

7^η ΔΙΑΛΥΚΕΙΑΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ

‘Θεόδωρος Φυλακτός’

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΔΥΤΙΚΗΣ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ
ΤΕΤΑΡΤΗ 30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2025**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης Τιμής (μονάδες 3) και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά (μονάδες 2).

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

γ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

δ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A .

ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$, $x > 0$ και $g(x) = \ln(x + 2)$, $x > -2$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = fog$.

Μονάδες 5

B2. Έστω $h(x) = \frac{x+2}{x+1}$, $x > -1$.

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 3)

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h . (Μονάδες 4)

Μονάδες 7

B3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της h^{-1} .

Μονάδες 7

B4. Αν $h^{-1}(x) = \frac{x-2}{1-x}$, με $x > 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h^{-1}(x) + \frac{g(x)}{x-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ.

Έστω η συνεχής συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} \beta - 2\eta\mu x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 2 + \alpha\sqrt{x+1}, & 0 < x \leq 8 \end{cases}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η

εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(3, f(3))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: x + 2y = 2025$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 0$ (μονάδες 4) και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(3, f(3))$ (μονάδα 1).

Μονάδες 5

Γ2. i) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f , τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f , καθώς και το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 5)

ii) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 1 + \text{συν} \lambda$, $\lambda \in [0, 2\pi)$, για τις διάφορες τιμές του λ . (Μονάδες 3)

Μονάδες 8

ΑΡΧΗ 3^{ης} ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h με $h(x) = x \cdot f(x^2)$, $x \in [0, 2\sqrt{2}]$, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \sqrt{3}$.

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται το σημείο $\Sigma(5, 2)$.

i) Να βρείτε το σημείο $M(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \in (0, 8]$, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το Σ . (Μονάδες 4)

ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $M\Sigma$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο M . (Μονάδες 2)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{e^x}{x+1} - \ln(x+1)$.

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή. (Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική θέση ακροτάτου, στο x_0 , το οποίο ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$ και να βρείτε το είδος του ακροτάτου. (Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ2. i) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 1 - x$, για κάθε $x > 0$. (Μονάδες 3)

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \frac{f(x)}{x^2 - x} dx < -\ln 2$. (Μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln f(x)}{f(x) - f(x_0)}$.

Μονάδες 4

Δ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $\varphi: (-1, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(x) = F(2-x) - F(x)$, όπου F μια παράγουσα της f στο $(-1, 3)$.

ΑΡΧΗ 4^{ης} ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f «διαπερνά» την καμπύλη.

(Μονάδες 3)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = (\ln 4 - e) \cdot (x - 1)$.

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε διορθωτικό (blanco), χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά την διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : ενενήντα (90΄) λεπτά μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ