ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ | 2025

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν ασύμπτωτες.

β) Αν το $\mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε υποχρεωτικά θα ισχύει $f''(x_0) = 0$.

γ) Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι πάντοτε θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.

δ) Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, είναι σταθερή συνάρτηση.

ε) Μία συνάρτηση f είναι $1-1$ αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = 1 - \sqrt{x},\ x \geq 0 \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 2+3

Β2. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ (σύνθεση της g με την f).

Μονάδες 5

- Για τα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι:

$$h(x) = 1 - \sqrt{x^2 - 1}\,, \quad \text{με } x \in (-\infty,\, -1] \cup [1,\, +\infty)\,.$$

B3. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις ασύμπτωτες της C_h.

Μονάδες 5

B4. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ εφάπτεται στη C_f.

Μονάδες 5

B5. Να αποδείξετε ότι η C_h έχει με την ευθεία (ε) του ερωτήματος (B4), ένα, τουλάχιστον, κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1,\, 2)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & ,\ \text{αν } x \le 1 \\ \dfrac{ln\left(\alpha x^2 - 2x + 2\right)}{x - 1} & ,\ \text{αν } x > 1 \end{cases} \quad ,\ \text{όπου } \alpha,\, \beta \in \mathbb{R},\ \text{με } \alpha > 0.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $a = 1$ και $\beta = -1$.

Μονάδες 6

- Για $a = 1$ και $\beta = -1$:

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}\big(1,\, f(1)\big)$ με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5+2

- Δίνεται, επιπλέον, η συνάρτηση $g : (0,\, 1] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$g(x) = f(x)\, ln\, x\,, \quad \text{για κάθε } x \in (0,\, 1]\,.$$

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = \frac{1}{e}$.

Μονάδες 6

Γ4. Για κάθε $k \in (0,\, 1)$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) \cdot \text{ημ}\dfrac{1}{g(x)}}{\left[g(k) - g(k^2)\right] \cdot (\text{ημ}x - x)}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα εξής:

- $x f'(x) - f(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$, για κάθε $x > 0$ και
- $\displaystyle\int_1^2 \left[f(x) + (x-2)\cdot f'(x)\right] dx = -\frac{1}{2}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = x\, ln\, x - \dfrac{x^2}{2}$, $x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 5

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(e^{x^2-1}\right) = f\left(x^2\right)$$

Μονάδες 5

Δ3. Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης της C_f. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της καμπύλης στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ να είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$\left(x_0^2 - 3x_0 + 2\right)\left[\, ln(ex_0) - x_0\right] = \left(3 - 2x_0\right)\left(ln\, x_0^{x_0} - \frac{x_0^2}{2}\right)$$

Μονάδες 5

Δ5. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$ και x_0 αυτό που αναφέρεται στο ερώτημα $(\Delta 4)$, να αποδείξετε ότι:

$$F(x_0) - F(1) < (x_0 - 1)\left[f(x_0) - \frac{(x_0-1)\, f'(x_0)}{2}\right]$$

Μονάδες 5