ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2025

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών
(2+6=8 μονάδες)

Α2. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle **(3 μονάδες)**

Α3. Δίνεται η πρόταση: «Μια συνάρτηση ορισμένη στο R και δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία υπάρχει x_o τέτοιο ώστε $f''(x_o)=0$, έχει σημείο καμπής στο x_o».
Να την χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» **(1 μονάδα)** και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(3 μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως «Σωστό» ή «Λάθος» :
α. Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων μεταξύ τους συναρτήσεων έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία y=x
β. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R, μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
γ. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A, τότε και η σύνθεσή τους ορίζεται και έχει πεδίο ορισμού το A.
δ. Η εφαπτομένη μιας συνάρτησης ορισμένης παραγωγίσιμης και κυρτής στο R, σε σημείο της $(x_o,f(x_o))$ μπορεί να έχει και άλλα κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f εκτός από το σημείο x_o .
ε. Για μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής και μη αρνητική σε διάστημα [α, β] , ισχύει ότι το εμβαδόν ανάμεσα στον χχ΄ και την γραφική της παράσταση δίνεται από το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις h, t με τύπους :

$$h(x)=\frac{x^2-2}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad t(x)=\sqrt{x+2},\ \ x\in[-2,+\infty)$$

Β1. Να ορίσετε τη σύνθεση της t με την h. **(6 μονάδες)**

Έστω $f(x)=(h\circ t)(x)=\frac{x}{x+3},\ x\in[-2,+\infty)$

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα, κοίλη και να βρείτε – αν υπάρχουν – τις ασύμπτωτές της. **(9 μονάδες)**

Β3. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, έστω f^{-1} , και να υπολογίσετε το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής της f^{-1}, τον άξονα χχ΄ και τις ευθείες x=-1, x=0.
(5+5=10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}\ln k+1+\ln x, & 0<x<1\\ k-\ln x, & x\geq 1\end{cases}$, $k>0$.

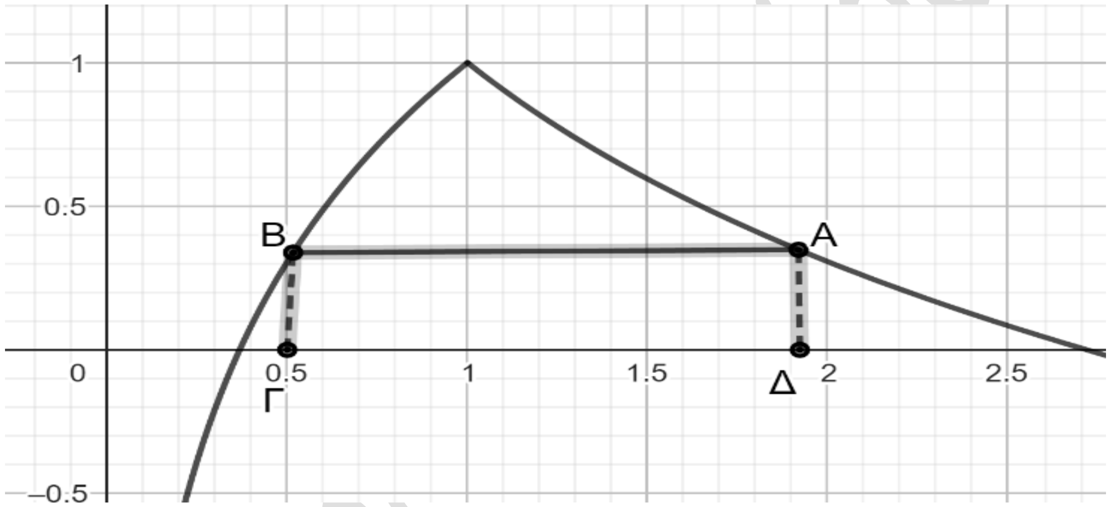
Γ1. Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, να αποδείξετε ότι k=1. **(5 μονάδες)**

Γ2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f . Αν το σημείο Α(α, f(α)) , όπου 1<α<e , βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης και το τμήμα ΑΒ είναι παράλληλο στον χ΄χ, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β. **(4 μονάδες)**

Έστω ότι το σημείο Β έχει συντεταγμένες $B\left(\frac{1}{\alpha},1-\ln\alpha\right)$

ii. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της f στα σημεία της Α και Β είναι κάθετες μεταξύ τους. **(3 μονάδες)**



Γ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την ευθεία ΑΒ. **(6 μονάδες)**

Γ4. Αν η τετμημένη α του σημείου Α μεταβάλλεται με ρυθμό 1μ/s , να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τη χρονική στιγμή όπου $\alpha(t_o)=2$. **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\ln x-e^{-x}-x+2, \quad x\in(0,+\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση g(x)=0 έχει δύο τουλάχιστον ρίζες x_1 , x_2 με $0<x_1<1<x_2$. **(7 μονάδες)**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g εμφανίζει μέγιστο σε μοναδικό σημείο x_o, το $g(x_o)=\ln x_o+\frac{1}{x_o}-x_o+1$ **(7 μονάδες)**

Δ3. Να αποδείξετε ότι g(x)>0 για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ **(5 μονάδες)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_{x_1}^{1} e^{g'(x)-1}\,dx>1-\frac{1}{e}$, όπου x_1 η μικρότερη από τις δύο ρίζες της εξίσωσης g(x)=0. **(6 μονάδες)**