

Μαθηματικά ομάδων Προβανατοληνοί
δεικτών βιδοιών & βιδοιών
Οικονομίας και Πληροφορικής
ιανελλαδικές εξετάσεις 2024 (ΓΕΛ)

δέματα και ενδεικτικές λύσεις

Εισημέλερα Πύσεων: Χρήστος Κ. Παΐγος

www.liveyourmaths.com/



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό ζ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \zeta$.

Μονάδες 6

A2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της f με τη g , δηλαδή η συνάρτηση $g \circ f$, ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

β) Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Ισχύει $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$.

δ) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.

- ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α, β]$. Αν $f(x) ≥ 0$ για κάθε $x ∈ [α, β]$, τότε $∫_α^β f(x) dx ≥ 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g: [1, +∞) → ℝ$ με τύπο

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

και $h: [1, +∞) → ℝ$ με τύπο

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

- B1.** Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1 \quad \text{και} \quad r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1.$$

- B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι $f^{-1} = f$ (μονάδες 5), όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f .

Μονάδες 7

- B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r .

Μονάδες 6

- B4.** Να λύσετε την εξίσωση $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + e^\lambda, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3 + \lambda, & x \geq 2, \end{cases}$$

με $\lambda \in ℝ$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

Μονάδες 6

Γ3. i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0,3]$.
(μονάδες 4)

ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Κινητό σημείο M ξεκινά από το σημείο $A(2,0)$ και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $v=0,5$ μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\hat{\omega} = \widehat{AOM}$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο M θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln x + \alpha x}{x},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0, +\infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, x_0 , η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Μονάδες 6

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

(μονάδες 3)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $2^x \leq x^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x = -\ln 2$ και $x = 0$, και περικλείεται από αυτές, τον άξονα $x'x$ και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

- 1.** Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Λύσεις Μαθηματικών Προσανατολισμού Πανελλαδικών Εξετάσεων ΓΕΛ 2024

Επιμέλεια λύσεων: Χρήστος Κ. Λοΐζος, Μαθηματικός

Επιμέλεια L^AT_EX: Χρήστος Κατσανδρός

4 Ιουνίου 2024

Θέμα Α

Ερώτημα Α1.

Θεωρία σχολικού βιβλίου (Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών), σελ. 76

Ερώτημα Α2.

Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 155

Ερώτημα Α3.

Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 216

Ερώτημα Α4.

- α) Σωστό
- β) Σωστό
- γ) Λάθος
- δ) Λάθος
- ε) Σωστό

Θέμα Β

Ερώτημα Β1.

Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (1)$$

με $D_g \equiv [1, +\infty)$ και η:

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

με $D_h \equiv [1, +\infty)$.

- Θα προσδιορίσουμε την:

$$f = \frac{g}{h} \quad (3)$$

Είναι: $D_f \equiv D_g \cap D_h - \{h(x) = 0\}$.

Όμως: $D_g \cap D_h \equiv [1, +\infty)$ και:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (4)$$

Συνεπώς:

$$D_f \equiv [1, +\infty) - \{1\} \quad (5)$$

δηλαδή:

$$D_f \equiv (1, +\infty) \quad (6)$$

Ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1} \quad (7)$$

Δηλαδή:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1 \quad (8)$$

- Θα προσδιορίσουμε την:

$$r = g \cdot h \quad (9)$$

Είναι: $D_r \equiv D_g \cap D_h \equiv [1, +\infty)$.

δηλαδή:

$$D_r \equiv [1, +\infty) \quad (10)$$

Ο τύπος της r είναι:

$$r(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x} \quad (11)$$

Δηλαδή:

$$r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1 \quad (12)$$

Ερώτημα Β2.

- Για να δείξουμε ότι η f αντιστρέφεται, αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνάρτηση «1-1».

1^{ος} τρόπος

Απόδειξη. Για τυχαία $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 - 1) = (x_1 - 1)(x_2 + 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1 x_2 + x_1 - x_2 - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι «1-1», άρα αντιστρέφεται.} \end{aligned} \quad (13)$$

■

2^{ος} τρόπος

Απόδειξη. Η f είναι ρητή και συνεχής. Επίσης, είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x-1 - (x+1)}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{-2}{(x-1)^2} < 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Δηλαδή $f'(x) < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, άρα από γνωστό θεώρημα είναι συνάρτηση «1-1».

■

- Θα δείξουμε εν συνεχεία ότι $f^{-1} = f$.

Απόδειξη. Θα βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της f , δηλαδή την f^{-1} .

Θέτουμε:

$$y = f(x) \quad (15)$$

οπότε:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y(x-1) = x+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow yx - y = x+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow yx - x = y+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y-1)x = y+1 \end{aligned} \quad (16)$$

- Αν $y = 1$, τότε η Εξίσωση (16) είναι αδύνατη, αφού $0x = 2$.

- Άρα $y \neq 1$ και έχουμε από την Εξίσωση (16) ότι:

$$x = \frac{y+1}{y-1} \quad (17)$$

Όμως:

$$\begin{aligned}
 x > 1 &\Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} - \frac{y-1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{y+1-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow y-1 > 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow y > 1
 \end{aligned} \tag{18}$$

Άρα:

$$x = \frac{y+1}{y-1} \text{ με } y > 1 \tag{19}$$

και:

$$y = f(x) \stackrel{f}{\Leftrightarrow}_{\langle 1-1 \rangle} f^{-1}(y) = x \tag{20}$$

Άρα:

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}, y > 1 \tag{21}$$

ή, ισοδύναμα:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1 \tag{22}$$

Τελικά, $D_f \equiv D_{f^{-1}}$ και $f(x) = f^{-1}(x)$. ■

Ερώτημα Β3.

Η συνάρτηση r είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$. Κατά συνέπεια, η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για την εύρεση της πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r , έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{23}$$

και:

$$\begin{aligned}
 \beta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (r(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{24}$$

Τελικά, η C_r δέχεται οριζόντια ασύμπτωτη, καθώς $x \rightarrow +\infty$, την ευθεία:

$$(\varepsilon) : y = x \tag{25}$$

Ερώτημα Β4.

Θα λύσουμε την εξίσωση:

$$(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x) \tag{26}$$

Για να ορίζεται η Εξίσωση (26), πρέπει:

$$x \in D_f \cap D_r \equiv (1, +\infty) \tag{27}$$

Με αυτή την προϋπόθεση, έχουμε:

$$y = f(x) \xleftrightarrow[\langle -1 \rangle]{f} f^{-1}(y) = x \tag{28}$$

Θέτουμε στη Σχέση (28) όπου y το $f(x)$ και έχουμε:

$$f^{-1}(f(x)) = x \tag{29}$$

Από τις Σχέσεις (26) και (29) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 (f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x) &\Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right), x > 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \stackrel{x>1>0}{\Leftrightarrow} \\
 &\Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2(x - 4) - (x - 4) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x - 4)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \text{ ή } x - 4 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow |x| = 1 \text{ ή } x = 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = -1 \\ \text{ή} \\ x = 1 \end{array} \right\} \text{ ή } x = 4
 \end{aligned} \tag{30}$$

Όμως, η Εξίσωση (26) ορίζεται μόνο εάν $x > 1$. Οπότε οι τιμές $x = -1$ και $x = 1$ απορρίπτονται.

Κατά συνέπεια, μοναδική λύση της Εξίσωσης (26) είναι η τιμή $x = 4$.

Θέμα Γ

Ερώτημα Γ1.

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + e^\lambda, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3 + \lambda, & x \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

Η άνωθεν συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, οπότε είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$.

Δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \quad (2)$$

Είναι:

•

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + 4 + e^\lambda) = -2 \cdot 2 + 4 + e^\lambda = e^\lambda \quad (3)$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 4x - 3 + \lambda) = -4 + 4 \cdot 2 - 3 + \lambda = 1 + \lambda = f(2) \quad (4)$$

Άρα, πρέπει $e^\lambda = 1 + \lambda$.

Όμως είναι γνωστό από θεωρία ότι $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει για $x = 0$, οπότε:

$$e^\lambda \geq \lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad (5)$$

που είναι και το ζητούμενο.

Ερώτημα Γ2.

Αναζητούμε τη μονοτονία της συνάρτησης f , για την οποία, από το **Ερώτημα Γ1**, αφού $\lambda = 0$, έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2 \end{cases} \quad (6)$$

2^{ος} τρόπος (με χρήση παραγώγων)

- Για $x \in (0, 2)$, η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = (-2x + 5)' = -2 < 0 \quad (12)$$

δηλαδή, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2)$.

- Για $x \in (2, +\infty)$, η f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = (-x^2 + 4x - 3)' = -2x + 4 = -2(x - 2) < 0 \quad (13)$$

αφού $x > 2$. Δηλαδή, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο 2, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$, από γνωστό θεώρημα.

Θα αναζητήσουμε τώρα τα ακρότατα της f . Η f ορίζεται στο $[0, +\infty)$ και, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα $[0, +\infty)$, παρουσιάζει μέγιστο (max) στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 5$, ως άκρο διαστήματος. Η f δεν έχει ελάχιστο.

x		0	2	$+\infty$
f'		—		—
f		↘		↘

Ερώτημα Γ3.

- ι) Θα εξετάσουμε αν η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0, 3]$.

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$, άρα και στο διάστημα $[0, 3]$.
- Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 3)$.
 - Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ ως πολυωνυμική.
 - Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ ως πολυωνυμική.
 - Θα εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα της f στο $x_0 = 2$. Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 5 - (-2^2 + 4 \cdot 2 - 3)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 4}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = \\ &= -2 \end{aligned} \tag{14}$$

και:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x^2 - 4x + 4)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x - 2)^2}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} [-(x - 2)] = \\ &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Άρα, $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2.

Συνεπώς, η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0, 3]$.

ii) Αν υπάρχει $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$, τότε, θα ισχύει:

$$\lambda_{\Delta E} = f'(\xi) \tag{16}$$

όπου $f'(\xi)$ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης.

Είναι:

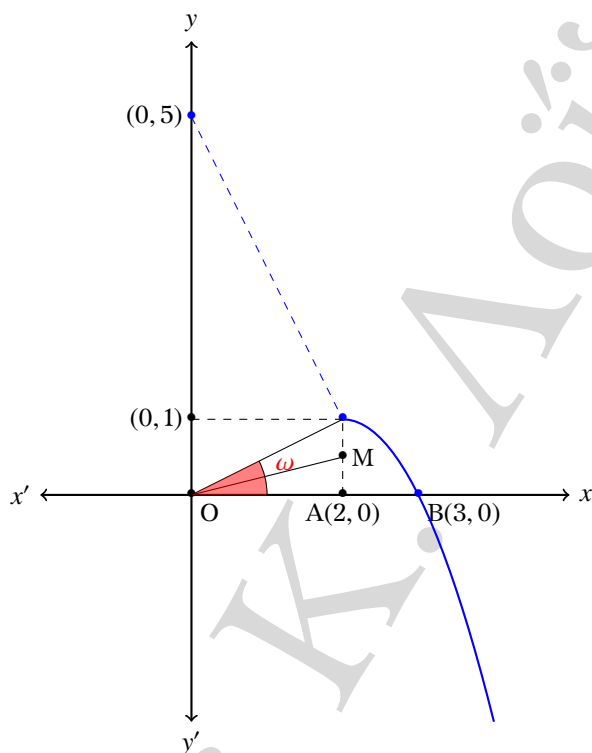
$$\lambda_{\Delta E} = \frac{y_E - y_{\Delta}}{x_E - x_{\Delta}} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{-3^2 + 4 \cdot 3 - 3 - 5}{3 - 0} = -\frac{5}{3} \tag{17}$$

- Αν $x \in [0, 2)$, τότε $f'(x) = -2$, άρα δεν υπάρχει $\xi \in [0, 2) \subseteq [0, 3]$ τέτοιο, ώστε $\lambda_{\Delta E} = f'(\xi)$.
- Αν $x \geq 2$, τότε $f'(x) = -2x + 4$, οπότε:

$$-2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \xi = \frac{17}{6} \in (0, 3) \tag{18}$$

Συνεπώς, υπάρχει $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \lambda_{\Delta E}$.

Ερώτημα Γ4.



Είναι $\epsilon\phi\omega = \frac{y}{2}$, αφού το M κινείται κατακόρυφα, και άρα:

$$\epsilon\phi(\omega(t)) = \frac{y(t)}{2} \quad (19)$$

αφού $\omega = \omega(t)$ συναρτήσει του χρόνου.

Επίσης:

$$y'(t) = v = 0,5 \text{ μον./δευτ.} \quad (20)$$

Κατά συνέπεια, παραγωγίζοντας τη Σχέση (19), έχουμε:

$$[\epsilon\phi(\omega(t))]' = \frac{y'(t)}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega(t))} \cdot \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2} \quad (21)$$

Τη χρονική στιγμή που το M (μεταβλητό) συναντήσει τη C_f , δηλαδή για $t = t_0$, έχουμε:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega(t_0))} \cdot \omega'(t_0) = \frac{y'(t_0)}{2} \quad (22)$$

Είναι:

$$\sin(\omega(t_0)) = \frac{2}{\sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin^2(\omega(t_0)) = \frac{4}{5} \quad (23)$$

Αντικαθιστώντας τη Σχέση (23) στη (22), έχουμε:

$$\frac{1}{\frac{4}{5}} \cdot \omega'(t_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega'(t_0) = \frac{1}{5} \text{ rad / δευτ.} \quad (24)$$

Θέμα Δ

Ερώτημα Δ1.

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\ln x + \alpha x}{x} \quad (1)$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln x + \alpha x}{x} \right)' = \\ &= \frac{(\ln x + \alpha x)' \cdot x - (\ln x + \alpha x) \cdot (x)'}{x^2} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{x} + \alpha\right)x - (\ln x + \alpha x)}{x^2} = \\ &= \frac{1 + \alpha x - \ln x - \alpha x}{x^2} = \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Βρίσκουμε τη μονοτονία της f :

•

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln x \Leftrightarrow \ln x = \ln e \stackrel{\text{«1-1»}}{\Leftrightarrow} x = e \quad (3)$$

•

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow \ln x < \ln e \stackrel{\text{γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} 0 < x < e \quad (4)$$

•

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow 1 < \ln x \Leftrightarrow \ln x > \ln e \stackrel{\text{γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x > e \quad (5)$$

Σχηματίζουμε πίνακα μεταβολών και έχουμε:

x		0	e	$+\infty$
f'			$+$	$-$
f			\nearrow	\searrow
			O.M.	

Συνεπώς, η f παρουσιάζει στη θέση $x = e$ μέγιστο (max), το:

$$f(e) = \frac{\ln e + \alpha \cdot e}{e} = \frac{1}{e} + \alpha \quad (6)$$

Δηλαδή:

$$f(x) \leq f(e), \text{ για κάθε } x > 0 \quad (7)$$

και αφού το σύνολο τιμών της f είναι το:

$$f((0, +\infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right] \quad (8)$$

θα έχουμε:

$$f(e) = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e} + \alpha = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha = 1 \quad (9)$$

Ερώτημα Δ2.

Ζητείται να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, x_0 , η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

• Είναι:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 1 - \ln 2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{-\ln 2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -2 \ln 2 + 1 = 1 - 2 \ln 2 \quad (10)$$

Αλλά:

$$4 > e \stackrel{\substack{\text{ln} \\ \text{γν. αύξουσα}}}{\Leftrightarrow} \ln 4 > \ln e \Leftrightarrow \ln 2^2 > 1 \Leftrightarrow 2 \ln 2 > 1 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln 2 < 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \quad (11)$$

• Είναι:

$$f(1) = \frac{\ln 1 + 1}{1} = \frac{0 + 1}{1} = 1 > 0 \quad (12)$$

Τελικά, είναι:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0 \quad (13)$$

και άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Στο $(0, e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Για το $[e, +\infty)$ έχουμε:

$$f([e, +\infty)) \stackrel{\substack{f \text{ συνεχής στο } [e, +\infty) \\ f \text{ γν. φθίνουσα}}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right] \quad (14)$$

• Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + x}{x} \stackrel{\substack{(\frac{+\infty}{+\infty}) \\ \text{(DLH)}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x + x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 0 + 1 = 1 \quad (15)$$

• Είναι $f(e) = \frac{1}{e} + 1$ από το **Ερώτημα Δ1**.

Οπότε:

$$f([e, +\infty)) \equiv \left(1, \frac{1}{e} + 1 \right] \quad (16)$$

όμως,

$$0 \notin \left(1, \frac{1}{e} + 1 \right] \quad (17)$$

οπότε η f δεν έχει ρίζα στο $[e, +\infty)$.

Τελικά, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$. ■

Ερώτημα Δ3.

ι) Ζητείται να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

Απόδειξη. Είναι:

$$f(x) = f(4) \Leftrightarrow \frac{\ln x + x}{x} = \frac{\ln 4 + 4}{4} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} + 1 = \frac{\ln 4}{4} + 1 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4} \quad (18)$$

Πράγματι, η Εξίσωση (18) έχει προφανή λύση τη $x = 2$, αφού:

$$\frac{\ln 4}{4} = \frac{2 \ln 2}{2^2} = \frac{\ln 2}{2} \quad (19)$$

Όμως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e]$, συνεπώς το $x = 2$ είναι μοναδική ρίζα.

Ομοίως, το $x = 4$ είναι προφανής ρίζα, αφού από την Εξίσωση (18) έχουμε:

$$\frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 4}{4} \quad (20)$$

και στο διάστημα $(e, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα, η ρίζα είναι μοναδική.

Τελικά, η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $x = 2$ και $x = 4$. ■

ii) Θα λύσουμε την ανίσωση $2^x \leq x^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 2^x \leq x^2 &\stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln 2^x \leq \ln x^2 \Leftrightarrow \\
 &\stackrel{\text{ln γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x \ln 2 \leq 2 \ln x \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \geq \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} + 1 \geq \frac{\ln 2}{2} + 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow f(x) \geq f(2)
 \end{aligned} \tag{21}$$

- Αν $x \in (0, e]$, η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$$f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow 2 \leq x \leq e \tag{22}$$

- Αν $x \in [e, +\infty)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε:

$$f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow f(x) \geq f(4) \Leftrightarrow e \leq x \leq 4 \tag{23}$$

Από τις Σχέσεις (22) και (23), έχουμε ότι οι τιμές $2 \leq x \leq 4$ είναι οι ζητούμενες λύσεις της ανίσωσης $2^x \leq x^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Ερώτημα Δ4.

Έχουμε:

$$g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} \tag{24}$$

με $D_g \equiv \mathbb{R}$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned}
 E(\Omega) &= \int_{-\ln(2)}^0 |g(x)| dx = \\
 &= \int_{-\ln(2)}^0 \left| f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} \right| dx = \\
 &= \int_{-\ln(2)}^0 |f(e^x)| \cdot \frac{|1-x|}{e^x} dx
 \end{aligned} \tag{25}$$

Όμως, αφού, $x \in [-\ln 2, 0]$, είναι:

$$x < 1 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \quad (26)$$

Κατά συνέπεια, το ολοκλήρωμα της Σχέσης (25) γίνεται:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{-\ln(2)}^0 |f(e^x)| \cdot \frac{1-x}{e^x} dx = \\ &= \int_{-\ln(2)}^0 |f(e^x)| \cdot \frac{1-x}{e^{2x}} \cdot e^x dx \text{ (πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με } e^x \text{)} \end{aligned} \quad (27)$$

Θέτουμε $e^x = u > 0 \Rightarrow x = \ln u$.

- Όταν $x = -\ln 2$, είναι:

$$x = -\ln 2 \Leftrightarrow -\ln 2 = \ln u \Leftrightarrow \ln u = \ln 2^{-1} \Leftrightarrow \ln u = \ln \frac{1}{2} \stackrel{\ln}{\Leftrightarrow} u = \frac{1}{2} \quad (28)$$

- Όταν $x = 0$, είναι:

$$x = 0 \Leftrightarrow \ln u = 0 \Leftrightarrow \ln u = \ln 1 \stackrel{\ln}{\Leftrightarrow} u = 1 \quad (29)$$

Αλλάζουμε το διαφορικό ως εξής:

$$du = e^x dx \quad (30)$$

Τελικά, η Σχέση (27) γίνεται:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(u)| \cdot \frac{1 - \ln u}{u^2} du = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(u)| \cdot f'(u) du \end{aligned} \quad (31)$$

αφού $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x}$, από το **Ερώτημα Δ1**.

Από το **Ερώτημα Δ2**, γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{1}{2} < x_0 < 1 \quad (32)$$

με $f(x_0) = 0$.

Συνεπώς:

- Για $x < x_0$, είναι:

$$x < x_0 \stackrel{\substack{f \text{ γν. αύξουσα} \\ \text{στο } (0,e]}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_0) \stackrel{\substack{f(x_0)=0 \\ x_0 \text{ ρίζα}}}{\Leftrightarrow} f(x) < 0 \Rightarrow |f(x)| = -f(x) \quad (33)$$

- Για $x > x_0$, είναι:

$$x > x_0 \stackrel{\substack{f \text{ γν. αύξουσα} \\ \text{στο } (0,e]}}{\iff} f(x) > f(x_0) \stackrel{\substack{f(x_0)=0 \\ x_0 \text{ ριζα}}}{\iff} f(x) > 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x) \quad (34)$$

Ως εκ τούτου, το ολοκλήρωμα της Σχέσης (31) γίνεται:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(u)| \cdot f'(u) du = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(u) \cdot f'(u) du + \int_{x_0}^1 f(u) \cdot f'(u) du \quad \begin{array}{l} \text{αντικαθιστούμε} \\ \text{u με x} \end{array} \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(x) \cdot f'(x) dx + \int_{x_0}^1 f(x) \cdot f'(x) dx = \\ &= - \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(x) \cdot f'(x) dx + \int_{x_0}^1 f(x) \cdot f'(x) dx = \\ &= - \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]_{x_0}^1 = \\ &= -\frac{1}{2} \left(f^2(x_0) - f^2\left(\frac{1}{2}\right) \right) + \frac{1}{2} \left(f^2(1) - f^2(x_0) \right) \stackrel{f(x_0)=0}{=} \\ &= -\frac{1}{2} \left(-f^2\left(\frac{1}{2}\right) \right) + \frac{1}{2} f^2(1) = \\ &= \frac{1}{2} f^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f^2(1) = \\ &= \frac{1}{2} (1 - 2 \ln 2)^2 + \frac{1}{2} 1^2 = \\ &= \frac{(1 - 2 \ln 2)^2 + 1}{2} \text{ τ.μ.} \quad (35) \end{aligned}$$

Τελικά, είναι:

$$E(\Omega) = \frac{(1 - 2 \ln 2)^2 + 1}{2} \text{ τ.μ.} \quad (36)$$