+\ln\alpha x\Big]_{1}^{\alpha}=$

$=-1+\cancel{\ln\alpha}+\cancel{\frac{1}{\alpha}\ln\alpha}+\frac{1}{\alpha}-\cancel{\frac{1}{\alpha}\ln\alpha}-\cancel{\alpha\ln\alpha}+\alpha+\cancel{\alpha\ln\alpha}-1-\cancel{\ln\alpha}=\alpha+\frac{1}{\alpha}-2$

$+1-\frac{1}{\alpha}$

$\cancel{[x\ln x + x\ln a]_{1/a}^{1}}$

$[x\ln x - x + x\ln a]_{1/a}^{1} + [-x\ln x + x + x\ln a]_{1}^{a} =$

$-1 + \cancel{\ln a} + \cancel{\frac{1}{a}\ln a} + \frac{1}{a} - \cancel{\frac{1}{a}\ln a} - \cancel{a\ln a} + a + \cancel{a\ln a} - 1 - \cancel{\ln a} = a + \frac{1}{a} - 2$

Γ4. $(ΑΒΓΔ) = \left(a - \frac{1}{a}\right)(1 - \ln a) = a - a\ln a - \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\ln a$

$E(t) = a(t) - \frac{1}{a(t)} - a(t)\ln a(t) + \frac{\ln(a(t))}{a(t)}$

$E'(t) = a'(t) + \frac{a'(t)}{a^2(t)} - a'(t)\ln a(t) - a'(t) + \frac{a'(t) - a'(t)\cdot\ln(a(t))}{a^2(t)}$

$E'(t_0) = \cancel{1+}\frac{1}{4} - \ln 2 \cancel{-1} + \frac{1-\ln 2}{4} = \frac{2 - 5\ln 2}{4}$

ΘΔ. $g(x) = \ln x - e^{-x} - x + 2$, $x \in (0, +\infty)$

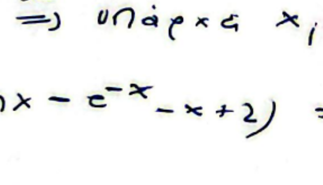
Δ1. $g(1) = -\frac{1}{e} + 1 > 0$. Είναι $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ άρα υπάρχει ρ, ρ κοντά στο 0, ώστε $g(\rho) < 0$

Συνεπώς: g συν. στο $[\rho, 1]$, $g(\rho)\cdot g(1) < 0 \overset{ΘB}{\Rightarrow}$ υπάρχει $x_1 \in (\rho, 1)$ ώστε $g(x_1) = 0$. Επίσης $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln x - e^{-x} - x + 2) =$

$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{xe^{x}} - 1 + \frac{2}{x}\right) = -\infty$. Συνεπώς, υπάρχει κ κοντά στο $(+\infty)$ ώστε $g(\kappa) < 0$. Με ΘΒ, υπάρχει $x_2 \in (1, +\infty)$ ώστε $g(x_2) = 0$.

Δ2. Αφού $g(x_1) = g(x_2) = 0$ και g συν. στο $[x_1, x_2]$ και παραγ. στο (x_1, x_2), υπάρχει (ΘR) $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε $g'(x_0) = 0$.

Επίσης, $g'(x) = \frac{1}{x} + e^{-x} - 1$, $g''(x) = -\frac{1}{x^2} - e^{-x} < 0$ άρα η g' ↘ συνεπώς το πρόσημο της g':



οπότε το x_0 μοναδικό σημείο στο οποίο η g είχε ακρότατο (μέγιστο) το $g(x_0)$.

Επειδή $g'(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_0} + e^{-x_0} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_0} - 1 = -e^{-x_0}$

$g(x_0) = \ln x_0 - e^{-x_0} - x_0 + 2 = \ln x_0 + \frac{1}{x_0} + 1 - x_0$

Δ3. Αν $x_1 < x \leq x_0 \overset{g \nearrow}{\Longrightarrow} 0 < g(x) \leq g(x_0)$ $\Big\}$ συνεπώς $g(x) > 0$

$x_0 \leq x < x_2 \underset{g \searrow}{\Longrightarrow} g(x_0) \geq g(x) > 0$ $\Big\}$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$

Δ4. Είναι $e^x \geq x+1$ για κάθε x άρα:

$e^{g'(x)-1} \geq g'(x)$ συνεπώς $\int_{x_1}^{1} e^{g'(x)-1} dx > \int_{x_1}^{1} g'(x)\, dx \Rightarrow$

$\int_{x_1}^{1} e^{g'(x)-1} dx > [g(x)]_{x_1}^{1} = g(1) = 1 - \frac{1}{e}$.