Απαντήσεις και Μοριοδότηση

Θεμάτων

Μαθηματικών Προσανατολισμού

7ης Διαλυκειακής Γραπτής Δοκιμασίας

''Θεόδωρος Φυλακτός''

Γ' Τάξης Ημερησίων Γενικών Λυκείων

Δυτικής Θεσ/νίκης 2025

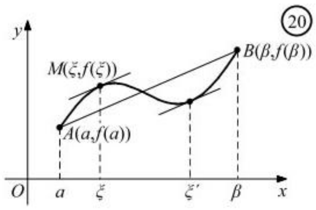
- **Την επιμέλεια των θεμάτων και των λύσεων είχαν οι μαθηματικοί:**

Ασκητά Μελίνα	**4ο ΓΕΛ Ευόσμου**
Μανάρας Νικόλαος	**Πειραματικό ΓΕΛ Παν. Μακεδονίας**
Μπαρούτης Δημήτριος	**3ο ΓΕΛ Σταυρούπολης**
Πρωτιβιώτης Ηλίας	**4ο ΓΕΛ Ευόσμου**
Ρωσσίδης Ιωσήφ	**1ο ΓΕΛ Ευόσμου**
Χατζημανώλης Νικόλαος	**1ο ΓΕΛ Νεάπολης**

- **Υπό την εποπτεία των Σ.Ε. Μαθηματικών Δυτικής Θεσσαλονίκης**

Βενάρδου Παντελή **και** **Τσαμπούκα Πετρούλας**

ΘΕΜΑ Α

Α1 [7Μ]	Για $x \neq x_o$, έχουμε	1
	$f(x) - f(x_o) = \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\cdot(x-x_o)$,	1
	Οπότε $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)-f(x_o)\right)=\lim\limits_{x\to x_o}\left[\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\cdot(x-x_o)\right]$	1
	$=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\cdot\lim\limits_{x\to x_o}(x-x_o)$	1
	$= f'(x_o)\cdot 0 = 0$	1
	αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o.	1
	Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_o.	1
Α2 [3Μ]	Η ευθεία y = λx + β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$, αν $\lim\limits_{x\to x_o}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$	3
Α3 [5Μ]	Αν μια συνάρτηση f είναι: • συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ • παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.	3
	Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$.  	2
Α4 [10Μ]	α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Σ	

ΘΕΜΑ Β

Β1. [5Μ]	α) Είναι: $D_{fog}=\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\}=\{x>-2 \,/\, \ln(x+2)>0\}$ (1 μον)	1
	$=\{x>-2 \,/\, x>-1\}=(-1,+\infty)$. (1+1 μον.)	2
	Και, $h(x)=f\left(g(x)\right)=\dfrac{e^{\ln(x+2)}}{e^{\ln(x+2)}-1}=\dfrac{x+2}{x+1}$, $x>-1$.	2
Β2. [7Μ]	i) Η h είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$ ως ρητή και παραγωγίσιμη με $h'(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$	2
	Είναι: $h'(x)<0$ για κάθε x>-1, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα.	1
	ii) Είναι $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left[\dfrac{1}{x+1}(x+2)\right]=+\infty$ Αφού $x+1>0$, $\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)=0$ και $\lim\limits_{x\to -1^+}(x+2)=1>0$ Άρα η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h	2
	<u>1ος τρόπος :</u> $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, άρα λ = 0 $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$, άρα β = 1 Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$. <u>2ος τρόπος:</u> Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x+2}{x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x}\right]=1$ Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.	2
Β3. [7Μ]	Η h ως γνησίως φθίνουσα στο $(-1,+\infty)$ είναι και 1 – 1, άρα και αντιστρέψιμη.	1
	Είναι $D_{h^{-1}}=h((-1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),\lim\limits_{x\to-1^+}h(x)\right)=(1,+\infty)$	2
	Ακόμη, $h(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{x+2}{x+1}=y\Leftrightarrow x+2=xy+y\Leftrightarrow x-yx=y-2\Leftrightarrow$. $\Leftrightarrow x(1-y)=y-2\Leftrightarrow x=\dfrac{y-2}{1-y}$	3
	Άρα $h^{-1}(x)=\dfrac{x-2}{1-x}$, $x\in(1,+\infty)$	1

B4 **[6M]**	Στο διάστημα $(1,2)$ η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $h^{-1}(x)+\dfrac{g(x)}{x-2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{1-x}+\dfrac{\ln(x+2)}{x-2}=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(1-x)\ln(x+2)=0$	2
	Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=(x-2)^2+(1-x)\ln(x+2),\ \ x\in[1,2]$.	1
	Η φ συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων,	1
	$\varphi(1)=1>0$ και φ(2) = - ln4 < 0 Άρα, $\varphi(1)\cdot\varphi(2)<0$,	1
	οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano,η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.	1

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1 **[5Μ]**	Για x∈(0, 8) η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{\alpha}{2\sqrt{x+1}}$. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο Α έχει κλίση $f'(3)=\dfrac{\alpha}{4}$.	1
	Τότε ε//ζ ⇔ f΄(3) = λ_ζ ⇔ $\dfrac{\alpha}{4}=-\dfrac{1}{2}$ ⇔ α = – 2.	1
	Αφού η f είναι συνεχής, θα είναι συνεχής και στο 0, οπότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$	1
	⇔ β = 2 + α ⇒ β = 0	1
	Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α(3, f(3)) είναι ε: y – f(3) = f΄(3)(x – 3) ⇔ $y+2=-\dfrac{1}{2}(x-3)$ ⇔ $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}-2$ ⇔ $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{2}$ ⇔ $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$	1
Γ2 (i) **[5Μ]**	$f(x)=\begin{cases}-2\eta\mu x, & -\pi\le x\le 0\\ 2-2\sqrt{x+1}, & 0<x\le 8\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2\eta\mu x}{x}=-2\cdot 1=-2$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2-2\sqrt{x+1}}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-1}{\sqrt{x+1}}=-1$ Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ όποτε η δεν είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο της 0. Άρα x = 0 κρίσιμο σημείο της f.	1
	Είναι $f'(x)=\begin{cases}-2\sigma\upsilon\nu x, & -\pi\le x<0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}, & 0<x\le 8\end{cases}$	2

Για x∈(-π, 0): f΄(x) = 0 ⇔ -2συνx = 0 ⇔ συνx = 0 ⇔ $x=-\frac{\pi}{2}$

Για x∈(0, 8): είναι f΄(x) ≠ 0.

Άρα $x=-\frac{\pi}{2}$ κρίσιμο σημείο της f.

Επομένως τα κρίσιμα σημεία της f στο [-π, 8] είναι τα 0 και $-\frac{\pi}{2}$.

Για x∈(-π, 0): Είναι f΄(x) > 0 στο $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ και f΄(x) < 0 στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

Για x∈(0, 8): είναι f΄(x) < 0.

x	-π		$-\frac{\pi}{2}$		0		8
f΄(x)		+	0	−	‖	−	
f(x)		↗		↘		↘	

Είναι f΄(x) > 0 στο $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ και συνεχής στο $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ άρα

f↑$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ οπότε $f(A_1)=\left[f(-\pi),f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=[0,2]$.

Είναι f΄(x) < 0 στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και στο (0, 8) και συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},8\right]$

άρα f↓$\left[-\frac{\pi}{2},8\right]$ οπότε $f(A_2)=\left[f(8),f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=[-4,2]$.

Άρα f(A) = f(A_1)∪ f(A_2) = [-4, 2]

Είναι f(-π) = 0 και f(8) = -4 άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x = -π το 0 και ολικό ελάχιστο στο x = 8 το – 4.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x = $-\frac{\pi}{2}$ το 2.

2

Γ2(ii) [3M]

Επειδή -1≤συνλ≤ 1 ⇔ -1 + 1 ≤ συνλ + 1 ≤ 1 + 1 ⇔ 0 ≤ συνλ + 1 ≤ 2

1

Αν 0 ≤ συνλ + 1 < 2 ⇔ 0 < λ < 2π τότε

- συνλ + 1∈$f(A_1)=\left[f(-\pi),f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=[0,2]$ και f↑$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ άρα η εξίσωση f(x) = 1 + συνλ έχει μοναδική ρίζα στο $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$,
- συνλ + 1∈$f(A_2)=\left[f(8),f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=[-4,2]$ και f↓$\left[-\frac{\pi}{2},8\right]$ άρα η εξίσωση f(x) = 1 + συνλ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(-\frac{\pi}{2},8\right]$.

Επομένως η εξίσωση f(x) = 1+συνλ έχει 2 ακριβώς ρίζες στο [-π, 8]

1

Αν λ = 0 είναι συνλ + 1 = 2 = f_{max} οπότε η εξίσωση γίνεται f(x) = 2 και έχει μοναδική ρίζα την $x=-\frac{\pi}{2}$.

1

<table>
<tr><td rowspan="4">Γ3
[6Μ]</td><td>Για $x\in[0,\ 2\sqrt{2}]$ είναι $0 \le x \le 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 8 \overset{f\downarrow[0,8]}{\Leftrightarrow} f(0) \ge f(x^2) \ge f(8)$ $\Leftrightarrow 0 \ge f(x^2) \ge -4$ άρα $f(x^2) \le 0$ στο [0, 8]. Οπότε για $x\in[0,\ \sqrt{3}]$ είναι $x f(x^2) \le 0$.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$E(\Omega) = \int_0^{\sqrt{3}} \left|xf(x^2)\right| dx = \int_0^{\sqrt{3}} -xf(x^2)dx =$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Θέτω $u = x^2$, άρα $du = 2\cdot x\cdot dx$ και αν $x = 0$ τότε $u = 0$ και αν $x = \sqrt{3}$ τότε $u = 3$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$= \int_0^3 -\frac{1}{2}f(u)du = \int_0^3 -\frac{1}{2}[2(1-\sqrt{u+1})]du = \int_0^3 (\sqrt{u+1}-1)du =$
$\int_0^3 (u+1)^{\frac{1}{2}}du - \int_0^3 1du = \frac{2}{3}\left[(u+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - [u]_0^3 =$
$\frac{2}{3}\left(\sqrt{(3+1)^3} - \sqrt{(0+1)^3}\right) - (3-0) = \frac{2}{3}(8-1) - 3 = \frac{14}{3} - \frac{9}{3} = \frac{5}{3}$ τ.μ.</td><td>2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">Γ4 (i)
[4Μ]</td><td>Η απόσταση του τυχαίου σημείου $M(x, f(x))$ της C_f από το σημείο $\Sigma(5,\ 2)$ εκφράζεται από την παράσταση – συνάρτηση $d(x) = \sqrt{(x-5)^2 + (f(x)-2)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (-2\sqrt{x+1})^2} = \sqrt{(x-5)^2 + 4(x+1)}$
$= \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 4x + 4} \Leftrightarrow d(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 29}$, $x\in(0,\ 8]$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$d'(x) = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+29}} = \frac{2(x-3)}{2\sqrt{x^2-6x+29}} = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+29}}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$d'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$
$d'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3$
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>3</td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td>d΄(x)</td><td>‖</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>d(x)</td><td>‖</td><td>↘</td><td></td><td>↗</td><td></td></tr>
</table>
Ο.Ε.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Για x = 3 η απόσταση γίνεται ελάχιστη και το σημείο της C_f που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο Σ είναι το $A(3,\ f(3)) \Leftrightarrow A(3,\ -2)$</td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Γ4(ii)
[2Μ]</td><td>$\lambda_{A\Sigma} = \frac{2+2}{5-3} = 2$ και $\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{1}{2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Άρα $\lambda_{A\Sigma} \cdot \lambda_{\varepsilon\varphi} = -1$, όποτε $A\Sigma \perp \varepsilon$.</td><td>1</td></tr>
</table>

ΘΕΜΑ Δ

<table>
<tr><td rowspan="7">Δ1
[8M]</td><td>i) f συνεχής στο $(-1,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{(e^x)'(x+1)-e^x(x+1)'}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)'$ =
$\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}\cdot 1$ = $\frac{xe^x+e^x-e^x}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}$ = $\frac{xe^x}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$f''(x)=\frac{(xe^x)'(x+1)^2-xe^x[(x+1)^2]'}{(x+1)^4}-\frac{-1\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}$ =
$\frac{(e^x+xe^x)(x+1)^2-xe^x2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4}+\frac{1}{(x+1)^2}$ =
$\frac{(x+1)\left[e^x(x+1)(x+1)-2xe^x\right]}{(x+1)^4}+\frac{1}{(x+1)^2}$ =
$\frac{e^x\left(x^2+x+x+1-2x\right)}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^2}$ = $\frac{e^x\left(x^2+1\right)}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$f''(x)=\frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^2}>0$ για x > -1 άρα f κυρτή στο $(-1,+\infty)$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>ii) Η $f'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}$ είναι συνεχής στο [0, 1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
$f'(0)=-1<0$ και $f'(1)=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}=\frac{e-2}{4}>0$ άρα $f'(0)\cdot f'(1)<0$
οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Όμως $f'\uparrow$ στο (-1, +∞) αφού f κυρτή στο (-1, +∞) οπότε υπάρχει μοναδικό x_0 στο (-1, +∞) τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Για $x>x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x)>0$

Για $-1<x<x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x)<0$

<table><tr><td>x</td><td>-1</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>+∞</td></tr><tr><td>f΄(x)</td><td>‖</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>f(x)</td><td>‖</td><td>↘</td><td></td><td>↗</td><td></td></tr></table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>Επομένως η f παρουσιάζει για $x = x_0$ ελάχιστο το $f(x_0)$.</td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Δ2 i
[3M]</td><td>i) <u>1ος τρόπος:</u>
Θεωρώ t(x) = f(x) + x – 1 που είναι συνεχής στο [0, +∞) και
t΄(x) = f΄(x) + 1 > 0 για x > 0 άρα t ↑ στο [0, +∞) αφού
$f'\uparrow$ στο (-1, +∞) αφού f κυρτή στο (-1, +∞)
$x>0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>-1 \Leftrightarrow f'(x)+1>0$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Επομένως $x>0 \overset{t\uparrow}{\Leftrightarrow} t(x)>t(0) \Leftrightarrow f(x)+x-1>f(0)+0-1 \Leftrightarrow$
$f(x)+x-1>1-1 \Leftrightarrow f(x)+x-1>0 \Leftrightarrow f(x)>1-x$</td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="5"></td><td>i) <u>2ος τρόπος:</u>
Ισχύει $e^x \ge x + 1$ για κάθε x∈ ℝ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0.
Άρα για x > 0 είναι $e^x > x+1 \overset{x+1>0}{\Leftrightarrow} \frac{e^x}{x+1} > \frac{x+1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x+1} > 1$ (1)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Και lnx ≤ x – 1 για κάθε x > 0 και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 1.
Θέτω όπου x το x + 1 άρα ln(x + 1) ≤ x +1 – 1 για κάθε x + 1> 0 και η ισότητα ισχύει μόνο για x + 1= 1, δηλαδή ισχύει ln(x + 1) ≤ x για κάθε x > - 1 και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0.
Οπότε για x > 0 ισχύει ln(x + 1) < x ⇔ - ln(x + 1) > - x (2)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Επομένως για x > 0 (1) + (2) ⇒ $\frac{e^x}{x+1} - \ln(x+1) > 1 - x$ ⇔ f(x) > 1 – x</td><td>1</td></tr>
<tr><td>i) <u>3ος τρόπος:</u>
Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α(0, 1) είναι ε: y – f(0) = f΄(0)(x – 0) ⇔ y – 1 = -1(x – 0) ⇔ y = - x +1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Η f είναι κυρτή στο (-1, + ∞) άρα η C_f θα βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της εφαπτομένης ε για κάθε x > -1 με εξαίρεση το σημείο επαφής Α(0, 1) για το οποίο ισχύει η ισότητα.
Άρα f(x) ≥ - x + 1 για κάθε x > -1 και η ισότητα ισχύει μόνο για x= 0.
Επομένως f(x) > 1 – x για κάθε x > 0.</td><td>2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">Δ2 ii
[4Μ]</td><td>ii) $x^2 – x = 0 \Leftrightarrow x(x – 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή x = 1.
<table><tr><td>x</td><td>-∞   0   1   +∞</td></tr><tr><td>$x^2 – x$</td><td>+   0   −   0   +</td></tr></table>Άρα $x^2 – x < 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right] \subseteq (0,1)$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Οπότε για κάθε $x \in \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right]$ είναι f(x) > 1 – x ⇔ $\frac{f(x)}{x^2 - x} < \frac{1-x}{x^2-x}$ ⇔ $\frac{f(x)}{x^2-x} < \frac{-(x-1)}{x(x-1)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2-x} < -\frac{1}{x}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Για $x \in \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right]$ οι συναρτήσεις $\frac{f(x)}{x^2-x}$ και $\frac{1}{x}$ είναι συνεχείς(πσο) άρα
$\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \frac{f(x)}{x^2-x}dx < \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} -\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \frac{f(x)}{x^2-x}dx < \left[-\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \frac{f(x)}{x^2-x}dx < -\ln\frac{2}{e} + \ln\frac{1}{e}$
$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \frac{f(x)}{x^2-x}dx < -\ln 2 + \ln e + \ln 1 - \ln e \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \frac{f(x)}{x^2-x}dx < -\ln 2$</td><td>2</td></tr>
</table>

Δ3 [4M]	Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 άρα $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x > -1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_0$. Άρα $f(x) - f(x_0) > 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 και $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ οπότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$.	1
	Ισχύει $f(x) > 1 - x$ για κάθε $x > 0$, άρα $f(x_0) > 1 - x_0 > 0$ αφού $x_0 \in (0, 1)$ οπότε $f(x_0) > 0$. $x_0 > 0 \overset{f\downarrow(-1,x_0)}{\Leftrightarrow} f(x_0) < f(0) \Leftrightarrow f(x_0) < 1$ Άρα $0 < f(x_0) < 1$ οπότε $\ln f(x_0) < \ln 1 \Leftrightarrow \ln f(x_0) < 0$	2
	Επομένως $\lim_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{f(x)-f(x_0)} = \lim_{x\to x_0}\left[\ln f(x)\cdot\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\right] = -\infty$	1

Δ4 [6M]	i) Η φ είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (– 1 , 3) με $\varphi'(x) = F'(2-x)\cdot(2-x)' - F'(x) = -f(2-x) - f(x)$ και $\varphi''(x) = -f'(2-x)\cdot(2-x)' - f'(x) = f'(2-x) - f'(x)$	1
	$\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2-x) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2-x) = f'(x) \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} 2 - x = x \Leftrightarrow x = 1$ $\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) - f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) > f'(x) \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} 2 - x > x \Leftrightarrow x < 1$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -1 & & 1 & & 3 \\ \hline \varphi''(x) & \| & + & 0 & - & \| \\ \varphi(x) & \| & \cup & & \cap & \| \end{array}$	1
	Η φ είναι κυρτή στο (-1, 1] και κοίλη στο [1, 3) άρα το σημείο $K(1, \varphi(1)) \Leftrightarrow K(1, 0)$ είναι σημείο καμπής της C_φ άρα K(1, 0) μοναδικό σημείο της C_φ στο οποίο η εφαπτομένη της C_φ «διαπερνά» την καμπύλη.	1
	ii) Η εφαπτομένη της C_φ στο K(1, 0) είναι ε: $y - \varphi(1) = \varphi'(1)(x - 1)$ $\Leftrightarrow y - 0 = -2f(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -2\left(\frac{e}{2} - \ln 2\right)(x-1) \Leftrightarrow$ $y = (-e + 2\ln 2)(x-1) \Leftrightarrow y = (\ln 2^2 - e)\cdot(x-1) \Leftrightarrow y = (\ln 4 - e)(x - 1)$	1
	Η φ είναι κυρτή στο (-1, 1] οπότε ισχύει $\varphi(x) \ge (\ln 4 - e)\cdot(x - 1)$ για κάθε $x \in (-1, 1]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x= 1. Η φ είναι κοίλη στο [1, 3) οπότε οπότε $\varphi(x) \le (\ln 4 - e)\cdot(x - 1)$ για κάθε $x \in [1, 3)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x= 1.	1
	Άρα x = 1 μοναδική λύση της εξίσωσης $\varphi(x) = (\ln 4 - e)\cdot(x - 1)$.	1