ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ.

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β) τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

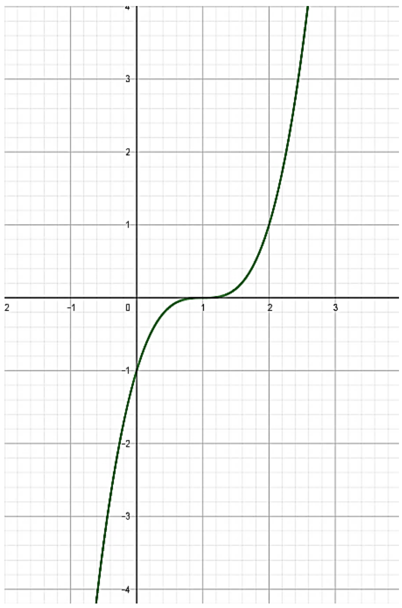
Μονάδες 7

Α2. Να αναφέρετε ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μίας συνάρτησης f. Ποιες από αυτές τις θέσεις χαρακτηρίζονται ως κρίσιμα σημεία; **Μονάδες 4**

Α3.Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 4

Α4.Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη, με τη γραφική παράσταση της f΄ να φαίνεται στο διπλανό σχήμα και f(1)=3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:



i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
ii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο 1 ελάχιστο.
iii. Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-\infty,1]$.
iv. Υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον xx΄.
v. Είναι f(x)>0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-2}$, $x \in \mathbb{R}\text{-}\{2\}$.

Β1. Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 5

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Β3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 5

Β4. Με τη βοήθεια των παραπάνω να γίνει η γραφική παράσταση της f. Με τη βοήθειά της ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=k, $\kappa \in \mathbb{R}\text{-}\{2\}$.

Μονάδες 5

Β5. Να υπολογίσετε:

α. Το εμβαδό Ε(λ) του χωρίου το οποίο περικλείεται, από τη γραφική παράσταση της f, την πλάγια ασύμπτωτη αυτής στο +∞ και τις ευθείες x=3 και x=λ με λ>3.

β Το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\eta\mu \mathrm{E}(\lambda)}{\mathrm{E}(\lambda)}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ για την οποία $f(x) = \frac{1}{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Γ1. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : f'(x_0) = 0$

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία y=2025+ $\int_{-\pi}^{\pi} \eta\mu^3 x dx$ σε δύο ακριβώς σημεία με τετμημένες $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $x_1 < \frac{\pi}{4} < x_2$

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : f'(\xi_2)\left(\frac{\pi}{4} - x_2\right) = f'(\xi_1)\left(\frac{\pi}{4} - x_1\right)$

Μονάδες 5

Γ5. Αν F παράγουσα της f στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ να λύσετε την εξίσωση $2\left(F(x) - x\right) + \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} - 2\eta\mu x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η $f(x) = (x-2)\left(e^{x-2} - \alpha\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ η οποία στο $x_0 = \int_0^1 \frac{2x}{e^{-x}} dx$ έχει κρίσιμο σημείο.

Δ1. Να δείξετε ότι $x_0 = 2$ και α=1.

Μονάδες 4

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 3

Δ4. Υλικό σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της f με την τετμημένη του να μειώνεται με ρυθμό 2μ/s. Αν Κ η προβολή του Μ στον άξονα xx΄, δείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας, $\widehat{MOK}$ τη χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από τη θέση του ακρότατου της f, είναι κατά απόλυτη τιμή ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του Μ.

Μονάδες 5

\\

\

Δ5.Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με g(x)=f(x)+x-4.

α. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2,4): g(x_0)=0$.

Μονάδες 4

β. Αν γνωρίζεται ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να δείξετε ότι

για κάθε $x\in[x_0,4]$: $\int_{x_0}^{4} f^{-1}(4-x)dx < 8-\frac{x_0^2}{2}$

Μονάδες 4

Ενδεικτικες Απαντησεις

Θ.Α

Α.1) Σχολικο βιβλιο σελ. 144

Α.2) Σχολικο βιβλιο σελ. 143

Α.3) Σχολικο βιβλιο σελ 74

Α.4) i → Λαθος ii → Σωστο iii → Λαθος iv → Σωστο v → Σωστο

Θ.Β

Β1) $D_{g\circ h}=\{x\in D_h / h(x)\in D_g\}$

• $x\in D_h \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

• $h(x)\in D_g \Leftrightarrow (x-2)\in\mathbb{R}^* \Leftrightarrow x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$

Αρα $D_{g\circ h}=\mathbb{R}-\{2\}$, οποτε $(g\circ h)(x)=g(h(x))=\dfrac{h^2(x)+1}{h(x)}$

$$=\frac{h^{\cancel{2}}(x)}{\cancel{h(x)}}+\frac{1}{h(x)}=h(x)+\frac{1}{h(x)}=x-2+\frac{1}{x-2},\ x\neq 2$$

Αρα $f(x)=x-2+\dfrac{1}{x-2},\ x\neq 2$

Β2) Η f συνεχης στο $\mathbb{R}-\{2\}$ ως αθροισμα συνεχων οποτε θα αναζητησουμε κατακορυφες ασυμπτωτες στο 2

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x-2+\dfrac{1}{x-2}\right)=-\infty$, διοτι $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0$

και $x-2<0$ για $x<2$, οποτε $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$

Αρα η $x=2$ κατακορυφη ασυμπτωτη της C_f

$\lim\limits_{x\to -\infty}(x-2)=\lim\limits_{x\to -\infty}x=-\infty$, οποτε $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$, συνεπως

$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=-\infty$ αρα η C_f δεν εχει οριζοντια ασυμπτωτη στο $-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(x-2)=\lim\limits_{x\to +\infty}x=+\infty$ αρα $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$, οποτε $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$

Αρα η C_f δεν εχει οριζοντια ασυμπτωτη στο $+\infty$.

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0$

και όμοια $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-2}=0$, συνεπώς

η $y=x-2$ ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Β3) Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{2\}$ ως άθροισμα παρ/μων με $f'(x)=1-\frac{1}{(x-2)^2}$, $x\neq 2$

$f'(x)=0 \iff 1-\frac{1}{(x-2)^2}=0 \iff 1=\frac{1}{(x-2)^2} \iff (x-2)^2=1$

$\iff |x-2|=1 \iff x-2=-1$ ή $x-2=1 \iff x=1$ ή $x=3$

$f'(x)>0 \iff 1-\frac{1}{(x-2)^2}>0 \iff 1>\frac{1}{(x-2)^2} \overset{(x-2)^2>0}{\iff} (x-2)^2>1$

$\iff |x-2|>1 \iff x-2<-1$ ή $x-2>1 \iff x<1$ ή $x>3$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↗	-2	↘	‖	↘	2	↗	

$f'(x)>0$ $\forall x\in(-\infty,1)$ και f συνεχής στο $(-\infty,1]$ οπότε η $f\uparrow(-\infty,1]$

$f'(x)<0$ $\forall x\in(1,2)$ και f συνεχής στο $[1,2)$ οπότε $f\downarrow[1,2)$

$f'(x)<0$ $\forall x\in(2,3)$ και f συνεχής στο $(2,3]$ οπότε $f\downarrow(2,3]$

$f'(x)>0$ $\forall x\in(3,+\infty)$ και f συνεχής στο $[3,+\infty)$ οπότε $f\uparrow[3,+\infty)$

Άρα η f στη θέση $x_1=1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1)=-2$

και στη θέση $x_2=3$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(3)=2$

Η f' συνεχής και παρ/μη στο $\mathbb{R}-\{2\}$ με $f''(x)=\frac{2}{(x-2)^3}\neq 0$

για κάθε $x\neq 2$, οπότε η C_f δεν έχει σημείο καμπής.

$f''(x)>0 \iff \frac{2}{(x-2)^3}>0 \overset{(x-2)^4>0\ \forall x\neq 2}{\iff} 2(x-2)>0 \iff x-2>0 \iff x>2$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x<2$

Η $f \frown (-\infty, 2)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	
f		$\frown$	‖	$\smile$	

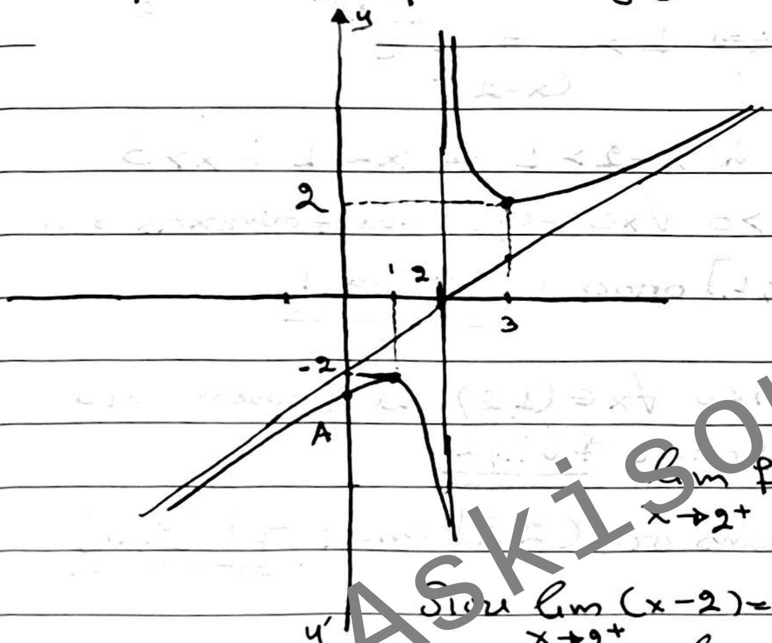
$f \smile (2, +\infty)$

Β4) Για τον $x'x$: $f(x)=0 \Leftrightarrow x-2+\dfrac{1}{x-2}=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+1=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=-1$ αδύνατη, οπότε η C_f δεν τέμνει τον $x'x$

Για τον $y'y$: $0 \in D_f$ άρα $f(0)=-2-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2}$

άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $A\left(0, -\dfrac{5}{2}\right)$



x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-2+\dfrac{1}{x-2}\right)=+\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$ και $x-2>0$ για $x>2$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$

Β5) α) Έστω $\varphi(x)=f(x)-(x-2)=\dfrac{1}{x-2}$, $x\in[3,\lambda]$

$x\geq 3 \Rightarrow x-2\geq 1>0$ άρα $\varphi(x)>0$ για κάθε $x\in[3,\lambda]$

οπότε $E(\lambda)=\displaystyle\int_3^\lambda |\varphi(x)|dx \overset{\varphi(x)>0}{=\!=} \int_3^\lambda \varphi(x)dx=\int_3^\lambda \frac{1}{x-2}dx=\Big[\ln|x-2|\Big]_3^\lambda$

$=\ln|\lambda-2|-\cancel{\ln|1|}^{\,0} \overset{\lambda>3}{=\!=} \ln(\lambda-2)$

β) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\eta\mu E(\lambda)}{E(\lambda)} \underset{u_0=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln(\lambda-2)=+\infty}{\overset{E(\lambda)=u}{=\!=\!=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}=0$, διότι

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln(\lambda-2) \underset{y_0=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(\lambda-2)=+\infty}{\overset{y=\lambda-2}{=\!=\!=}} \lim\limits_{y\to+\infty}\ln y=+\infty$

Για u κοντά στο +∞ έχουμε:

$$\left|\frac{ημu}{u}\right| = \frac{|ημu|}{|u|} \le \frac{1}{|u|} \overset{u>0}{=} \frac{1}{u}$$

άρα $\left|\frac{ημu}{u}\right| \le \frac{1}{u} \Leftrightarrow -\frac{1}{u} \le \frac{ημu}{u} \le \frac{1}{u}$ (1)

$\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{1}{u} = 0$ (2) και $\lim\limits_{u\to+\infty} -\frac{1}{u} = 0$ (3)

Από (1) λόγω (2), (3) και Κ.Π. $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{ημu}{u} = 0$

Θέμα Γ

Γ1) $f(x) = \frac{1}{2ημxσυνx}, x\in(0,\frac{π}{2})$

Η f συνεχής και παρ/μη στο $A=(0,\frac{π}{2})$ ως πηλίκο συνεχών και παρ/μων συναρτήσεων με $f'(x) = -\frac{συν^2x - ημ^2x}{2ημ^2xσυν^2x} = \frac{ημ^2x-συν^2x}{2ημ^2xσυν^2x}, x\in A$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{ημ^2x-συν^2x}{2ημ^2xσυν^2x} = 0 \Leftrightarrow ημ^2x - συν^2x = 0 \Leftrightarrow (ημx-συνx)(ημx+συνx)=0$

$\underset{ημx,συνx>0 \forall x\in A}{\overset{ημx+συνx>0 \forall x\in A}{\Longleftrightarrow}} ημx-συνx=0 \Leftrightarrow ημx=συνx \underset{\forall x\in A}{\overset{συνx>0}{\Longleftrightarrow}} εφx=1 \Leftrightarrow εφx=εφ\frac{π}{4}$

$\overset{x\in(0,\frac{π}{2})}{\Longleftrightarrow} x=\frac{π}{4}$

Γ2) $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{ημ^2x-συν^2x}{2ημ^2xσυν^2x} > 0 \underset{\forall x\in A}{\overset{2ημ^2xσυν^2x>0}{\Longleftrightarrow}} ημ^2x-συν^2x>0$

$\Leftrightarrow (ημx-συνx)(ημx+συνx) = 0 \underset{\forall x\in A}{\overset{ημx+συνx>0}{\Longleftrightarrow}} ημx-συνx=0$

$\Leftrightarrow ημx=συνx \underset{\forall x\in A}{\overset{συνx>0}{\Longleftrightarrow}} εφx>1 \Leftrightarrow εφx>εφ\frac{π}{4} \overset{εφx\nearrow(0,\frac{π}{2})}{\Longleftrightarrow} x>\frac{π}{4}$

$\overset{x\in A}{\Longleftrightarrow} x\in(\frac{π}{4},\frac{π}{2})$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \overset{x\in A}{\Longleftrightarrow} x\in(0,\frac{π}{4})$

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\boxed{1}$	$\nearrow$	

$f'(x)<0\ \forall x\in(0,\frac{\pi}{4})$ και f συνεχης στο $(0,\frac{\pi}{4}]$, οποτε $f\downarrow(0,\frac{\pi}{4}]$

$f'(x)>0\ \forall x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ και f συνεχης στο $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$, οποτε $f\uparrow[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$

Η f στη θεση $x=\pi/4$ παρουσιαζει Ο.Ε το $f(\pi/4)=\dfrac{1}{2\eta\mu\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}$

$=\dfrac{1}{\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}^2}{2}}=\dfrac{1}{\frac{2}{2}}=1$

Η f συνεχης και γν. φθινουσα στο $A_1=(0,\frac{\pi}{4})$ αρα

$f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}f(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{2\sigma\upsilon\nu x}\cdot\dfrac{1}{\eta\mu x}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{2\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1}{2\sigma\upsilon\nu 0}=\dfrac{1}{2}>0$

$\lim\limits_{x\to0^+}\eta\mu x=\eta\mu 0=0$ και $\eta\mu x>0$ για $x\in(0,\pi/2)$ αρα $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\eta\mu x}=+\infty$

Συνεπως $\boxed{f(A_1)=(1,+\infty)}$

Η f συνεχης και γν. αυξουσα στο $A_2=[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ αρα

$f(A_2)=\left[f(\frac{\pi}{4}),\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)\right)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\dfrac{1}{2\eta\mu x}\cdot\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=+\infty$. Διοτι

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{1}{2\eta\mu x}=\dfrac{1}{2\eta\mu\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{2\cdot1}=\dfrac{1}{2}>0$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$ και $\sigma\upsilon\nu x>0$ για $x\in(0,\pi/2)$

οποτε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$, συνεπως $\boxed{f(A_2)=[1,+\infty)}$

Άρα $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(1,+\infty)\cup[1,+\infty)=[1,+\infty)$

Γ3) Έστω $I=\int_{-\pi}^{\pi} ημ^3x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} ημ^2x\cdot ημx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}(1-συν^2x)ημx\,dx$

Θέτουμε $συνx=u$ (1) $\Rightarrow -ημx\,dx=du \Rightarrow ημx\,dx=du$

για $x=-\pi$ η (1) δίνει $u=συν(-\pi)=συν\pi=-1$

για $x=\pi$ η (1) δίνει $u=συν\,\pi=-1$

άρα $I=\int_{-1}^{-1}(1-u^2)(-du)=\int_{-1}^{-1}(u^2-1)du=0$

Άρα αρκεί ν.α.ο η ευθεία $y=2025+I=2025$ τέμνει τη C_f σε 2 ακριβώς σημεία, δηλαδή αρκεί ν.α.ο η εξίσωση $f(x)=2025$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

$2025\in f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1\in A_1$ τ.ω. $f(x_1)=2025$ και επειδή η $f\downarrow A_1$ η ρίζα x_1 μοναδική της $f(x)=2025$ στο A_1

$2025\in f(A_2)$ άρα υπάρχει $x_2\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ (διότι $f(\frac{\pi}{4})=1\neq 2025$) τ.ω. $f(x_2)=2025$ και επειδή η $f\uparrow A_2$ η ρίζα x_2 μοναδική της $f(x)=2025$ στο A_2.

Άρα η $f(x)=2025$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο A τις x_1, x_2 με $0<x_1<\frac{\pi}{4}<x_2<\frac{\pi}{2}$

Γ4) Η f συνεχής στο A, άρα συνεχής και στα $[x_1,\frac{\pi}{4}]$ και $[\frac{\pi}{4},x_2]$

Η f παρ/μη στο A άρα και στα $(x_1,\frac{\pi}{4})$ και $(\frac{\pi}{4},x_2)$ οπότε από Θ.Μ.Τ υπάρχουν: $\xi_1\in(x_1,\pi/4)$ τ.ω. $f'(\xi_1)=\frac{f(\pi/4)-f(x_1)}{\frac{\pi}{4}-x_1}$

$\overset{(Γ2)(Γ3)}{\iff} (\frac{\pi}{4}-x_1)f'(\xi_1)=1-2025 \iff \boxed{(\frac{\pi}{4}-x_1)f'(\xi_1)=-2024}$ (2)

και $\xi_2\in(\frac{\pi}{4}-x_2)$ τ.ω. $f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(\pi/4)}{x_2-\pi/4}=\frac{f(\frac{\pi}{4})-f(x_2)}{\frac{\pi}{4}-x_2}$

$\overset{(Γ2)(Γ3)}{\iff} (\frac{\pi}{4}-x_2)f'(\xi_2)=1-2025 \iff \boxed{(\frac{\pi}{4}-x_2)f'(\xi_2)=-2024}$ (3)

Από (2), (3) έχουμε ότι $\boxed{f'(\xi_1)(\frac{\pi}{4}-x_1)=f'(\xi_2)(\frac{\pi}{4}-x_2)}$

(Γ5) Η F παραγουσα της f στο $A=(0,\frac{\pi}{2})$ αρα

$F'(x)=f(x)\ \forall x\in A$

F παρ/μη στο A αρα και συνεχης στο A, οποτε συνεχης και στο $\pi/4$, οποτε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} F(x)=F(\frac{\pi}{4}) \overset{υποθ}{\iff} F(\pi/4)=0$

Η εφαπτομενη της C_f στο σημειο με τετμημενη $x_0=\pi/4$ εχει εξισωση ε: $y-\cancel{F(\pi/4)}^{0}=F'(\pi/4)(x-\pi/4)=f(\pi/4)(x-\pi/4)$

$\underline{\underline{f(\pi/4)=1}}$ $x-\pi/4$

Για καθε $x\in A$ εχουμε $2(F(x)-x)+\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}-2\eta\mu x$

$\iff F(x)-x+\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\eta\mu x \iff [F(x)-(x-\pi/4)]+[\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}]=0$ (4)

Παρατηρουμε οτι η $x=\pi/4$ ειναι λυση της (4) διοτι

$\cancel{F(\pi/4)}^{0}-(\cancel{\frac{\pi}{4}}-\cancel{\frac{\pi}{4}})+\eta\mu\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

• Αν $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ τοτε $x<\frac{\pi}{4} \overset{\eta\mu x\uparrow A}{\iff} \eta\mu x<\eta\mu\pi/4 \iff \eta\mu x-\eta\mu\pi/4<0$ (5)

$f\downarrow(0,\pi/4]$ και $F'=f$ αρα $F'\downarrow(0,\pi/4]$ οποτε $F\frown(0,\pi/4]$ οποτε η C_F βρισκεται κατω απο την εφαπτομενη (ε) με εξαιρεση το σημειο επαφης $(\frac{\pi}{4},0)$ αρα $F(x)\le x-\frac{\pi}{4}\ \forall x\in(0,\frac{\pi}{4}]$ με την ισοτητα μονο για $x=\pi/4$, οποτε για καθε $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ ισχυει $F(x)<x-\pi/4$

$\iff F(x)-(x-\pi/4)<0$ (6)

(5)+(6) $\Rightarrow [F(x)-(x-\frac{\pi}{4})]+[\eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}]<0$ για καθε $x\in(0,\pi/4)$ συνεπως η (4) ειναι αδυνατη στο $(0,\frac{\pi}{4})$

• Αν $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ τοτε $x>\frac{\pi}{4} \overset{\eta\mu x\uparrow A}{\iff} \eta\mu x>\eta\mu\frac{\pi}{4} \iff \eta\mu x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$ (7)

$f\uparrow[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ και $F'=f$ αρα $F'\uparrow[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ οποτε $F\smile[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ συνεπως η C_F βρισκεται πανω απο την εφαπτομενη (ε) με εξαιρεση το σημειο επαφης $(\frac{\pi}{4},0)$, οποτε $F(x)\ge x-\pi/4\ \forall x\in[\frac{\pi}{4},\pi/2)$ με την ισοτητα μονο για $x=\pi/4$, αρα για καθε $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ ισχυει

$F(x)>x-\pi/4 \iff F(x)-(x-\pi/4)>0$ (8)

(7)+(8) $\Rightarrow F(x)-(x-\pi/4)>0\ \forall x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ συνεπως η (4) ειναι αδυνατη στο $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$. Επομενως η εξισωση (4) εχει μοναδικη λυση την $x=\pi/4$.

Θέμα Δ

Δ1) $f(x)=(x-2)(e^{x-2}-a),\ x\in\mathbb{R}$

Είναι $x_0=\int_0^1 \frac{2x}{e^{-x}}\,dx=\int_0^1 2xe^{x}\,dx=\int_0^1 2x(e^{x})'\,dx$

$=[2xe^{x}]_0^1-\int_0^1 (2x)'e^{x}\,dx=2e-\int_0^1 2e^{x}\,dx=2e-[2e^{x}]_0^1$

$=2e-(2e-2e^{0})=\cancel{2e}-\cancel{2e}+2=2$, άρα $\boxed{x_0=2}$

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών και παρ/μη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παρ/μων με $f'(x)=e^{x-2}-a+(x-2)e^{x-2},\ x\in\mathbb{R}$

Αφού η f παρ/μη στο $\mathbb{R}$ και το $x_0=2$ κρίσιμο σημείο τότε

$f'(2)=0 \iff e^{0}-a+(2-2)e^{0} \iff \boxed{a=1}$

Δ2) $f'(x)=(x-2)e^{x-2}+e^{x-2}-1=e^{x-2}(x-1)-1$

$=e^{x-2}(x-1-e^{2-x}),\ x\in\mathbb{R}$

Θεωρούμε $\varphi(x)=x-1-e^{2-x},\ x\in\mathbb{R}$

Η φ συνεχής και παρ/μη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x)=1+e^{2-x}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

άρα η $\varphi\uparrow\mathbb{R}$ και επειδή $\varphi(2)=0$ η ρίζα $x=2$ μοναδική της $\varphi(x)=0$ στο $\mathbb{R}$

$f'(x)=0 \iff e^{x-2}\varphi(x)=0 \overset{e^{x-2}\neq 0}{\iff} \varphi(x)=0 \iff x=2$

$f'(x)>0 \iff e^{x-2}\varphi(x)>0 \overset{e^{x-2}>0}{\iff} \varphi(x)>0 \iff \varphi(x)>\varphi(2) \overset{\varphi\uparrow}{\iff} x>2$

$f'(x)<0 \iff e^{x-2}\varphi(x)<0 \overset{e^{x-2}>0}{\iff} \varphi(x)<0 \iff \varphi(x)<\varphi(2) \overset{\varphi\uparrow}{\iff} x<2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f'(x)<0\ \forall x\in(-\infty,2)$ και f συνεχής στο $(-\infty,2]$, οπότε $f\downarrow(-\infty,2]$

$f'(x)>0\ \forall x\in(2,+\infty)$ και f συνεχής στο $[2,+\infty)$, οπότε $f\uparrow[2,+\infty)$

Η f στη θέση $x=2$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(2)=0$

Δ3) Η f' συνεχής και παρ/μη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παρ/μων με $f''(x)=e^{x-2}(x-1)+e^{x-2}=e^{x-2}\cdot x,\ x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

$f''(x)=0 \Longleftrightarrow e^{x-2}x=0 \overset{e^{x-2}>0}{\Longleftrightarrow} x=0$

$f''(x)>0 \Longleftrightarrow xe^{x-2}>0 \overset{e^{x-2}>0}{\Longleftrightarrow} x>0$

$f''(x)<0 \Longleftrightarrow \dots \Longleftrightarrow x<0$

$f''(x)<0\ \forall x\in(-\infty,0)$ και f συνεχής στο $(-\infty,0]$ οπότε $\underline{\underline{f \frown (-\infty,0]}}$

$f''(x)>0\ \forall x\in(0,+\infty)$ και f συνεχής στο $[0,+\infty)$ οπότε

$\underline{\underline{f \smile [0,+\infty)}}$

$f''(2)=0$ και η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 2, οπότε το $A(0,f(0))$ ή $A(0,-2(e^{-2}-1))$ Σ.Κ.

Δ4) Τη χρονική στιγμή t είναι $x=x(t)$ και $y=(x-2)(e^{x-2}-1)$

άρα $y(t)=(x(t)-2)(e^{x(t)-2}-1)$, $t\geq 0$

οπότε $y'(t)=x'(t)(e^{x(t)-2}-1)+(x(t)-2)x'(t)e^{x(t)-2}$

$=x'(t)\left[e^{x(t)-2}-1+(x(t)-2)e^{x(t)-2}\right]$, $t\geq 0$ (1)

Έστω t_0 η χρονική στιγμή όπου το Μ περνάει από το $x_0=2$

οπότε $x(t_0)=2$ και από υπόθεση $x'(t_0)=-2$

Για $t=t_0$ η (1) δίνει $y'(t_0)=x'(t_0)\left[e^{x(t_0)-2}-1+(x(t_0)-2)e^{x(t_0)-2}\right]$

$=-2\cdot 0=0$ μον./sec

Δ5) α) Η g συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα των συνεχών $f(x)$ και $x-4$, οπότε g συνεχής και στο $[2,4]$

$g(2)=\cancel{f(2)}+2-4=-2<0$ και $g(4)=f(4)+\cancel{4}-\cancel{4}=2(e^2-1)>0$

άρα $g(2)\cdot g(4)<0$ οπότε από Θ.Bolzano υπάρχει $x_1\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε $g(x_1)=0$

Η g παρ/μη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)+1$, $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)>0\ \forall x\in(2,+\infty)$ άρα $f'(x)+1>0\ \forall x\in(2,+\infty) \Rightarrow g'(x)>0$

για κάθε $x\in(2,+\infty)$ και g συνεχής στο $[2,+\infty)$ οπότε $g\uparrow[2,+\infty)$

άρα η ρίζα x_1 μοναδική της $g(x)=0$ στο $(2,4)$

β) $I=\int_{x_1}^{4}[f^{-1}(4-y)-y]dy$

Θετουμε $f^{-1}(4-y)=u$ (4) $\Rightarrow 4-y=f(u) \Rightarrow -dy=f'(u)du$

$\Rightarrow dy=-f'(u)du$

για $y=x_1$ η (4) δινει $u=f^{-1}(4-x_1)=f^{-1}(f(x_1))=x_1$

για $y=4$ η (4) δινει $u=f^{-1}(0)=f^{-1}(f(2))=2$

οποτε $I=-\int_{x_1}^{2}(u+f(u)-4)f'(u)du$

$=\int_{2}^{x_1}(u-4+f(u))f'(u)du=\int_{2}^{x_1}(x-4+f(x))f'(x)dx$

$=\int_{2}^{x_1}g(x)f'(x)dx=[g(x)f(x)]_2^{x_1}-\int_{2}^{x_1}g'(x)f(x)dx$

$=\cancel{g(x_1)}^{0}f(x_1)-g(2)\cancel{f(2)}^{0}-\int_{2}^{x_1}(f'(x)+1)f(x)dx$

$=-\int_{2}^{x_1}f'(x)f(x)dx-\int_{2}^{x_1}f(x)dx=-\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_2^{x_1}-\int_{2}^{x_1}f(x)dx$

$-\frac{f^2(x_1)}{2}+\cancel{\frac{f^2(2)}{2}}^{0}-\int_{2}^{x_1}f(x)dx=-\frac{f^2(x_1)}{2}-\int_{2}^{x_1}f(x)dx$

αρα $I<0$ διοτι $f^2(x_1)=(4-x_1)^2>0$ αφου $x_1<4$

οποτε $-\frac{f^2(x_1)}{2}<0$

Απο (Δ2) Για καθε $x\in\mathbb{R}$ ισχυει $f(x)\geq f(2)=0$ με την ισοτητα μονο για $x=2$, αρα

$\left.\begin{array}{l} f(x)\geq 0 \ \forall x\in[2,x_1] \\ f \text{ συνεχης στο } [2,x_1] \\ \text{Η ισοτητα ισχυει μονο για } x=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{2}^{x_1}f(x)dx>0$

$\Rightarrow -\int_{2}^{x_1}f(x)dx<0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_{x_1}^{4} f^{-1}(4-y)-y\right]g(x)dx\Big)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)\int_{x_1}^{4}\left(f^{-1}(4-y)-y\right)dy\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)I\right)=I\lim_{x\to+\infty}g(x)\overset{I<0}{=\!=}-\infty$$

αφού $\lim_{x\to+\infty}(x-4)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-2)\left(e^{x-2}-1\right)\right]\underset{u_0=\lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty}{\overset{x-2=u}{=\!=}}\lim_{u\to+\infty}\left[u\left(e^{u}-1\right)\right]$$

$$\overset{(+\infty)(+\infty)}{=\!=}+\infty$$