

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2025**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$ , για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε η ευθεία  $y = \ell$  λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ , στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f, g$  είναι δυο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις  $g \circ f$  και  $f \circ g$  τότε οι  $g \circ f$  και  $f \circ g$  δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

**β)** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

**γ)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0)$  τότε η σύνθεση τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

**δ)** Αν η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  με  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) = 0$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**ε)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$

$$f(x) = \sqrt{4-x}, x \leq 4$$

$$g(x) = \ln x, x > 0$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται, να βρεθεί η  $f^{-1}$  και να γίνουν στο ίδιο σύστημα αξόνων οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 6**

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $h(x) = 4 - x^2, x \geq 0$ .

**B2.** Να ορισθεί η συνάρτηση  $g \circ h$ .

**Μονάδες 6**

**B3.** Έστω  $K(x) = \ln(4 - x^2), x \in [0,2)$ . Να βρεθεί η μονοτονία, τα ακρότατα και οι ασύμπτωτες της.

**Μονάδες 7**

**B4.** Δείξτε ότι η ευθεία  $\psi=1$  τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $K(x)$  σε ακριβώς ένα σημείο με τετμημένο  $x \in (0,2)$

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1, & x < 0 \\ 2e^x - x^2 - 2x - \alpha, & x \geq 0 \end{cases}$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και να εξετάσετε αν η  $f$  παραγωγίζεται στο  $x_0 = 0$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της  $f$  και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μια ρίζα  $\rho$  και  $\rho \in (-2, -1)$ .

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Το σημείο  $M(\alpha, f(\alpha))$  με  $\alpha > 0$  κινείται στη  $C_f$  και το  $\alpha$  μεταβάλλεται με ρυθμό  $1 \text{ cm/min}$ . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού που σχηματίζει η  $C_f$  με τις ευθείες  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = \alpha$  τη χρονική στιγμή που η κλίση της  $f$  στο  $M$  είναι  $2e - 4$ .

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ ,  $g(x) = 1 + x - e^x$  και  $h(x) = f^2(x)$ , με  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα κοίλα.

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να βρείτε το πρόσημο και τις ασύμπτωτες της  $C_g$  και να αποδείξετε ότι η ασύμπτωτη  $(\varepsilon)$  της  $C_g$  στο  $-\infty$  εφάπτεται με την  $h(x)$ .

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $\frac{\sqrt{3}}{2} < \int_0^1 f(x) dx < \sqrt{3}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Έστω  $M(x, h(x))$  και  $N(x, g(x))$ .

Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα  $x_0 \in \mathbb{R}$  για το οποίο η απόσταση  $MN$  γίνεται ελάχιστη.

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**  
**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**