Διαγώνισμα Μαθηματικά

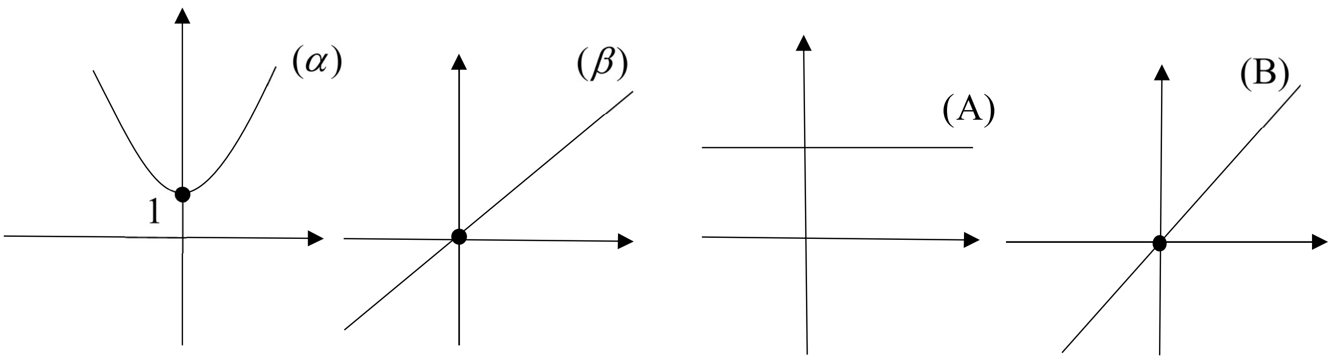
Γ' λυκείου **Νίκος Σούρμπης 7/5/25**

ΘΕΜΑ Α

Α1) Να αποδείξετε ότι $\left(\alpha^{x}\right)' = \alpha^{x}\ln\alpha$ **για** $x\in\mathbb{R}$ **και** $\alpha>0$

Α2) Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano

Α3) Να αντιστοιχίσετε καθεμία από τις συναρτήσεις α,β **σε εκείνη από τις** Α,Β **που είναι η παράγωγός της**



Α4) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, τη λέξη Σωστό , ή Λάθος

α) Αν $f\left(x_0\right)$ είναι τοπικό ακρότατο της παραγωγίσιμης f τότε υποχρεωτικά θα ισχύει $f'\left(x_0\right)=0$.

β) Αν ισχύει ότι $\int_{-1}^{2} f\left(x\right)dx>0$ τότε $f\left(x\right)>0$ για $x\in\left[-1,2\right]$.

γ) Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'\left(x\right)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, είναι σταθερή συνάρτηση.

δ) Ισχύει ότι $\left(x^{x}\right)'=x\cdot x^{x-1}$ για $x>0$.

ε) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2+x+1}{x^2+1}=\alpha$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+1,\ g(x)=\alpha x+2$ **για τις οποίες ισχύει ότι** $fog=gof$

Β1) Να δείξετε ότι $\alpha=1$

Β2) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f , f + 1 είναι ασύμπτωτες της συνάρτησης $h(x)=x+1+\dfrac{e^x}{e^x+1}$, Α=$\mathbb{R}$ στο $-\infty$ και $+\infty$ αντίστοιχα

Β3) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $\Phi(x)=h(x)-f(x)-1$ και να δείξετε ότι $|\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)|\leq|\beta-\alpha|$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Β4) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στη Φ, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-1+\ln(x+1)$ **με** $\mathrm{A}=(-1,+\infty)$

Γ1) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

Γ2) Να βρείτε το σημείο καμπής της f και την εφαπτομένη ευθεία σε αυτό

Γ3) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)-2\alpha}{x}-\frac{f(-\alpha)+2\alpha}{x-1}+\frac{2f^{-1}(\alpha)-\alpha}{x-2}=0$$

έχει ακριβώς δυο ρίζες στο διάστημα $(0,2)$ με $\alpha>0$

Γ4) Να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_0^{f(1)} f^{-1}(x)dx$

ΘΕΜΑ Δ

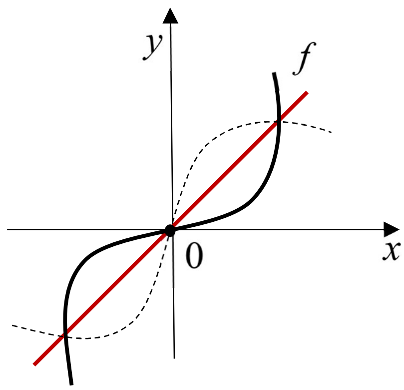
Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x)-x_0f(x_0)}{x-x_0}=(\nu+1)x_0^{\ \nu}$$ **για κάθε** $x, x_0\in\mathbb{R}$ **και** $\nu\in\mathbb{N}^*$

Δ1) Να δείξετε ότι $f(x)=x^{\nu}$, Α=$\mathbb{R}$

Δ2) Να δείξετε ότι $f(x+1)\geq 1+\nu x+\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}x^2$

για κάθε $x\geq 0$ και $\nu\geq 3$



Δ3) i) Να βρείτε την αντίστροφή της συνάρτησης f αν για το εμβαδόν χωρίου Ε ανάμεσα στην f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$ ισχύει ότι: $\text{E}=2^{1-\nu}$

ii) Να βρείτε $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ αν ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ότι

$$(\sigma\upsilon\nu\alpha)^{f(x)-\alpha}+(\eta\mu\alpha)^{-f(x)+\alpha}\geq 2$$

Κάθε Επιτυχία