

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 2 ΜΑΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών και να το αποδείξετε.

Μονάδες 3+4=7

A2. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$ όπου f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 τότε τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 ;

Μονάδες 3

A3. Αν $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση, τότε ποια η γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| > |x|$

β) Αν μια συνάρτηση f παραγωγίζεται στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(\beta) < f(\alpha)$ τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 0$

γ) Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A είναι $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

δ) Κάθε συνεχής συνάρτηση f σ' ένα διάστημα Δ παίρνει στο Δ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m

ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

τέτοιοι ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$ τότε υποχρεωτικά $\alpha=\beta$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ και $g(x)=\ln x$, $x > 0$

B1. Να βρείτε τη σύνθεση $h = fog$

Μονάδες 5

Έστω $h(x)=\sqrt{-1+\ln x}$, $x \geq e$

B2. i) Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται.

Μονάδες 3

ii) Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση h υπάρχει διάστημα $[a, \beta]$ με $e \leq a < \beta$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 3

B3. Να βρείτε την αντίστροφη της h

Μονάδες 6

Έστω $h^{-1}(x)=e^{x^2+1}$, $x \geq 0$

B4. Να δείξετε ότι $h^{-1}(x) > x > h(x)$ για κάθε $x \geq e$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{6}{3+x^2}$

Γ1. i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

ii) Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ τέτοια ώστε
 $f(\alpha) + f(\beta) = \ln 4$

Μονάδες 4

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη και να σχεδιασθεί η C_f

Μονάδες 6

Γ3. Δύο κορυφές ενός ορθογωνίου βρίσκονται στον άξονα $x'x$ και δύο στην C_f . Να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν του ορθογωνίου.

Μονάδες 7

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-1}^1 xf(x)dx$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f μια παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση με $f(0) = 1$ και

$$f'(x) = \begin{cases} (x^2 + x)e^x, & x \leq 0 \\ -\eta\mu x & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Δ1 Να δείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} (x^2 - x + 1)e^x, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x & , \quad x > 0 \end{cases}$

Μονάδες 6

Δ2 Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $(-\infty, 0]$

Μονάδες 3

Δ3 Να δείξετε ότι η C_f τέμνεται απ' την οριζόντια ασύμπτωτη της στο $-\infty$ σε άπειρα σημεία τα οποία και να προσδιορίσετε.

Μονάδες 6

Δ4 Να δείξετε ότι:

i) η ευθεία $y = -x$ τέμνει την C_f σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-2, -1)$

Μονάδες 6

ii) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απ' την C_f την ευθεία $y = -x$ και τον άξονα των y υπερβαίνει το $\frac{1}{2}$

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

- 1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου σας να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή.
Στην αρχή των απαντήσεων σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.**
- 2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.**
- 3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.**
- 4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.**
- 5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.**
- 6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.**

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ