



1_Διαγώνισμα_2025
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A₁. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

Τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

(Μονάδες 7)

A₂. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

A₃. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

A₄. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει ένα κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

(Μονάδες 2)

β. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

(Μονάδες 2)

γ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

(Μονάδες 2)



Ασκησόπολις

ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle .

(Μονάδες 2)

ε. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = 0$ τότε

$f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 2 \\ e^{x-2} + \mu, & x > 2 \end{cases}$, με $\mu \in \mathbb{R}$.

B₁. Να βρείτε την μικρότερη τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι «1-1»

(Μονάδες 7)

Αν $\mu = 3$ τότε:

B₂. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 4 \\ \ln(x-3)+2, & x > 4 \end{cases}$.

(Μονάδες 6)

B₃. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 23 - 4x$ για $x > 4$ έχει ακριβώς μια λύση $x = x_0$ με $x_0 \in (5, 6)$.

(Μονάδες 7)

B₄. Για τη λύση x_0 του ερωτήματος **B₃** να αποδείξετε ότι ισχύει:

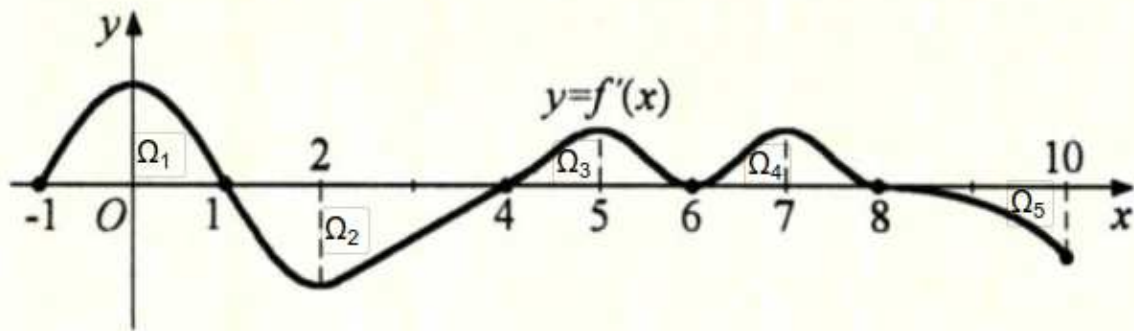
$$5 < f(23 - 4x_0) < 6$$

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ Γ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1,10]$



Γ₁. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη, και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων, και σημείων καμπής, καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων.

(Μονάδες 6)

Γ₂. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{f'(x)}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x+5}{f'(x)}$

Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

(Μονάδες (2+2))

Γ₃. Αν $E(\Omega_1)=12$, $E(\Omega_2)=14$, $E(\Omega_3)=7$, $E(\Omega_4)=6$, $E(\Omega_5)=5$.

i. Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{10} f'(x) dx$.

(Μονάδες 2)



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f' τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=10$.

(Μονάδες 2)

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (6,8)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y=3x+2025$.

(Μονάδες 5)

Γ₄. Αν $f(8)=22$ να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να

υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^9 \left(\frac{f(x)}{\int_0^9 |f(u)| du} \right) dx$

(Μονάδες 3+3)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} για την οποία ισχύει: $(e^x + 1)f'(x) = e^x(1 - f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον αν είναι γνωστό ότι $f(0) = \frac{1}{2}$.

Δ₁. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

Δ₂. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν).



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

(Μονάδες 4)

Δ₃. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f(2025^x) + f'(2026^x) < f(2026^x) + f'(2025^x)$$

(Μονάδες 6)

Δ₄. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f με την διχοτόμο του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου των αξόνων έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο $M(x_0, x_0)$ με $x_0 \in (0,1)$.

(Μονάδες 4)

Δ₅. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = x_0$ είναι $(x_0 - \ln(2x_0))$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 5)