Επαναληπτικά Διαγωνίσματα
στα Μαθηματικά προσανατολισμού
της Γ΄ Λυκείου
από το Askisopolis
2024 - 2025

Αντώνης Βαλέργας — Γαβρήλος Ελευθερίου
Αποστόλης Κακαβάς — Στέλιος Μιχαήλογλου
Άγγελος Μπλιάς — Θανάσης Νικολόπουλος
Δημήτρης Πατσιμάς — Βαγγέλης Ραμαντάνης
Νίκος Σαμπάνης — Βαγγέλης Τόλης
Νίκος Τούντας — Ισαάκ Χιονίδης

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Μαθηματικά προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου
17ο Διαγώνισμα

10-5-2025

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι

$$f'(x_0)=0$$

7 Μονάδες

Α2. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α ;

4 Μονάδες

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν για δύο συναρτήσεις f και g ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$ τότε δεν είναι υποχρεωτικά ίσες ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

1+3 Μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β) Αν για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων f, g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\cdot g(x)=0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Μία πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού δεν έχει ασύμπτωτες.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, ισχύει $|\eta\mu x|<|x|$.

ε) Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in D_f$ ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\gamma^\alpha f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$

10 Μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,\alpha)\cup(\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{\alpha x+\pi}{x-\alpha}$ και η συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=x-2\sqrt{x}+1$.

Β1. Αν η οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ είναι η $y=e$, να δείξετε ότι $\alpha=e$.

3 Μονάδες

Για $\alpha=e$:

Β2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες .

5 Μονάδες

Β3. i. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $w=f\circ f$.*(4 μονάδες)*

ii. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις w και $h=g\circ g$ είναι ίσες. Αν δεν είναι ίσες, τότε να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο είναι ίσες .*(5 μονάδες)*

9 Μονάδες

Β4. i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(e,+\infty)$. *(4 μονάδες)*

ii. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=\eta\mu\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$ έχει λύση στο διάστημα $(e,+\infty)$. *(4 μονάδες)*

8 Μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}+\int_1^e f(x)dx+\dfrac{2}{e}-1$.

Γ1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x^2}dx$.

3 Μονάδες

Γ2. Να βρείτε τον τύπο της f.

6 Μονάδες

Αν $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x^2}$:

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και στη συνέχεια να δείξετε ότι : $x^{2e}\le e^{x^2}$.

6 Μονάδες

Γ4.Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{e}$ έχει μοναδική θετική ρίζα.

4 Μονάδες

Γ5. Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

6 Μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{e^{3x}}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ1.Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

3 Μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $e^{2x_0}-2025=2025e^{-x_0}$.

5 Μονάδες

Δ3. Έστω F αρχική της f με F(0) = 0.Να αποδείξετε ότι

α) $2F\left(x\right)\ge x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

6 Μονάδες

β) η εξίσωση $x\left(2F\left(x\right)-x\right)-1+x=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0, 1).

6 Μονάδες

γ) $F\left(x_0\right)<2025x_0$, όπου x_0 η ρίζα του Δ2.

5 Μονάδες

Καλή τύχη!