12-04-25, ΓΕΝΙΚΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ Β ΘΕΜΑ, Ν.ΨΑΘΑ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x-x^2, & x\le 0 \\ \int_0^{\pi}\alpha\cdot \text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx+\ln(x+1), & x>0 \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Β1. Να δείξετε ότι $\alpha=\frac{1}{2}$ και ότι $f(x)=\begin{cases} e^x-x^2, & x\ge 0 \\ 1+\ln(x+1), & x>0 \end{cases}$

Β2.i. Να εξετάσετε ποιες από τις προϋποθέσεις του θ. Rolle ισχύουν για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,1]$

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0,1)$

Β3. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης f και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

Β4.i. Να δείξετε ότι το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\text{ημ}x\right]=0$

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(\ln^2 x-2\cdot\ln x-2\right)<0$

Β5. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα,
να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της
και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων, τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη της στο σημείο της $A(0,1)$

Β6. Υλικό σημείο $M(x,y)$ ξεκινά από το σημείο A και κινείται στην ευθεία $(\varepsilon): y=x+1$ με την τετμημένη του να αυξάνεται με σταθερό ρυθμό.

Έστω K η προβολή του M στον άξονα $x'x$ και S το εμβαδόν του τετραπλεύρου $OAMK$ (O η αρχή των αξόνων).

Να βρείτε το σημείο της (ε) στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής του S είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του M

B7. Να υπολογίσετε το $I=\int_0^1 f(x-1)dx$

B8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=-1,\ x=1$

Λύση

B1. Το $\int_0^{\pi}\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\alpha\cdot\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=-\alpha[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}=-\alpha(-1-1)=2\alpha$ οπότε είναι:

$$f(x)=\begin{cases} e^x-x^2, & x\le 0\\ 2\alpha+\ln(x+1), & x>0\end{cases}.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα είναι συνεχής και στο 0, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow 2\alpha=1\Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$, άρα $f(x)=\begin{cases} e^x-x^2, & x\le 0\\ 1+\ln(x+1), & x>0\end{cases}$

B2.i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, άρα είναι συνεχής και στο διάστημα $[-1,1]$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-x^2-1}{x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^x-2x\right)=e^0=1$

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+\ln(x+1)-1}{x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1}=1$.

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1$.

Συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\begin{cases} e^x-2x, x\le 0 \\ \frac{1}{x+1}, \ x>0 \end{cases}$, άρα και παραγωγίσιμη

στο διάστημα $[-1,1]$

Είναι $f(-1)=e^{-1}-1$, ενώ $f(1)=1+\ln 2\neq f(-1)$, άρα δεν ισχύει η 3η από τις προϋποθέσεις του θ. Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,1]$

ii. Είναι $f(0)=f'(0)=1$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0,1)$ είναι: $(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow(\varepsilon): y-1=1\cdot x\Leftrightarrow(\varepsilon): y=x+1$

B3. Για κάθε $x\le 0\Leftrightarrow -2x\ge 0, e^x>0 \overset{(+)}{\Rightarrow} e^x-2x>0\Leftrightarrow f'(x)>0$ και για κάθε $x>0\Rightarrow x+1>0\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}>0\Leftrightarrow f'(x)>0$. Δηλαδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ >0.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1-1.

Επομένως ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης f.

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, οπότε το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$.

B4.i. Το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x}=$

$$\overset{x<0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+|x|}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right)=0\cdot\frac{1}{2}=0.$$

Τότε: $\left|\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\eta\mu x\right|=\left|\sqrt{x^2+1}+x\right|\cdot|\eta\mu x|\le\left|\sqrt{x^2+1}+x\right|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\left|\sqrt{x^2+1}+x\right|\le\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\eta\mu x\le\left|\sqrt{x^2+1}+x\right|$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\pm\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right]=0$.

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, είναι και το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\eta\mu x\right]=0$

ii. Η ανίσωση $f^{-1}\left(\ln^2 x-2\cdot\ln x-2\right)<0$ ορίζεται στο $(0,+\infty)$ (λόγω του $\ln x$), εφόσον το $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$. Τότε:

$f^{-1}\left(\ln^2 x-2\cdot\ln x-2\right)<0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}\left(\ln^2 x-2\cdot\ln x-2\right)\right)<f(0)\Leftrightarrow\ln^2 x-2\cdot\ln x-2<1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln^2 x-2\cdot\ln x-3<0\overset{y=\ln x}{\Leftrightarrow}y^2-2y-3<0\Leftrightarrow-1<y<3\Leftrightarrow-1<\ln x<3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln e^{-1}<\ln x<\ln e^3\overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow}e^{-1}<x<e^3$

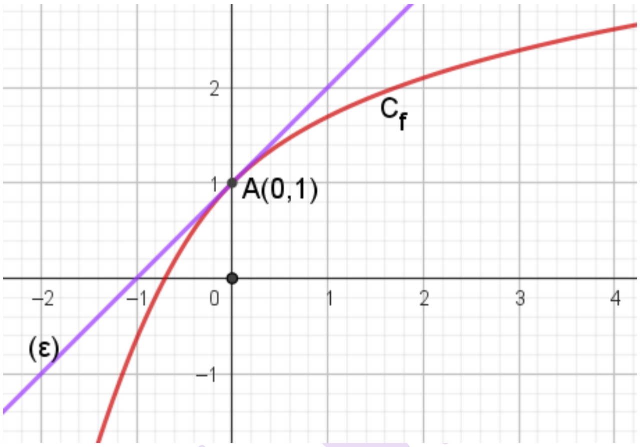
B5. Είναι $f''(x)=\begin{cases}e^x-2, & x<0\\ -\dfrac{1}{(x+1)^2}, & x>0\end{cases}$. Προφανώς για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)<0$ και η f είναι συνεχής, άρα είναι κοίλη στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Για $x<0\Leftrightarrow e^x<1\Rightarrow e^x-2<-1<0\Rightarrow f''(x)<0$, άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$

Ο πίνακας μεταβολών της είναι:

x	$-\infty \qquad 0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$
f		

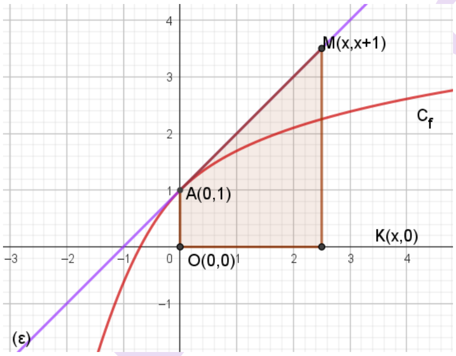
και στο ίδιο σύστημα αξόνων, η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(0,1)$ είναι:



Β6. Το εμβαδόν του τραπεζίου $OAMK$ δίνεται από τον τύπο $S=\dfrac{(x+1+1)\cdot x}{2}=\dfrac{1}{2}x^2+x,\ x>0$.

Όταν το υλικό σημείο M κινείται,

τότε το $S(t)=\dfrac{1}{2}x^2(t)+x(t)\Rightarrow S'(t)=x(t)\cdot x'(t)+x'(t)\Leftrightarrow S'(t)=(x(t)+1)x'(t)$.



Άρα τη χρονική στιγμή t_0 που ο ρυθμός μεταβολής του S είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του M, γίνεται:

$$S'(t_0)=(x(t_0)+1)x'(t_0)\Leftrightarrow 2x'(t_0)=(x(t_0)+1)x'(t_0)\overset{x'(t_0)>0}{\Leftrightarrow}2=x(t_0)+1\Leftrightarrow x(t_0)=1.$$

Επομένως το ζητούμενο σημείο της (ε) είναι το σημείο $M_0(1,2)$

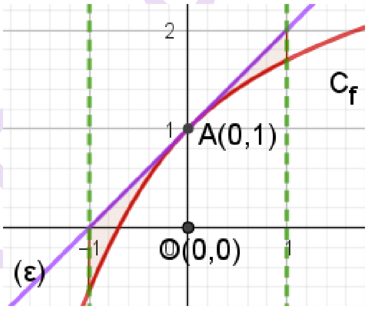
Β7. Η συνάρτηση $f(x-1)$ είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Άρα ορίζεται το $I=\int_0^1 f(x-1)dx$

Θέτω $x-1=u \Rightarrow dx=du$ Όταν $x=0 \Leftrightarrow u=-1,\ x=1 \Leftrightarrow u=0$.

Τότε $I=\int_0^1 f(x-1)dx=\int_{-1}^0 f(u)du=\int_{-1}^0 (e^u-u^2)du=\left[e^u\right]_{-1}^0-\frac{1}{3}\left[u^3\right]_{-1}^0=1-e^{-1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}-e^{-1}$

Β8. Η συνάρτηση f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[0,+\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία (ε), εκτός του σημείου $A(0,1)$



Έτσι, ισχύει ότι $f(x)\le x+1$ για κάθε $x\in[-1,1]\subseteq\mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις είναι συνεχείς.

Τότε το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E=\int_{-1}^1 (x+1-f(x))dx=\int_{-1}^0 (x+1-f(x))dx+\int_0^1 (x+1-f(x))dx=$$

$$=\int_{-1}^0 (x+1-e^x+x^2)dx+\int_0^1 (x-\ln(x+1))dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0+(0+1)-\left[e^x\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^1+\int_0^1 (x+1)\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}+1-1+e^{-1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\cdot\ln 2+1=\frac{4}{3}+\frac{1}{e}-2\cdot\ln 2 \text{ τ.μ.}$$