Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στα Μαθηματικά προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου από το Askisopolis 2024 - 2025

Αντώνης Βαλέργας | Γαβρήλος Ελευθερίου
Αποστόλης Κακαβάς | Στέλιος Μιχαήλογλου
Άγγελος Μπλιάς | Θανάσης Νικολόπουλος
Δημήτρης Πατσιμάς | Βαγγέλης Ραμαντάνης
Νίκος Σαμπάνης | Βαγγέλης Τόλης
Νίκος Τούντας | Ισαάκ Χιονίδης

Μαθηματικά προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου
15ο Διαγώνισμα

30-4-2025

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ. Αν
- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

7 Μονάδες

Α2. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

4 Μονάδες

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης δεν έχει κοινά σημεία με αυτή τη συνάρτηση».
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

1+3 Μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
β) Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων f, g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)\cdot g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ ή } g(x)=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

γ) Μία πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού δεν έχει ασύμπτωτες.
δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, ισχύει $|\eta\mu x|<|x|$.
ε) Αν f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\gamma^\alpha f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$.

10 Μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A με $f(x+2)=1-\dfrac{5}{x^2+4x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-4,0\}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $A\subseteq\mathbb{R}-\{-2,2\}$ και $f(x)=1-\dfrac{5}{x^2-4}$, $x\in A$.

4 Μονάδες

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε ότι $A=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

4 Μονάδες

Β3. Να αποδείξετε ότι $f''(x)=\dfrac{-30x^2-40}{(x^2-4)^3}$, $x\in\mathbb{R}-\{-2,2\}$ και να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

6 Μονάδες

Β4. Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες καθώς και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

6 Μονάδες

Β5. Να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

5 Μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $2f^3(x)f'(x)-x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(-4)=f(4)=2$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x\in\mathbb{R}$.

7 Μονάδες

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

5 Μονάδες

Γ3. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

3 Μονάδες

Γ4. Να βρείτε σημεία της C_f συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y, στα οποία οι εφαπτομένες να είναι κάθετες.

7 Μονάδες

Γ5. Να δείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,f(x_1)), x_1\neq 0$ και $B(-x_1,0)$ εφάπτεται της C_f στο Α.

5 Μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2\ln x+\int_1^e\left(f(t)-t^2-2\right)dt$, $x>0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2+2\ln x+2$, $x>0$.

5 Μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 με $x_0\in(0,1)$.

5 Μονάδες

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(x_0,1)$ τέτοιο ώστε $x_0{}^2+2=\dfrac{2(1-x_0)}{\xi}$.

5 Μονάδες

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)\le x^2+2x$ για κάθε $x>0$. Πότε ισχύει η ισότητα; (1 μονάδα).

β) $f(x)+f(1-x)\le 2x^2-2x+3$ για κάθε $x\in(0,1)$ (3 μονάδες).

4 Μονάδες

Δ5. Έστω $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2-2x+3$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=\kappa$ και $x=1-\kappa$ όπου $\kappa\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. Να αποδείξετε ότι $2\int_\kappa^{1-\kappa}f(x)dx<E(\Omega)$.

6 Μονάδες

Καλή τύχη!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

  Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f, με τη οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε έναν μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με f(x).Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε: $f : A \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$

Α3. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \le 0 \end{cases}$. Η συνάρτηση αυτή έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$ (τον άξονα $y'y$) διότι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ αλλά τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $O(0,0)$ διότι $f(0) = 0$

Α4. α) Λ **β)** Λ **γ)** **Σ** **δ)** Σ **ε)** Λ

Θέμα Β

Β1. Θέτουμε $x + 2 = \omega \Leftrightarrow x = \omega - 2$ και πρέπει $\begin{cases} x \ne -4 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega - 2 \ne -4 \\ \omega - 2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega \ne -2 \\ \omega \ne 2 \end{cases}$ άρα $A \subseteq \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Τότε $f(\omega) = 1 - \dfrac{5}{(\omega - 2)^2 + 4(\omega - 2)} = 1 - \dfrac{5}{\omega^2 - 4\omega + 4 + 4\omega - 8} = 1 - \dfrac{5}{\omega^2 - 4}$, $\omega \in A$

Άρα $f(x) = 1 - \dfrac{5}{x^2 - 4}$, $x \in A$.

Β2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ με $f'(x) = \dfrac{5 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \dfrac{10x}{(x^2 - 4)^2}$.

Είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x(0,2) \cup (2, +\infty)$.
Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ είναι $f \searrow (-\infty, -2)$, $f \searrow (-2, 0]$, $f \nearrow [0, 2)$ και $f \nearrow (2, +\infty)$.
Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = \dfrac{9}{4}$.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$10x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x^2-4)^2$	$+$	0	$+$		$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
f	↘	‖	↘		↗	‖	↗

Τ.Ε.

B3. Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ με $f''(x)=\dfrac{10\left(x^2-4\right)^2-10x\cdot 2\left(x^2-4\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^4}=$

$$=\frac{\cancel{\left(x^2-4\right)}\left(10x^2-40-40x^2\right)}{\left(x^2-4\right)^{\cancel{4}^{3}}}=\frac{-30x^2-40}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$-30x^2-40$	$-$		$-$		$-$
$\left(x^2-4\right)^3$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$	‖	$-$
f	$\frown$	‖	$\smile$	‖	$\frown$

Είναι $\left(x^2-4\right)^3\geq 0\Leftrightarrow x^2-4\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|\geq 2\Leftrightarrow x\leq -2$ ή $x\geq 2$

Είναι $f''(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,2)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ είναι $f\frown(-\infty,-2)$, $f\smile(-2,2)$ και $f\frown(2,+\infty)$. Η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

B4. $f(0)=\dfrac{9}{4}$ άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $A\left(0,\dfrac{9}{4}\right)$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-2,2\}$ είναι

$f(x)=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{5}{x^2-4}=0\Leftrightarrow x^2-4-5=0\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow\Leftrightarrow x=\pm 3$ (δεκτές) άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $B(-3,0)$ και $\Gamma(3,0)$.

Η f είναι συνεχής στο $x\in\mathbb{R}-\{-2,2\}$ οι πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες είναι η $x=-2$ και $x=2$.

$\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(1-\dfrac{5}{x^2-4}\right)=-\infty$ γιατί $x^2-4>0$ για κάθε $x<-2$.

$\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(1-\dfrac{5}{x^2-4}\right)=+\infty$ γιατί $x^2-4<0$ για κάθε $x\in(-2,2)$.

Άρα η $x=-2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

(Εδώ δεν χρειάζονται και τα δύο όρια απλά βοηθούν για την γραφική παράσταση)

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(1-\dfrac{5}{x^2-4}\right)=+\infty$ γιατί $x^2-4<0$ για κάθε $x\in(-2,2)$.

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(1-\dfrac{5}{x^2-4}\right)=-\infty$ γιατί $x^2-4>0$ για κάθε $x>2$.

Άρα η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

(Εδώ δεν χρειάζονται και τα δύο όρια απλά βοηθούν για την γραφική παράσταση)

$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\dfrac{5}{x^2-4}\right)=1$ άρα η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

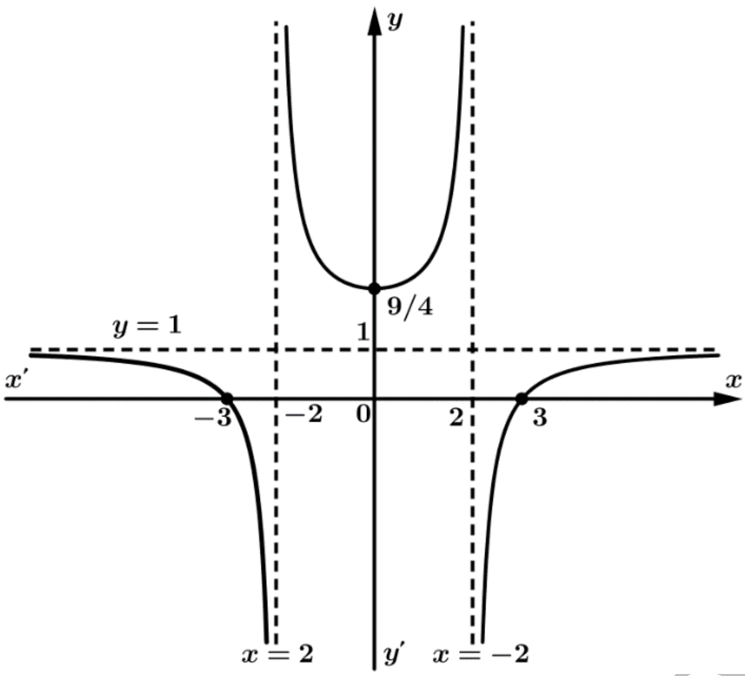
$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1-\dfrac{5}{x^2-4}\right)=1$ άρα η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

B5.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$		$+$	‖	$-$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
f	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$		$\nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

Τ.Ε.



Θέμα Γ

Γ1. $2f^3(x)f'(x)-x=0 \Leftrightarrow 2f^3(x)f'(x)=x \Leftrightarrow 4f^3(x)f'(x)=2x \Leftrightarrow$

$\left(f^4(x)\right)'=\left(x^2\right)' \Leftrightarrow f^4(x)=x^2+c,\ c\in\mathbb{R}$. Είναι $f^4(4)=4^2+c \Leftrightarrow 16=16+c \Leftrightarrow c=0$, άρα

$f^4(x)=x^2 \Leftrightarrow f^2(x)=|x| \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{|x|}$ (1).

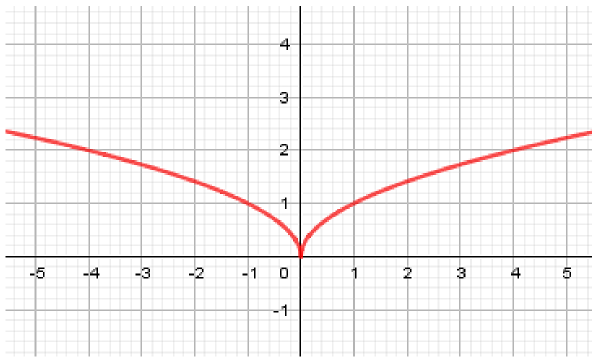
Για κάθε $x\neq 0$ είναι $\sqrt{|x|}>0$, άρα $|f(x)|>0 \Leftrightarrow f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),\ (0,+\infty)$. Επειδή $f(-4)=f(4)=2>0$, είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, οπότε $f(x)=\sqrt{|x|}$. Επειδή από την (1) προκύπτει ότι $f(0)=0$, τελικά είναι $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. $f(x)=\sqrt{|x|}=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$, είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}=-\dfrac{1}{2}(-x)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{4}(-x)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{4\sqrt{-x^3}}<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$, είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$.

Γ3. Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία της C_1: $y=\sqrt{x}$ και από τα σημεία της $y=\sqrt{-x}$ που είναι τα συμμετρικά της C_1 ως προς τον άξονα y΄y.



Γ4. Έστω $M\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$ σημείο της C_f . Έστω $x_2>0$ τότε $M\left(x_2, \sqrt{x_2}\right)$ και το συμμετρικό του ως προς τον άξονα y΄y είναι το $N\left(-x_2, \sqrt{x_2}\right)$.

Οι εφαπτομένες της C_f στα Μ και Ν είναι κάθετες, αν και μόνο αν

$$f'\left(x_2\right) f'\left(-x_2\right)=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{2 \sqrt{x_2}}\left(-\frac{1}{2 \sqrt{x_2}}\right)=-1 \Leftrightarrow 1=4 \sqrt{x_2^2} \overset{x_2>0}{\Leftrightarrow} 1=4 x_2 \Leftrightarrow x_2=\frac{1}{4}$$, άρα

$M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ και $N\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

Γ5. Αν $x_1>0$, τότε $A\left(x_1, \sqrt{x_1}\right)$ και $B\left(-x_1, 0\right)$. Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{AB}=\frac{\sqrt{x_1}-0}{x_1+x_1}=\frac{\sqrt{x_1}}{2 x_1}=\frac{1}{2 \sqrt{x_1}}=f'\left(x_1\right)$$, οπότε η ΑΒ εφάπτεται της C_f στο Α.

Αν $x_1<0$, τότε $A\left(x_1, \sqrt{-x_1}\right)$ και $B\left(-x_1, 0\right)$. Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{AB}=\frac{\sqrt{-x_1}-0}{x_1+x_1}=\frac{\sqrt{-x_1}}{2 x_1}=\frac{\left(\sqrt{-x_1}\right)^2}{2 x_1 \sqrt{-x_1}}=\frac{\cancel{-x_1}}{-2\left(\cancel{-x_1}\right) \sqrt{-x_1}}=-\frac{1}{2 \sqrt{-x_1}}=f'\left(x_1\right)$$, οπότε η ΑΒ εφάπτεται και πάλι της C_f στο Α.

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $\int_1^e\left(f(t)-t^2-2\right) dt=c \in \mathbb{R}$. Τότε $f(x)=x^2+2 \ln x+c$, $x>0$ και

$$\int_1^e\left(f(t)-t^2-2\right) dt=c \Leftrightarrow \int_1^e\left(\cancel{t^2}+2 \ln t+c-\cancel{t^2}-2\right) dt=c \Leftrightarrow \int_1^e 2 \ln t \, dt+\int_1^e(c-2) dt=c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e 2 \ln t(t)' dt+(c-2)(e-1)=c \Leftrightarrow[2 t \ln t]_1^e-\int_1^e 2 dt+c(e-1)-2 e+2=c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 e-0-2(e-1)+c(e-1)-2 e+2=c \Leftrightarrow \cancel{2e}-\cancel{2e}+2+c(e-1)-2 e+2=c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+c(e-1)-2 e+2=c \Leftrightarrow c(e-2)=2 e-4 \Leftrightarrow c(e-2)=2(e-2) \Leftrightarrow c=2 .$$

Συνεπώς $f(x)=x^2+2 \ln x+2$, $x>0$.

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $\lim\limits_{x \rightarrow 0^{+}} f(x)=\lim\limits_{x \rightarrow 0^{+}}\left(x^2+2 \ln x+2\right)=-\infty$ άρα υπάρχει $\alpha>0$ κοντά στο μηδέν τέτοιο ώστε $f(\alpha)<0$.

Επίσης $f(1)=3>0$ άρα $f(\alpha) f(1)<0$. Συνεπώς από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in(\alpha, 1) \subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $f\left(x_0\right)=0$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=2 x+\frac{2}{x}>0$ για κάθε $x>0$ άρα $f \nearrow \mathbb{R}$ και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$ το x_0.

Δ3. Γνωρίζουμε ότι $f\left(x_0\right)=0 \Leftrightarrow {x_0}^2+2 \ln x_0+2=0 \Leftrightarrow {x_0}^2+2=-2 \ln x_0$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in\left(x_0, 1\right)$ τέτοιο ώστε:

$$ {x_0}^2+2=\frac{2\left(1-x_0\right)}{\xi} \Leftrightarrow-2 \ln x_0=\frac{2\left(1-x_0\right)}{\xi} \Leftrightarrow \frac{-\ln x_0}{1-x_0}=\frac{1}{\xi} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi}=\frac{\ln 1-\ln x_0}{1-x_0}$$

Έστω $h(x)=\ln x$, $x>0$. Η h είναι συνεχής στο $\left[x_0, 1\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(x_0, 1\right)$ με $h'(x)=\frac{1}{x}$ άρα από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in\left(x_0, 1\right)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=\frac{h(1)-h\left(x_0\right)}{1-x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi}=\frac{\ln 1-\ln x_0}{1-x_0}$.

Δ4. α) Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\le x^2+2x \Leftrightarrow \cancel{x^2}+2\ln x+2\le \cancel{x^2}+2x \Leftrightarrow \ln x+1\le x \Leftrightarrow \ln x\le x-1$ που ισχύει με την ισότητα μόνον για $x=1$.

β) Στην προηγούμενη ανισότητα για $x>0$ το $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$ άρα $x\in(0,1)$ είναι

$f(1-x)\le(1-x)^2+2(1-x) \Leftrightarrow f(1-x)\le 1-2x+x^2+2-2x \Leftrightarrow f(1-x)\le x^2-4x+3$

Προσθέτοντας κατά μέλη είναι: $f(x)+f(1-x)\le 2x^2-2x+3$ για κάθε $x\in(0,1)$

Δ5. Είναι $0<\kappa<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<-\kappa<0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<1-\kappa<1$ άρα $0<\kappa<\frac{1}{2}<1-\kappa<1$.

Είναι $E(\Omega)=\int_{\kappa}^{1-\kappa}|g(x)|dx$.

ΣΧΟΛΙΟ: Για να αναφέρουμε το εμβαδόν είναι απαραίτητο να αποδείξουμε ότι $\kappa<1-\kappa$ ώστε να ξέρουμε την σειρά των άκρων ολοκλήρωσης.

Έχουμε $g(x)=2x^2-2x+3>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $\Delta=-20<0$, άρα $E(\Omega)=\int_{\kappa}^{1-\kappa}g(x)dx$.

Είναι $f(x)+f(1-x)\le 2x^2-2x+3 \Leftrightarrow f(x)+f(1-x)\le g(x)$ για κάθε $x\in(0,1)$ με το ίσον να μην ισχύει για κάθε x άρα $\int_{\kappa}^{1-\kappa}f(x)dx+\int_{\kappa}^{1-\kappa}f(1-x)dx<E(\Omega)$.

Αν θέσουμε $1-x=u$ τότε $-dx=du$ και για $x=\kappa$ είναι $u=1-\kappa$ ενώ για $x=1-\kappa$ είναι $u=\kappa$.

Τότε $\int_{\kappa}^{1-\kappa}f(x)dx+\int_{\kappa}^{1-\kappa}f(1-x)dx<E(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\kappa}^{1-\kappa}f(x)dx-\int_{1-\kappa}^{\kappa}f(u)du<E(\Omega) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_{\kappa}^{1-\kappa}f(x)dx+\int_{\kappa}^{1-\kappa}f(x)dx<E(\Omega) \Leftrightarrow 2\int_{\kappa}^{1-\kappa}f(x)dx<E(\Omega)$.