

ΝΤΟΥΛΑΣ Κ.

4/7/2025

**2ο ΘΕΜΑ (έως 1-1)**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = 2 + (x-1)^4, x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Με την βοήθεια του ορισμού να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[1, +\infty)$ .

**(4 μονάδες)**

**β)** Να βρείτε τη σχετική θέση του διαγράμματος της  $f$  με την παραβολή

$$y = 4 - (x-1)^2, x \in \mathbb{R}.$$

**(6 μονάδες)**

Θεωρούμε επιπλέον συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , γνησίως μονότονη,

ώστε να ισχύει  $f(1+g(1)) + f(g(2)) = 4$ .

**(γ)** Να δείξετε ότι

**(i)**  $g(1) = 0$ ,  $g(2) = 1$  και να συμπεράνετε το είδος μονοτονίας της  $g$ .

**(4 μονάδες)**

**(ii)**  $(f \circ g)(3) > 2$ .

**(4 μονάδες)**

**δ)** Να λύσετε την εξίσωση  $2 + g\left(x^2 - x + 2^{x^2+x-3} - 2^{2x-1}\right) = (f \circ g)(1)$ .

**(7 μονάδες)**