6ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια Διαγωνίσματος: Θανάσης Κοπάδης

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c$$

όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c$$

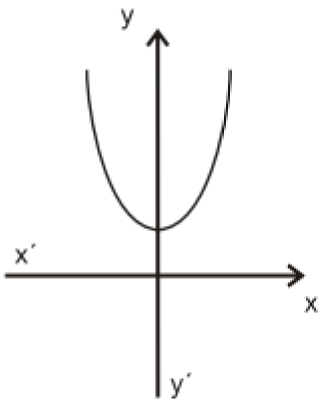
με $c\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

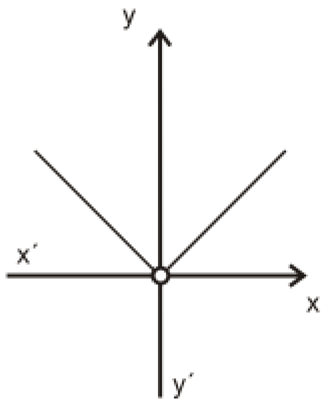
Α2. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 4

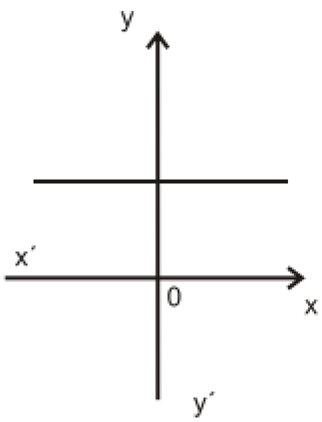
Α3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T



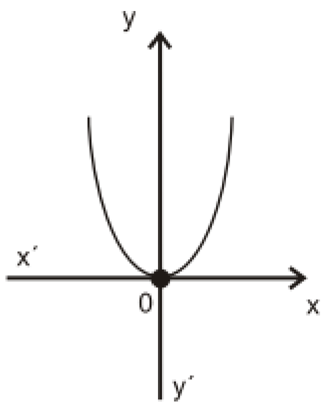
(f)



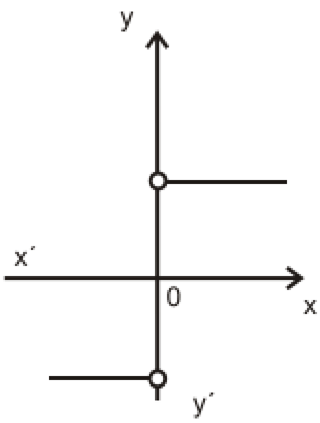
(g)



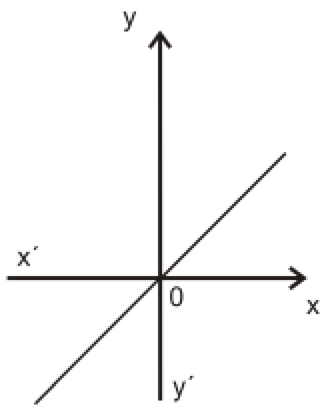
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\alpha)-G(\beta)$

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x

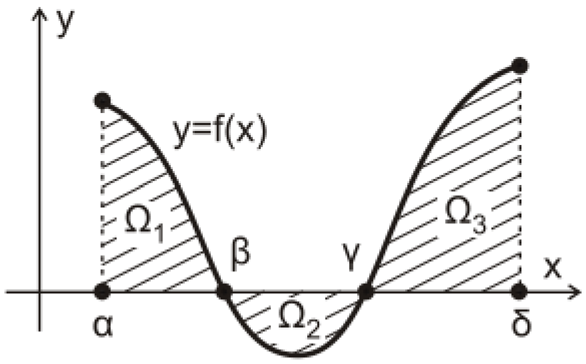
γ) Για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha,\beta]$ ισχύει:

$$\text{αν } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0, \text{ τότε } f(x)>0 \text{ στο } [\alpha,\beta]$$

δ) Αν ένα σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $\mathrm{M}'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}

Μονάδες 8

Α5. Έστω η συνάρτηση f του παρακάτω σχήματος:



Αν για το εμβαδόν των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι $\mathrm{E}(\Omega_1)=2$, $\mathrm{E}(\Omega_2)=1$ και $\mathrm{E}(\Omega_3)=3$, τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$ είναι ίσο με:

α) 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$, $x\in\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0=2$ ίσο με -1.

Β1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Αν $\alpha=-4$ και $\beta=3$, τότε:

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-2}$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία Α,Β στα οποία η C_f τέμνει τον άξονα των x.

Μονάδες 6

Β4. Αν Γ είναι το σημείο τομής των παραπάνω εφαπτομένων, τότε να αποδείξετε ότι η C_f χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\dfrac{2}{1}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, $f(1)=e$ και τέτοια, ώστε να ισχύει $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & ,\ x\neq 0\\ 1 & ,\ x=0\end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (2 μονάδες)

β) η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ (5 μονάδες)

Μονάδες 7

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την εφαπτομένη της στο σημείο $\mathrm{M}\left(1, f\left(1\right)\right)$ και την ευθεία $x = 0$

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = +\infty$ (3 μονάδες) και στη συνέχεια να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(f(x)+1\right)}{x^2 + 2024}$ (3 μονάδες)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \left(0, +\infty\right) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f\left(x\right) = \dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της f^{-1}

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right) > 2^{f(x)} - 1$ για κάθε $x > 0$

Μονάδες 6

Έστω επιπλέον F μια παράγουσα της f στο διάστημα $\left(0, +\infty\right)$ με $F\left(e\right) = e \cdot \ln 2$

Δ3. Να αποδείξετε ότι $F\left(1\right) > \ln 2$

Μονάδες 6

Δ4. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$, τότε να αποδείξετε ότι $E < e - 1 + \ln \dfrac{2^{e^2+1}}{\left(e+1\right)^{e+1}}$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους / τις εξεταζόμενες)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί μ ε το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.

4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης:

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!