ΝΤΟΥΛΑΣ Κ.

25/4/2025

## $2^{η}$ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω μία συνάρτηση $f$ ορισμένη σ΄ένα διάστημα $\Delta$ και $x_0$ ένα **εσωτερικό** σημείο του $\Delta$. Αν η $f$ παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $x_0$ και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό ,τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$. **(7μονάδες)**

**Α2.** Θεωρούμε την πρόταση : «Αν μία συνάρτηση ,παραγωγίσιμη στο R ,είναι γνησίως αύξουσα τότε ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$ ”. Να γράψετε αν είναι αληθής η ψευδής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(1+3 μονάδες)**

**Α3.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. **(4 μονάδες)**

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, **Σωστό** ή **Λάθος**.

**(10 μονάδες)**

**ι)** Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της $C_f$ που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x.

**ιι)** Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ,τότε $f(x)>0$ κοντά στο $x_0$.

**ιιι)** Η συνάρτηση $f(x)=σφx$ είναι παραγωγίσιμη στο $R_1=R-\{x\,/\,ημx=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{ημ^2x}$.

**ιν)** Η συνάρτηση $f$ είναι σταθερή στο διάστημα $\Delta$ όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\Delta$, ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

**ν)** Το $\int_α^β f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον x΄x.

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1-x^2, x\in A_1=(-\infty,0]\\ 1+\dfrac{1}{x}, x\in A_2=(0,+\infty)\end{cases}$.

**Β1.** Να βρείτε τα σύνολα τιμών $f(A_1)$ και $f(A_2)$ **(4 μονάδες)** και στη συνέχεια να δείξετε ότι η $f$ είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση.

**(8 μονάδες)**

**Β2.** Να δείξετε ότι $f^{-1}(α)+f^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)=1$,όπου α σημείο όπου η f δεν είναι συνεχής.

**(4 μονάδες)**

**Β3.** Να λύσετε την ανίσωση $2f\left(x^2+x+2\right)>3$. **(4 μονάδες)**

**Β4.** Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της $f$ **(3 μονάδες)** και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτόμενη (ε) της $C_f$ στο $M(λ, f(λ)), λ>0$ με την οριζόντια και κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$. **(9 μονάδες)**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu 2x$ , $x \in \Delta = [0,\pi]$.

**Γ1.** Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θ. Rolle στο διάστημα $\Delta$ και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα $\xi \in (0,\pi)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

**(5 μονάδες)**

**Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης που «διαπερνά» την $C_f$ .

**(6 μονάδες)**

Σημείο $K(x,y), x \in [0,\pi]$ κινείται πάνω στη $C_f$ ,ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων , ώστε $x'(t) = \frac{\pi}{4}$ cm / min .

**Γ3.** Να βρείτε

**(α)** το διάστημα του x όπου το Κ ,καθώς κινείται πάνω στη $C_f$ , στρέφεται κατά την θετική φορά και το διάστημα του x όπου το Κ στρέφεται κατά την αρνητική φορά.

**(3 μονάδες)**

**(β)** Να βρείτε σε πόσο χρόνο το κινητό θα έχει διαγράψει όλη τη $C_f$ .

**(4 μονάδες)**

**Γ4.** Έστω σημείο $\Sigma(0,2)$ εκτός της $C_f$ .

Να δείξετε ότι υπάρχει μία, τουλάχιστον, χρονική στιγμή $t_1$ όπου το κινητό σημείο Κ βρίσκεται σε θέση που απέχει από το $\Sigma$ λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της $C_f$ .

**(7 μονάδες)**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \kappa + 1 + (x-1)e^x$ , $x \in R$ ,της οποίας το διάγραμμα δέχεται ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = 2$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι $\kappa = 1$ **(3 μονάδες) κ**αι να βρείτε το ακρότατο της f.

**(6 μονάδες)**

**Δ2.** Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\ln(x_0 - 1)}{(x - x_0)(f(x) - 3)}$ ,όπου $x_0$ η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 3$.

**(6 μονάδες)**

**Δ3.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από το διάγραμμα της $f$ και την πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης $h(x) = x + 1 + \dfrac{\sqrt{x^4 + 3}}{f(x)}$ , $x > 0$ .

**(8 μονάδες)**

**Δ4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $x + f(x) = e^x + \dfrac{x^3}{6}$ έχει μοναδική λύση $x = 0$ .

**(5 μονάδες)**