



**5° ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
Ν. Ζ. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗΣ**

**Ν. Ζ. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗΣ**

## ΘΕΜΑΤΑ

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  τέτοια ώστε:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$ ,  $f(\beta)$ , υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 6**

**A2.** Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του  $y$  ως προς  $x$  στο σημείο  $x_0$ .

**Μονάδες 3**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση  $f$  και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

**Μονάδες 3**

**A4.** Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο  $y = x$  του  $1^{\text{ου}} - 3^{\text{ου}}$  τεταρτημορίου.

**Μονάδες 3**

**A5.** Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

**α)** Έστω  $f$  δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή  $2^{\text{η}}$  παράγωγο, που η  $f$  δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[1, 2]$  και τέτοια ώστε:

$$\int_1^2 [f(x) \cdot f''(x) + (f'(x))^2] dx = m \cdot (f(2) - f(1))$$

και οι εφαπτόμενες της  $C_f$  στα  $A(1, f(1))$ ,  $B(2, f(2))$  είναι παράλληλες στην ευθεία  $y = 6x + 1$ , τότε η τιμή του  $m$  είναι:

- A. 2                      B. 4                      Γ. 6                      Δ. 8                      E. 10  
**Μονάδες 2**

β) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \alpha x + 1}{e^x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και F μια παράγουσα της f

στο  $\mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \frac{3}{e}$ , τότε η τιμή του α είναι:

- A. -1                      B. 1                      Γ. 2                      Δ. 3                      E. 4  
**Μονάδες 2**

γ) Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - \alpha x + 6$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Ποια είναι η θετική τιμή του α, για την οποία οι εφαπτομένες της παραβολής στα σημεία που τέμνει τον άξονα x'x είναι κάθετες μεταξύ τους;

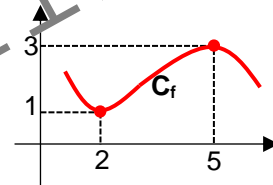
- A. 2                      B. 3                      Γ. 4                      Δ. 5                      E. 6  
**Μονάδες 2**

δ) Έστω f παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και η  $C_f$  δίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_2^5 \frac{f'(x)}{x} dx + \int_5^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$$

είναι ίσο με:

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{5}$                       Γ.  $\frac{1}{10}$                       Δ.  $\frac{3}{5}$                       E. 2



**Μονάδες 2**

ε) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^3 + \alpha x^2 + 3x - 7$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Αν η μέγιστη τιμή της παραγώγου της συνάρτησης f είναι 15, τότε η μικρότερη τιμή του α είναι:

- A. -8                      B. -6                      Γ. -4                      Δ. -2                      E. -1  
**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

**B1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 6**

**B2. α)** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $f$  (μονάδες 3) και  
**β)** να σχεδιάσετε τη  $C_f$ . (μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = \eta\mu x$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

**B3.** Να βρείτε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$

**Μονάδες 5**

Αν  $h(x) = \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

**B4.** Να αποδείξετε ότι:

**α)**  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} h(x) dx = 0$  (μονάδες 4)

**β)**  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x) dx < \frac{\sqrt{2}}{4}$  (μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 6x^2 \sigma\upsilon\nu\alpha + 13x \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha - 10\sigma\upsilon\nu^3\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία (μονάδες 3) και να αποδείξετε ότι έχει μοναδική ρίζα στο  $\mathbb{R}$ . (μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , η  $C_f$ , έχει ένα μόνο σημείο καμπής, (μονάδες 2) το οποίο για τις διάφορες τιμές του  $\alpha$ , κινείται πάνω σε μια καμπύλη  $C$ , της οποίας να βρείτε την εξίσωση της. (μονάδες 4)

**Μονάδες 6**

Αν  $y = g(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι η εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία

κινείται το σημείο καμπής, τότε:

**Γ3.** Να βρείτε:

**α)** την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_g$  η οποία σχηματίζει με τη  $C_g$  και τους θετικούς ημιάξονες  $Ox$ ,  $Oy$ , χωρίο  $\Omega$  του οποίου το εμβαδόν  $E$  να είναι το ελάχιστο. (μονάδες 6)

**β)** Αν  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{3}$  η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος **(α)**, να

βρείτε το ελάχιστο εμβαδόν. (μονάδες 2)

**Μονάδες 8**

**Γ4.** Αν  $\Omega_1$  είναι το χωρίο που περικλείεται από τη  $C_g$  και τους θετικούς ημιάξονες  $Ox$ ,  $Oy$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\kappa \in (0, 1)$ , τέτοιο ώστε η ευθεία με εξίσωση  $x = \kappa$ , να χωρίζει το χωρίο  $\Omega_1$ , σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή 2<sup>η</sup> παράγωγο και τέτοια ώστε:

$$f'(x) = f'(1-x) \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{f(0) + f(1)}{2}$

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:

**α)** η συνάρτηση  $g(x) = f(x) + f(1-x)$ ,  $x \in [0, 1]$  είναι σταθερή (μονάδες 3)

**β)**  $f(x) + f(1-x) = 1$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ , όταν  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$  (μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 1$

**Μονάδες 4**

**Δ4.** Αν η  $f''(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $[0, 1]$  και ισχύει

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = -2, \quad f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2, \text{ τότε:}$$

**α)** να βρείτε τη μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f''(x) = 0$  (μονάδες 3)

**β)** να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κοίλη στο διάστημα  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

και κυρτή στο  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  (μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

**Δ5.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) \cdot \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f^2(x) dx$

**Μονάδες 5**

Askisopolis

## Λύσεις

**N. Z. ΑΠΟΣΤΟΛΑΚΗΣ**

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Θεωρία

**A2.** Θεωρία

**A3.** Θεωρία

**A4.** Θεωρία

**A5.** α) Γ, β) Β, γ) Δ, δ) Γ, ε) Β

### ΘΕΜΑ Β

**B1.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-1, 1)$  με  $f'(x) = \frac{x^2 \cdot (x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$

Ισχύει  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-1, 1)$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-1, 1)$ .

Είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(-1, 1)$  με  $f''(x) = \frac{6x \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$

Έστω  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Έστω  $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{6x \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4} > 0$

Επειδή για κάθε  $x \in (-1, 1)$  είναι  $(x^2 - 1)^4 > 0$ ,  $x^2 - 1 < 0$  και  $x^2 + 1 > 0$ , το πρόσημο της  $f''(x)$  εξαρτάται από το πρόσημο του παράγοντα  $6x$ , έχουμε:

x	-1	0	1
$x^2 - 1$	-	-	-
$6x$	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$		0	

Άρα,

Στο διάστημα  $(-1, 0]$  είναι κυρτή και στο  $[0, 1)$  κοίλη. Σημείο καμπής της συνάρτησης είναι το σημείο  $(0, f(0)) = (0, 0)$ , δηλαδή η αρχή των αξόνων.

**B2.** Αρχικά αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{1}{x+1} \cdot \frac{x^3}{x-1} \right) = (+\infty) \cdot \frac{1}{2} = +\infty$$

Άρα η  $x = -1$ , κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .

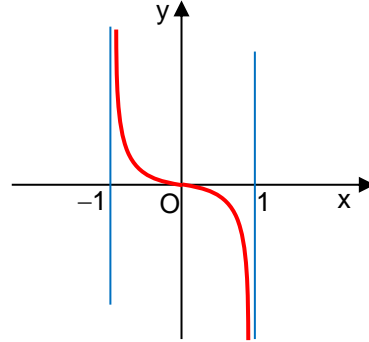
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^3}{x+1} \right) = (-\infty) \cdot \frac{1}{2} = -\infty$$

Άρα η  $x = 1$ , κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_f$ .

Πλάγια ασύμπτωτη δεν έχει αφού το πεδίο ορισμού της είναι  $(-1, 1)$

Η γραφική της παράσταση δίνεται

στο διπλανό σχήμα:



**B3.** Αρχικά,

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \left\{ x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ και } -1 < \eta\mu x < 1 \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ και } \eta\mu x \neq -1, \eta\mu x \neq 1 \right\} = \left\{ x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ και } x \neq -\frac{\pi}{2}, x \neq \frac{\pi}{2} \right\} =$$

$$= \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \neq \emptyset, \text{ άρα ορίζεται η συνάρτηση } f \circ g \text{ με τύπο:}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\eta\mu x) = \frac{\eta\mu^3 x}{1 - \eta\mu^2 x} = \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Επομένως είναι  $h(x) = \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $D_h = \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$

**B4. α)** Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι περιττή, αφού για κάθε

$$x \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \text{ ισχύει } -x \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ και } h(-x) = \frac{\eta\mu^3(-x)}{\sigma\upsilon\nu^2(-x)} = \frac{-\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = -h(x)$$

οπότε:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} h(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 h(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x) dx \quad (1)$$

Στο ολοκλήρωμα  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 h(x) dx$ , θέτουμε  $u = -x$ , τότε  $x = -u$ ,  $dx = -du$  και άκρα

$x$	$-\frac{\pi}{4}$	0
$u$	$\frac{\pi}{4}$	0

$$\text{Άρα } \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 h(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 h(-u)(-du) = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} h(u)du$$

Οπότε από την **(1)** προκύπτει ότι:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx = 0$$

**β)** Στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , το  $\eta\mu x$  είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχουμε:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \eta\mu 0 \leq \eta\mu x \leq \eta\mu \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \eta\mu x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 0 \leq \eta\mu^3 x \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Οπότε  $0 \leq \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ , άρα  $h(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$  και η ισότητα ισχύει

μόνο για  $x = \frac{\pi}{4}$ , άρα,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx < \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx < \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot [\epsilon\phi x]_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx < \frac{\sqrt{2}}{4}$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x\sigma\upsilon\nu\alpha + 13\sigma\upsilon\nu^2\alpha$$

Η διακρίνουσα είναι  $\Delta = 144\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 156\sigma\upsilon\nu^2\alpha = -12\sigma\upsilon\nu^2\alpha \leq 0$  για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Άρα  $f'(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως το σύνολο τιμών της  $f$  είναι  $f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{6\sigma\upsilon\nu\alpha}{x} + \frac{13\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{x^2} + \frac{\eta\mu^2\alpha - 10\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{6\sigma\upsilon\nu\alpha}{x} + \frac{13\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{x^2} + \frac{\eta\mu^2\alpha - 10\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{x^3}\right) = +\infty$$

Άρα  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , οπότε το  $0 \in f(\mathbb{R})$ , οπότε υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ .

Η ρίζα  $x_0$  είναι μοναδική αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Γ2.** Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με:

$$f''(x) = 6x - 12\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Έστω  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2\sigma\upsilon\nu\alpha$

x	$-\infty$	2συνα	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
f(x)		↪	↩

Άρα,

Στο διάστημα  $(-\infty, 2\sigma\upsilon\alpha]$  είναι κοίλη και στο  $[2\sigma\upsilon\alpha, +\infty)$  κυρτή. Σημείο καμπής της συνάρτησης είναι το σημείο  $\Sigma(2\sigma\upsilon\alpha, f(2\sigma\upsilon\alpha))$

$$f(2\sigma\upsilon\alpha) = (2\sigma\upsilon\alpha)^3 - 6(2\sigma\upsilon\alpha)^2 \cdot \sigma\upsilon\alpha + 13 \cdot (2\sigma\upsilon\alpha) \cdot \sigma\upsilon\alpha^2 + \eta\mu^2\alpha - 10\sigma\upsilon\alpha^3\alpha$$

$$\Leftrightarrow f(2\sigma\upsilon\alpha) = \eta\mu^2\alpha$$

Άρα σημείο καμπής είναι το  $\Sigma(2\sigma\upsilon\alpha, \eta\mu^2\alpha)$

Έστω  $\Sigma(x, y)$  τότε  $x = 2\sigma\upsilon\alpha$  και  $y = \eta\mu^2\alpha$ , τότε:

$$\sigma\upsilon\alpha = \frac{x}{2} \quad \text{και} \quad y = 1 - \sigma\upsilon\alpha^2\alpha$$

$$\text{Άρα } y = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y = 1 - \frac{x^2}{4}$$

Άρα το σημείο καμπής κινείται πάνω στην παραβολή με εξίσωση  $y = 1 - \frac{x^2}{4}$

**Γ3. α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι:

Έστω  $M(x_0, g(x_0), x_0 \in (0, 2])$  το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_g$  στο σημείο M είναι:

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

$$\text{όπου } g(x_0) = 1 - \frac{x_0^2}{4} \quad \text{και}$$

$$g'(x) = -\frac{x}{2}, \quad \text{οπότε } g'(x_0) = -\frac{x_0}{2}$$

Επομένως η (1) γίνεται:

$$y - 1 + \frac{x_0^2}{4} = \left(-\frac{x_0}{2}\right) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow y = \left(-\frac{x_0}{2}\right) \cdot x + \frac{x_0^2}{4} + 1$$

• Τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο A:

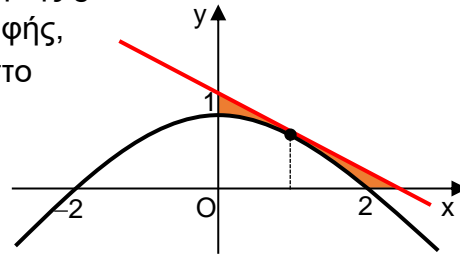
$$y = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{x_0}{2}\right) \cdot x + \frac{x_0^2}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{x_0 \cdot x}{2} = -\frac{x_0^2}{4} - 1 \Leftrightarrow x_0 \cdot x = \frac{x_0^2}{2} + 2 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{x_0^2 + 4}{2x_0}$$

• Τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο B:

$$x = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x_0^2}{4} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x_0^2 + 4}{4}$$

Το εμβαδόν  $E_1$  του τριγώνου OAB είναι:



$$E_1 = \frac{1}{2}(OA)(OB) \Leftrightarrow E_1 = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{x_0^2 + 4}{2x_0} \right| \cdot \left| \frac{x_0^2 + 4}{4} \right| \Leftrightarrow E_1 = \frac{(x_0^2 + 4)^2}{16x_0}$$

Το εμβαδόν  $E_2$  του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_g$  και τους θετικούς ημιάξονες  $Ox, Oy$  είναι:

$$E_2 = \int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{4}{3}$$



Επομένως το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_g$ , την εφαπτομένη και τους θετικούς ημιάξονες  $Ox, Oy$  είναι:

$$E = E_1 - E_2 \Leftrightarrow E = \frac{(x_0^2 + 4)^2}{16x_0} - \frac{4}{3} \quad (2)$$

Έστω η συνάρτηση  $E(x) = \frac{(x^2 + 4)^2}{16x} - \frac{4}{3}, x \in (0, 2]$

$$E'(x) = \frac{(x^2 + 4) \cdot (3x^2 - 4)}{16x^2}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$x$	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$E'(x)$		-	+
$E(x)$			

Άρα, στη θέση  $x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$  το εμβαδόν του χωρίου είναι ελάχιστο.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{3}$$

**β)** Το ελάχιστο εμβαδόν από τον τύπο (2) είναι:

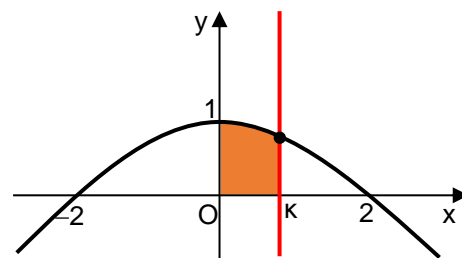
$$E\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(\frac{4}{3} + 4\right)^2}{16 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}} - \frac{4}{3} = \frac{8\sqrt{3} - 12}{9}$$

**Γ4.** Αρκεί να ισχύει:

$$2 \cdot \int_0^a g(x)dx = \int_0^2 g(x)dx \quad (3)$$

Είναι:

$$\int_0^a g(x)dx = \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = a - \frac{a^3}{12}$$



$$\text{και } \int_0^2 g(x)dx = \frac{4}{3}$$

$$\text{Από την (3) προκύπτει } 2 \cdot \left( \alpha - \frac{\alpha^3}{12} \right) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \alpha^3 - 12\alpha + 8 = 0$$

Η συνάρτηση  $\varphi(\alpha) = \alpha^3 - 12\alpha + 8$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  και  $\varphi(0) = 8$ ,  $\varphi(1) = -3$ , άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\kappa \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $\varphi(\kappa) = 0$ .

Η  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμη με  $\varphi'(\alpha) = 3(\alpha^2 - 4) < 0$  για κάθε  $\alpha \in [0, 1]$ , άρα η  $\varphi$  είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε το  $\kappa$  είναι μοναδικό.

### ΘΕΜΑ Δ

$$\begin{aligned} \Delta 1. \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 x' \cdot f(x)dx = [x \cdot f(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot f'(x)dx = f(1) - \int_0^1 x \cdot f'(1-x)dx = \\ &= f(1) - \int_0^1 x \cdot (-f(1-x))'dx = f(1) - \left( [-x \cdot f(1-x)]_0^1 - \int_0^1 x' \cdot (-f(1-x))dx \right) = \\ &= f(1) - \left( -f(0) + \int_0^1 f(1-x)dx \right) = f(1) + f(0) - \int_0^1 f(1-x)dx \quad (1) \end{aligned}$$

Θέτουμε  $u = 1 - x$ , τότε

$$x = 1 - u, \quad dx = -du \quad \text{και}$$

x	0	1
u	1	0

οπότε:

$$\int_0^1 f(1-x)dx = \int_1^0 f(u)(-du) = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx$$

Από την (1) προκύπτει:

$$\int_0^1 f(x)dx = f(1) + f(0) - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow 2 \int_0^1 f(x)dx = f(1) + f(0) \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{f(1) + f(0)}{2}$$

**Δ2. α)** Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη με:

$$g'(x) = f'(x) - f'(1-x) \text{ οπότε } g'(x) = 0, \text{ άρα η } g \text{ είναι σταθερή στο } [0, 1]$$

**β)** Επομένως υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε  $g(x) = c$  για κάθε  $x \in [0, 1]$

$$\text{Για } x = \frac{1}{2} \text{ έχουμε } g\left(\frac{1}{2}\right) = c \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = c \Leftrightarrow 2f\left(\frac{1}{2}\right) = c \Leftrightarrow c = 1.$$

Άρα  $f(x) + f(1-x) = 1$  για κάθε  $x \in [0, 1]$

**Δ3.** Από την υπόθεση έχουμε ότι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ , επομένως το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 1$  είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^1 f(x) dx$$

Από την ισότητα  $f(x) + f(1-x) = 1$  έχουμε:

$$\int_0^1 (f(x) + f(1-x)) dx = \int_0^1 1 dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(1-x) dx = 1 \quad (2)$$

Στο ερώτημα **Δ1** αποδείξαμε ότι  $\int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 f(x) dx$ ,

οπότε από την **(2)** έχουμε:

$$\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow E(\Omega) = \frac{1}{2}$$

Άρα το εμβαδόν είναι  $\frac{1}{2}$  τ.μ.

**Δ4.** Για κάθε  $x \in [0, 1]$  ισχύει  $f'(x) = f'(1-x)$  και η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, οπότε  $(f'(x))' = (f'(1-x))' \Rightarrow f''(x) = -f''(1-x)$

$$\text{Για } x = \frac{1}{2} \text{ έχουμε } f''\left(\frac{1}{2}\right) = -f''\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f''(x) = 0$  στο διάστημα  $[0, 1]$  είναι  $x = \frac{1}{2}$

Τότε είναι  $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$  και η  $f''$  είναι συνεχής, άρα διατηρεί

πρόσημο στο διάστημα  $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ . Επιπλέον είναι  $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -2 < 0$ , άρα  $f''(x) < 0$

στο διάστημα  $\left[0, \frac{1}{2}\right)$  και η  $f$  είναι κοίλη στο  $\left[0, \frac{1}{2}\right)$

Ομοίως είναι  $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$  και η  $f''$  είναι συνεχής, άρα διατηρεί

πρόσημο στο διάστημα  $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ . Επιπλέον είναι  $f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 > 0$ , άρα  $f''(x) > 0$

στο διάστημα  $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$  και η  $f$  είναι κυρτή στο  $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$

**Δ5.** Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$ , άρα έχει ένα ελάχιστο  $m$  και ένα μέγιστο  $M$ , και για κάθε  $x \in [0, 1]$  ισχύει  $m \leq f(x) \leq M$ . Οπότε έχουμε:

$$m \leq f(x) \leq M \Leftrightarrow m \cdot f(x) \leq f^2(x) \leq M \cdot f(x),$$

και

$$\int_0^1 m \cdot f(x) dx \leq \int_0^1 f^2(x) dx \leq \int_0^1 M \cdot f(x) dx \Leftrightarrow m \cdot \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 f^2(x) dx \leq M \cdot \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m \leq \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} \leq M$$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  και ο αριθμός  $\frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}$  είναι ενδιάμεσος της

ελάχιστης τιμής  $m$  και μέγιστης τιμής  $M$ , άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} \Leftrightarrow f(\xi) \cdot \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f^2(x) dx$$