

# ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

## ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΤΡΙΤΗ 22 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

Μονάδες 7

**A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ) του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

**A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 4

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**β.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

**γ.** Αν  $f, g$  δυο συναρτήσεις και ορίζονται οι συναρτήσεις  $\varphi = f \circ g$  και  $\omega = g \circ f$ , τότε οι  $\varphi$  και  $\omega$  είναι υποχρεωτικά ίσες.

**δ.** Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**ε.** Ισχύει  $(\ln|x|)' = -\frac{1}{x}$  για κάθε  $x < 0$ .

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$g(x)=\ln x, x>0 \text{ και } h(x)=e-\frac{1}{x}, x>0.$$

**B1.** Να οριστεί η συνάρτηση  $f=g \circ h$ .

Μονάδες 6

**B2.** Αν  $f(x)=(g \circ h)(x)=\ln(e-\frac{1}{x}), x>\frac{1}{e}$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται (μονάδες 2) και να βρεθεί η αντίστροφη της. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

**B3.** Αν  $\varphi(x)=f^{-1}(x) = \frac{1}{e-e^x}, x < 1$ , τότε :

i. να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης  $\varphi$ .

Μονάδες 6

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$ex + \frac{1}{\varphi(x)} = 0$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(-1,0)$ .

Μονάδες 6



## ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} xe^x + \ln \lambda & , x < 0 \\ 2\eta\mu x - x + \lambda - 1 & , 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lambda > 0$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$ .

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε  $\lambda = 1$

**Γ2.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης  $f$ .

Μονάδες 6

**Γ3.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

**Γ4.** Να δείξετε ότι :

$$\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2} dx > \frac{-3}{2e}$$

Μονάδες 4

**Γ5.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = -1$  και  $x = \frac{\pi}{3}$ .

Μονάδες 5

## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Να λύσετε την εξίσωση :

$$\ln x = \frac{e}{x}, x > 0$$

Μονάδες 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x - e)\ln x - x, x > 0$

**Δ2.** Να δείξετε ότι  $f(x) \geq -e$ , για κάθε  $x > 0$

Μονάδες 6

**Δ3.** Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  που είναι παράλληλη με την ευθεία

$$\eta: y = -e \cdot x$$

Μονάδες 4

**Δ4.** Να λυθεί η εξίσωση :

$$f(e \cdot x) + f(x) + e \cdot x = -1$$

Μονάδες 6

**Δ5.** Για κάθε  $x > 0$ , να δείξετε ότι :

$$f(e^x + 1) + f(x) > f(e^x) + f(x + 1)$$

Μονάδες 5

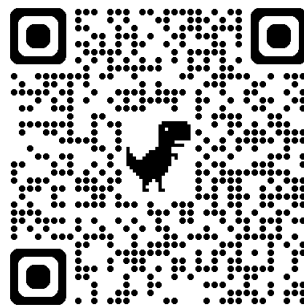
### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι ΔΕΝ επιτρέπεται.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
3. Διάρκεια εξέτασης : τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**Σας Ευχόμαστε Καλή Επιτυχία!**

**Θεματοδότης : κ. Ι. Σαλαμάνης, μαθηματικός 3<sup>ου</sup> ΓΕΛ Γιαννιτσών.**

Ενδεικτικές Λύσεις στα Γ και Δ : κ. Ιορδάνης Κοσόγλου, μαθηματικός ΓΕΛ Αριδαίας. Σκανάρετε το QR



**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

