ΣΗΜΕΙΑΚΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΜΙΑ ΝΕΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Νίκος Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, Βέροια

e-mail: iossifid@yahoo.gr

Η εργασία αυτή (ένα μέρος της) παρουσιάστηκε για 1η φορά στο 31ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικών που διοργανώθηκε στη Βέροια την 7-11-14.
Στα πρακτικά του Συνεδρίου βρίσκεται στις σελίδες 381-387.
Εδώ παρουσιάζουμε μια βελτιωμένη και επαυξημένη έκδοσή της.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ – ΣΚΟΠΟΣ

Στην εργασία αυτή εισάγεται μια νέα έννοια **"ΣΗΜΕΙΑΚΗ ΠΡΑΞΗ" (συντομ. Σ.Π).** Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να "αλγεβρικοποιήσει" ορισμένες αποδεικτικές διαδικασίες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Θα παρουσιάσουμε εδώ τα δύο πρώτα κεφάλαια της εργασίας. Θα στηριχτούμε σε δύο μόνο ιδιότητες των Σ.Π.

Στο 1ο κεφάλαιο δείχνουμε πως μπορούμε να δημιουργήσουμε και ταυτόχρονα να αποδείξουμε με πολύ σύντομο τρόπο απειρία γεωμετρικών προτάσεων. Για τον σκοπό αυτό το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να γράψουμε στην τύχη μισή γραμμή και να την ερμηνεύσουμε γεωμετρικά. Η γεωμετρική ερμηνεία είναι μια πολύ απλή διαδικασία. Με ελάχιστες γνώσεις από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ο καθένας μπορεί χωρίς σκέψη, χωρίς δυσκολία, χωρίς βοηθητικές γραμμές σ' ένα σχήμα, σε ελάχιστο χρόνο να δημιουργήσει και ταυτόχρονα να αποδείξει μια γεωμετρική πρόταση.
Οι προτάσεις που δημιουργούνται με αυτήν την διαδικασία μπορεί να είναι γνωστές μπορεί όμως να είναι νέες. Κάποιες μπορεί να είναι προφανείς, κάποιες να αποδεικνύονται εύκολα, κάποιες όμως μπορεί να αποδεικνύονται δύσκολα με την κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία.
Στο κεφάλαιο αυτό δείχνουμε εύκολες εφαρμογές για την κατανόηση της διαδικασίας.

Στο $2^{ο}$ κεφάλαιο δείχνουμε πως αποδεικνύονται συγκεκριμένες προτάσεις. Οι προτάσεις που επιλέξαμε εδώ αποδεικνύονται δύσκολα ή πολύ δύσκολα με την κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία. Με χρήση μόνο των δύο ιδιοτήτων των Σ.Π οι αποδείξεις αυτών των δύσκολων προτάσεων δεν υπερβαίνουν τις 2 γραμμές.
Εκτός των παραπάνω, οι Σ.Π έχουν και τα εξής πρόσθετα πλεονεκτήματα:
Χωρίς καμιά δυσκολία και σε ελάχιστο χρόνο μπορούν να γενικεύσουν αποδειχθείσες γεωμετρικές προτάσεις. Αυτό γίνεται ενδεικτικά στα παραδείγματα 1, 15, 16, 20 και 21.
Επίσης, από την απόδειξη μιας πρότασης μπορούν να δημιουργήσουν σε ελάχιστο χρόνο χωρίς καμιά δυσκολία νέες προτάσεις σχετικές με την αποδειχθείσα πρόταση. Αυτό γίνεται ενδεικτικά στα παραδείγματα 14 και 21.
Ένα άλλο βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου που περιγράφουμε είναι το ότι όλες οι αποδείξεις που ακολουθούν είναι ανεξάρτητες της θέσης των διαφόρων σημείων πάνω στο επίπεδο με αποτέλεσμα να ισχύουν γενικότερα και όχι μόνο στην περίπτωση του εκάστοτε σχήματος.
Έτσι μπορούμε να δημιουργήσουμε διάφορες ειδικές περιπτώσεις (πορίσματα), οι οποίες με την κλασική Ευκλείδεια γεωμετρία θα χρειάζονταν ξεχωριστή απόδειξη για την κάθε περίπτωση διαφορετικού σχήματος. Αυτό γίνεται ενδεικτικά στα παραδείγματα 16 και 18.

Στα επόμενα, θα θεωρούμε ότι όλα τα υπάρχοντα σημεία ανήκουν στο ίδιο επίπεδο Π και αυτό δε θα αναφέρεται.

Για την ταύτιση δύο σημείων $A \equiv B$ θα χρησιμοποιούμε τον πιο απλό συμβολισμό $A = B$ και θα διαβάζουμε Α ίσον Β.

Οι γωνίες θα θεωρούνται θετικά προσανατολισμένες και αυτό δεν θα αναφέρεται στα επόμενα.

Ως μονάδα μέτρησης των γωνιών θα χρησιμοποιήσουμε τη μοίρα.

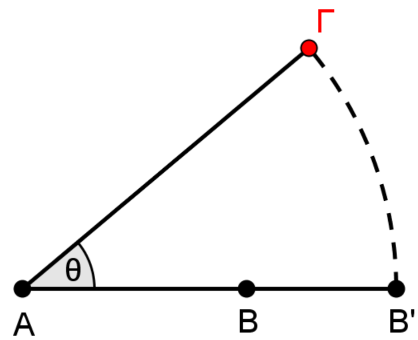
Ορισμός Σημειακής Πράξης (Σ.Π)

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\theta \in [0^o, 360^o)$.

Ονομάζουμε **Σημειακή Πράξη (λ, θ)** στο Π την απεικόνιση f: Π Χ Π → Π με την οποία η εικόνα του ζεύγους (Α , Β) ∈ Π Χ Π είναι το σημείο Γ του Π το οποίο ορίζεται ως εξής:

Έστω Β′ το ομοιόθετο του Β με κέντρο το Α και λόγο λ (λ > 0 ή λ < 0 ή λ = 0), δηλ. $\overrightarrow{AB'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$.

Τότε το σημείο Γ είναι η στροφή του Β′ με κέντρο το Α και γωνία στροφής θ.



Δηλαδή μια Σ.Π είναι σύνθεση δύο σημειακών μετασχηματισμών. Μιας ομοιοθεσίας και μιας στροφής.
Μια τέτοια πράξη θα συμβολίζεται με o ή *.
Γράφουμε δηλαδή ΑoΒ = Γ όπου o = (λ, θ).
Αντί να λέμε ότι η εικόνα του ζεύγους (Α , Β) είναι το σημείο Γ, λέμε επίσης πιο απλά ότι η εικόνα του Β με κέντρο το Α και Σ.Π την o είναι το σημείο Γ.

Είναι φανερό ότι:

- Η εικόνα του ζεύγους (Α, Β) είναι η ίδια και αν αντιστραφεί η σειρά των μετασχηματισμών (δηλ. εφαρμοστεί πρώτα η στροφή και κατόπιν η ομοιοθεσία).

- Αν θ = 0, η πράξη (λ, θ) = (λ, 0) είναι η ομοιοθεσία με κέντρο Α και λόγο λ και η εικόνα ΑoΒ είναι το ομοιόθετο του Β με κέντρο Α και λόγο λ, δηλ. είναι το σημείο Β′.

- Αν λ = 1, η πράξη (λ, θ) = (1, θ) είναι στροφή και η εικόνα ΑoΒ είναι η στροφή του Β γύρω από το Α κατά γωνία θ.

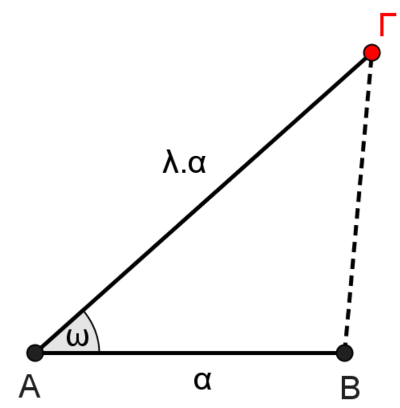
Δηλαδή η ομοιοθεσία και η στροφή είναι ειδικές περιπτώσεις Σ.Π.

- Ισχύει προφανώς **ΑoΑ = Α** για κάθε σημείο Α του Π και για κάθε Σ.Π o.
- Μια ειδική, αλλά πολύ συνηθισμένη Σ.Π είναι η $o = (\frac{1}{2}, 0)$ κατά την οποία η εικόνα του ζεύγους (Α , Β) και του (Β , Α) είναι το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ.
  Δηλ. **ΑoΒ = ΒoΑ = μέσο του τμήματος ΑΒ**

Η αλήθεια της ισότητας αυτής είναι προφανής.

- Αν δοθούν δύο διαφορετικά σημεία Α και Β, για κάθε σημείο Γ διαφορετικό του Α υπάρχει μοναδική Σ.Π ο με ΑοΒ = Γ

Πράγματι, αν $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = λ$ και $\angle ΒΑΓ = ω$ η ζητούμενη Σ.Π είναι η ο = (λ, ω).



Στην ειδική περίπτωση που είναι Γ = Α, η Σ.Π ο = (0, ω) όπου ω οποιαδήποτε γωνία του διαστήματος $[0^o, 360^o)$ έχει την ιδιότητα ΑοΒ = Γ.

Ισοδύναμα, αν δοθεί τρίγωνο ΑΒΓ τότε με την Σ.Π ο = (λ, ω) όπου $λ = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$ και $\angle ΒΑΓ = ω$ είναι ΑοΒ = Γ

Ισχύουν οι παρακάτω δύο βασικές ιδιότητες:

Αν ο = (λ, θ) και * = (μ, ω) είναι δύο οποιεσδήποτε Σ.Π και Α, Β, Γ, Δ τυχαία σημεία, τότε

1) Α * (Β ο Γ) = (Α * Β) ο (Α * Γ) και
(Β ο Γ) * Α = (Β * Α) ο (Γ * Α) (I)

δηλαδή οποιαδήποτε Σ.Π είναι επιμεριστική ως προς οποιαδήποτε άλλη Σ.Π και από αριστερά και από δεξιά.

2) (Α ο Β) * (Γ ο Δ) = (Α * Γ) ο (Β * Δ) (I I)

Το 2^o μέλος της ισότητας αυτής προέκυψε εναλλάσσοντας τα μεσαία σημεία Β και Γ και επίσης εναλλάσσοντας τις πράξεις ο και *

Στις παραπάνω ιδιότητες I και I I δεν αποκλείεται η πράξη * να είναι ίδια με την πράξη ο.

Επισημαίνουμε ότι εκτός από δύο Σ.Π τις $(\frac{1}{2}, 0)$ και $(-\frac{1}{2}, 180)$ μεταξύ δύο σημείων Α και Β που δίνουν το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, καμία άλλη πράξη δεν είναι αντιμεταθετική. Εδώ δεν θα μας απασχολήσει η απόδειξη της πρότασης αυτής. Το μόνο που θα χρειαστούμε στην εργασία αυτή είναι ότι για την πράξη ο = $(\frac{1}{2}, 0)$ ισχύει το προφανές ΑοΒ = ΒοΑ = μέσο του ευθ. τμήματος ΑΒ για κάθε ζεύγος σημείων Α και Β.

Επίσης οι Σ.Π δεν είναι προσεταιριστικές, δηλ. δεν ισχύει Αο(ΒοΓ) = (ΑοΒ)οΓ
Αυτό που ισχύει είναι η επιμεριστική ιδιότητα, δηλ. ισχύει Αο(ΒοΓ) = (ΑοΒ)ο(ΑοΓ)

Μια γεωμετρική απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων Ι και Ι Ι θα απαιτούσε τη μελέτη πολλών περιπτώσεων (διάφοροι συνδυασμοί των λ και θ ή διαφορετική διάταξη των σημείων Α, Β, Γ, Δ ή την περίπτωση που κάποια σημεία ταυτίζονται). Για τον λόγο αυτό δίνουμε την απόδειξη με τη βοήθεια μιγαδικών η οποία καλύπτει όλες τις δυνατές περιπτώσεις. Σ' αυτό οφείλεται το γεγονός ότι οι αποδείξεις με τη χρήση των Σ.Π ισχύουν για οποιαδήποτε διάταξη των σημείων στο επίπεδο, κάτι που αναφέραμε νωρίτερα.

Για την απόδειξη των ιδιοτήτων Ι και Ι Ι θα στηριχτούμε στην εξής πρόταση:
Έστω ο = (λ, θ) μια Σ.Π και ο αντίστοιχος μιγαδικός z = λ(συνθ + iημθ)
Αν για τα σημεία Α, Β, Γ ισχύει ΑοΒ = Γ και α, β, γ είναι οι μιγαδικοί με εικόνες τα σημεία Α, Β, Γ τότε ισχύει γ - α = (β - α)z, άρα
γ = (β - α)z + α (1)

Απόδειξη της ιδιότητας Ι Ι
Θα αποδείξουμε ότι (ΑοΒ)*(ΓοΔ) = (Α*Γ)ο(Β*Δ) (2)
όπου ο = (λ, θ), * = (μ, ω) δύο οποιεσδήποτε Σ.Π και οι μιγαδικοί z = λ(συνθ + iημθ) και w = μ(συνω + iημω) οι αντίστοιχοι των πράξεων ο και *.
Έστω ΑοΒ = Ε, ΓοΔ = Ζ, Α*Γ = Η, Β*Δ = Θ και α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ οι μιγαδικοί που έχουν εικόνες τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ αντίστοιχα.
Θα αποδείξουμε ότι Ε*Ζ = ΗοΘ ή Κ = Λ όπου Κ = Ε*Ζ και Λ = ΗοΘ
Αν κ , λ είναι οι μιγαδικοί με εικόνες τα σημεία Κ και Λ, αρκεί να αποδείξουμε ότι κ = λ
Σύμφωνα με την (1) θα είναι:

$$\varepsilon = (\beta - \alpha)z + \alpha, \quad \zeta = (\delta - \gamma)z + \gamma, \quad \eta = (\gamma - \alpha)w + \alpha, \quad \theta = (\delta - \beta)w + \beta \qquad (3)$$

$$\kappa = (\zeta - \varepsilon)w + \varepsilon \overset{(3)}{=} (\delta + \alpha - \gamma - \beta)zw + (\beta - \alpha)z + (\gamma - \alpha)w + \alpha$$

$$\lambda = (\theta - \eta)z + \eta \overset{(3)}{=} (\delta + \alpha - \gamma - \beta)zw + (\beta - \alpha)z + (\gamma - \alpha)w + \alpha \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει κ = λ

Απόδειξη της ιδιότητας Ι

Επειδή ΑοΑ = Α για κάθε σημείο Α και για κάθε Σ.Π ο, σύμφωνα με την ιδιότητα Ι Ι θα είναι:

Α*(ΒοΓ) = (ΑοΑ)*(ΒοΓ) = (Α*Β)ο(Α*Γ)   και

(ΒοΓ)*Α = (ΒοΓ)*(ΑοΑ) = (Β*Α)ο(Γ*Α)

Απλούστερη γραφή των ιδιοτήτων Ι και Ι Ι

Απλουστεύουμε τα παραπάνω σύμβολα των πράξεων ώστε να φαίνονται πιο οικεία και οι ιδιότητες των πράξεων να εφαρμόζονται με μεγαλύτερη ευκολία.

Όταν υπάρχει μια πράξη θα την ονομάζουμε “πολλαπλασιασμό”, θα την συμβολίζουμε για ευκολία με · και θα την διαβάζουμε ως “επί”.

Όταν υπάρχει και άλλη πράξη θα την ονομάζουμε “πρόσθεση”, θα την συμβολίζουμε με + και θα την διαβάζουμε ως “συν”.

Με τις παραδοχές αυτές, συμβολίζοντας την πράξη ο με + και την πράξη * με · , οι παραπάνω ιδιότητες μπορούν να γραφούν απλούστερα ως εξής:

Α·(Β + Γ) = (Α·Β) + (Α·Γ) και

(Β + Γ)·Α = (Β·Α) + (Γ·Α) (Ι)

(Α + Β)·(Γ + Δ) = (Α·Γ) + (Β·Δ) (Ι Ι)

Με την παραδοχή ότι ο “πολλαπλασιασμός” προηγείται της “πρόσθεσης” μπορούμε να παραλείψουμε κάποιες παρενθέσεις και να γράψουμε τις παραπάνω ιδιότητες ακόμη πιο απλά ως εξής:

Α·(Β + Γ) = Α·Β + Α·Γ και

(Β + Γ)·Α = Β·Α + Γ·Α (Ι)

(Α + Β)·(Γ + Δ) = Α·Γ + Β·Δ (Ι Ι)

Τέλος, επειδή η πράξη $\cdot = (\frac{1}{2}, 0)$ είναι πολύ συνηθισμένη, θα την γράφουμε για λόγους απλούστευσης ως · = (δ, 0), δηλ. όπου υπάρχει το γράμμα δ σε κάποια πράξη θα εννοείται $\delta = \frac{1}{2}$

Στη συνέχεια της παρουσίασης και εφόσον δεν υπάρχουν περισσότερες από δύο Σ.Π θα χρησιμοποιούμε την τελευταία απλούστερη γραφή των ιδιοτήτων Ι, Ι Ι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΚΑΙ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις ιδιότητα I και I I καθώς και την αντιμεταθετικότητα της πράξης (δ, 0) για να δημιουργήσουμε και να αποδείξουμε γεωμετρικές προτάσεις.

Όπως είπαμε στην αρχή της εργασίας, για τη δημιουργία τέτοιων προτάσεων το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να γράψουμε μισή γραμμή στην τύχη και να την ερμηνεύσουμε γεωμετρικά.
Αυτή η μισή γραμμή είναι κάποια από τις ιδιότητες I και I I γραμμένη με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ή με αντικατάσταση κάποιων σημείων με κάποιο συνδυασμό άλλων σημείων.
Έτσι, η ιδιότητα I: $Α\cdot(Β + Γ) = Α\cdot Β + Α\cdot Γ$ (1)
μπορεί να εφαρμοστεί όπως ακριβώς είναι γραμμένη και μεταφράζοντάς την γεωμετρικά με συγκεκριμένες Σ.Π + και · θα δώσει μια συγκεκριμένη γεωμετρική πρόταση. Η πρόταση αυτή θα ισχύει για οποιαδήποτε διάταξη των σημείων Α, Β, Γ στο επίπεδο, είτε δηλ. τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου, είτε είναι συνευθειακά.
Με αλλαγή της μιας ή και των δύο πράξεων, η ίδια ισότητα θα δώσει μια διαφορετική πρόταση που θα ισχύει πάλι για 3 οποιαδήποτε σημεία.
Έτσι π.χ αν επιλέξουμε ως + = (δ, 0) και · = (1, 90) η (1) θα μας δώσει μια γεωμετρική πρόταση.
Η ίδια ισότητα (1) αν επιλέξουμε άλλες πράξεις, π.χ + = (1, 60) και · = (2, 30) θα μας δώσει μια διαφορετική πρόταση.
Έτσι, η σχέση (1) που αναφέρεται σε 3 σημεία μπορεί να δώσει απειρία γεωμετρικών προτάσεων.
Αν π.χ τα Α, Β, Γ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου θα μας δώσει μια πρόταση σχετική με το ισόπλευρο τρίγωνο. Αν τα Α, Β, Γ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου θα δώσει μια πρόταση σχετική με το ορθογώνιο τρίγωνο κ.ο.κ.
Στην ίδια ιδιότητα που ισχύει για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ κάποιο από τα σημεία Α, Β, Γ μπορεί να είναι αποτέλεσμα πράξεων άλλων σημείων. Έτσι η ιδιότητα αυτή μπορεί να έχει π.χ τις εξής μορφές (γραμμένες στην τύχη):
$Α\cdot(Β + Γ\cdot Δ) = Α\cdot Β + Α\cdot(Γ\cdot Δ)$
$(Α.Β + Β\cdot Δ)\cdot Β = (Α.Β)\cdot Β + (Β\cdot Δ)\cdot Β$ όπου Δ ένα άλλο τυχαίο σημείο.

Κάθε μια από τις ισότητες αυτές δίνει απειρία νέων προτάσεων για κάθε επιλογή των πράξεων + και · και του σημείου Δ.

Η ιδιότητα Ι Ι: (Α + Β)·(Γ + Δ) = Α·Γ + Β·Δ (2)
με τη συγκεκριμένη μορφή και με συγκεκριμένες πράξεις + και · δίνει μια γεωμετρική πρόταση. Με άλλη επιλογή των πράξεων + και · δίνει άλλη πρόταση κ.ο.κ, δηλ. η ισότητα (2) μπορεί να δώσει άπειρες γεωμετρικές προτάσεις.
Η ίδια σχέση (2) ισχύει βεβαίως αν αντί των σημείων Α, Β, Γ, Δ έχουμε κάποιους συνδυασμούς των σημείων αυτών ή και συνδυασμούς άλλων σημείων.
Έτσι π.χ η (2) ισχύει και ως εξής (γραμμένη στην τύχη):
(Α + Β·Δ)·(Β + (Γ + Ε)) = Α·Β + (Β.Δ)·(Γ + Ε) για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε.
Με τον τρόπο αυτό δίνει μια νέα γεωμετρική πρόταση, δηλ. και η ιδιότητα Ι Ι δίνει άπειρες γεωμετρικές προτάσεις.
Οι προτάσεις που αποδεικνύονται με τον τρόπο αυτό (με τις ιδιότητες Ι και Ι Ι) ισχύουν για κάθε διάταξη των σημείων στο επίπεδο και όχι μόνο για την περίπτωση του εκάστοτε σχήματος.
Δηλ. η ιδιότητα Ι Ι ισχύει είτε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι κορυφές κυρτού τετραπλεύρου, είτε είναι κορυφές μη κυρτού τετραπλεύρου, είτε τα 3 σημεία ή και τα 4 σημεία είναι συνευθειακά, είτε κάποια σημεία ταυτίζονται.

Οι πράξεις που θα ορίσουμε και η ισότητα που θα γράψουμε για τη δημιουργία ή την απόδειξη μιας πρότασης, μπορούν να έχουν σχέση με ένα συγκεκριμένο σχήμα, οπότε θα προκύψει μια πρόταση σχετική με το σχήμα αυτό ή μπορούν να οριστούν εντελώς στην τύχη, οπότε θα προκύψει κάποιο σχήμα και μια γεωμετρική πρόταση σχετική με τις ορισθείσες πράξεις και το συγκεκριμένο σχήμα. Σε κάθε περίπτωση η πρόταση που θα δημιουργηθεί θα αποκαλυφθεί με την γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας που γράψαμε.
Στα παραδείγματα που ακολουθούν, άλλοτε προσαρμόζουμε τις πράξεις σ' ένα συγκεκριμένο σχήμα και άλλοτε ορίζουμε πρώτα τις πράξεις και κατόπιν σχεδιάζουμε το σχήμα που θα προκύψει από τις συγκεκριμένες πράξεις.
Και με τους δύο τρόπους το αποτέλεσμα είναι μια γεωμετρική πρόταση γνωστή ή νέα.

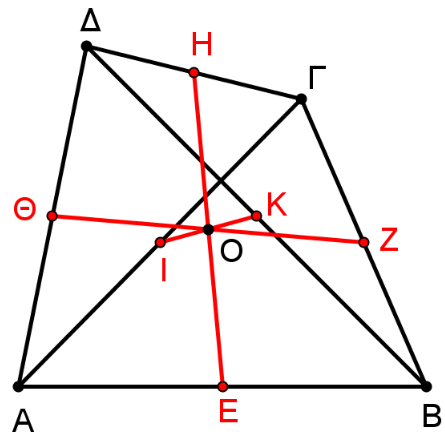
Τα παραπάνω γίνονται κατανοητά από τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Στα επόμενα, η ιδιότητα Ι Ι θα ονομάζεται **Θεμελιώδες Θεώρημα των Σ.Π (Συντομ. Θ.Θ)** επειδή σχεδόν όλα όσα ακολουθούν στηρίζονται σ' αυτήν.

Παραδείγματα

1) Παίρνουμε στην τύχη 4 σημεία Α, Β, Γ, Δ, ορίζουμε ως πολλαπλασιασμό και πρόσθεση την ίδια πράξη, $+ = (\delta, 0) = (\frac{1}{2}, 0)$, $\cdot = (\delta, 0) = (\frac{1}{2}, 0)$ και εφαρμόζουμε το Θ.Θ.

Ισχύει: **(Α + Β)·(Δ + Γ) = Α·Δ + Β·Γ (1)**



(Η επιλογή των πράξεων είναι τυχαία. Δεν ξέρουμε ποια πρόταση θα προκύψει).
Ερμηνεύουμε τώρα γεωμετρικά τα δύο μέλη της (1)

1ο μέλος
Το Α + Β είναι το μέσο Ε του τμήματος ΑΒ.
Το Δ + Γ είναι το μέσο Η του τμήματος ΔΓ.

2ο μέλος
Το Α·Δ είναι το μέσο Θ του τμήματος ΑΔ.
Το Β·Γ είναι το μέσο Ζ του τμήματος ΒΓ

Η σχέση (1) λοιπόν γράφεται: Ε·Η = Θ + Ζ
Το Ε·Η είναι το μέσο του τμήματος ΕΗ και το Θ + Ζ είναι το μέσο του ΘΖ.
Συμπεραίνουμε έτσι ότι τα τμήματα ΕΗ και ΘΖ έχουν κοινό μέσο.

Αν Ι και Κ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΓ και ΒΔ και πάρουμε τη σχέση **(Α + Β)·(Γ + Δ) = Α·Γ + Β·Δ** καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα τμήματα ΕΗ και ΙΚ έχουν κοινό μέσο.

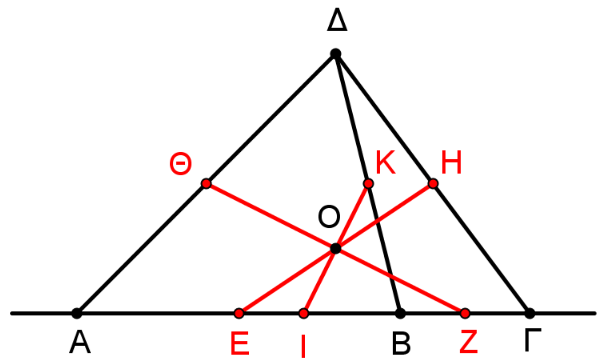
Δημιουργήσαμε δηλ. και ταυτόχρονα αποδείξαμε την εξής πρόταση:

Αν Α, Β, Γ, Δ είναι 4 οποιαδήποτε σημεία και Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ τα μέσα των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, τότε τα τμήματα ΕΗ, ΘΖ και ΙΚ έχουν κοινό μέσο.

Στην περίπτωση που τα Α, Β, Γ, Δ είναι κορυφές κυρτού τετραπλεύρου είναι η γνωστή πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας**:**

Σε κάθε κυρτό τετράπλευρο τα ευθ. τμήματα που συνδέουν τα μέσα των απέναντι πλευρών του και το ευθ. τμήμα που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του διέρχονται από το ίδιο σημείο και διχοτομούνται.

Σύμφωνα με όσα εξηγήσαμε νωρίτερα, δεν είναι απαραίτητο τα σημεία Α, Β, Γ, Δ να είναι κορυφές κυρτού τετραπλεύρου όπως στο παραπάνω σχήμα, αλλά 4 οποιαδήποτε σημεία. Μπορούν τα 3 ή και τα 4 σημεία να είναι συνευθειακά. Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, αλλά η πρόταση συνεχίζει να ισχύει.



Η ίδια απόδειξη ισχύει βέβαια και στην περίπτωση που και τα 4 σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά.
Η γενίκευση της πρότασης γίνεται χωρίς καμιά δυσκολία στο παράδειγμα 17, αλλάζοντας τις πράξεις από (δ, 0) και (δ, 0) σε (λ, 0) και (μ, 0) και αντιγράφοντας την ίδια απόδειξη. Η γενίκευσή της, δηλ. το παράδειγμα 17 αποδεικνύεται δύσκολα με την κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ
Για διευκόλυνση του αναγνώστη έχουμε σημειώσει στο κείμενο με κόκκινα γράμματα τα σημεία που προέκυψαν από μια Σ.Π μόνο την $1^{η}$ φορά. Μετά, τα ίδια σημεία τα γράφουμε με μαύρο χρώμα. Με κόκκινο χρώμα σημειώνονται τα σημεία αυτά και στα αντίστοιχα σχήματα.

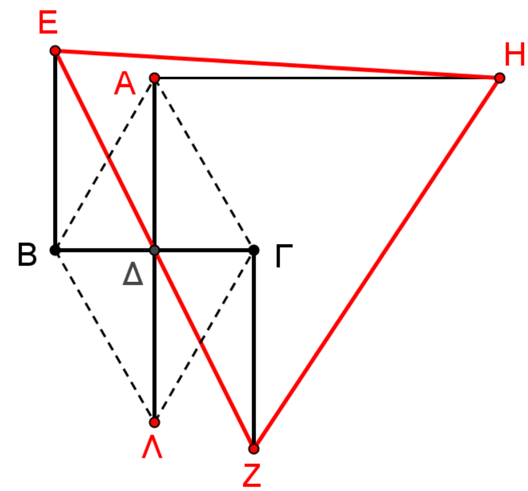
2) Για τα σημεία Β και Γ και Σ.Π τις + = (1, 60) και · = (1, 90), εφαρμόζουμε το Θ.Θ ως εξής:

(Β + Γ)·(Γ + Β) = Β·Γ + Γ·Β **(1)**

(Η επιλογή των πράξεων είναι τυχαία. Δεν ξέρουμε ποια πρόταση θα προκύψει). Ερμηνεύουμε τώρα γεωμετρικά τη σχέση (1).

1^{o} μέλος

Το Β + Γ είναι η στροφή του σημείου Γ γύρω από το Β και γωνία 60^{o}, δηλ. είναι δηλ. η κορυφή Α του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΑ του σχήματος και το Γ + Β είναι η κορυφή Λ του ισοπλεύρου τριγώνου ΓΒΛ του σχήματος.
Το 1^{o} μέλος είναι τώρα το Α·Λ. Το Α·Λ είναι το σημείο Η που είναι η στροφή του σημείου Λ γύρω από το Α κατά γωνία 90^{o}, δηλ.
ΑΗ ⊥= ΑΛ και ισχύει Η = Β·Γ + Γ·Β



2^{o} μέλος

Το Β·Γ είναι η στροφή του Γ γύρω από το σημείο Β κατά 90^{o}, είναι δηλ. το σημείο Ε που βρίσκεται αν φέρουμε την κάθετη στην πλευρά ΒΓ στο σημείο Β και πάρουμε πάνω σ' αυτήν τμήμα ΒΕ = ΒΓ.
Το Γ·Β είναι το σημείο Ζ του σχήματος που βρίσκεται φέρνοντας την κάθετη στην ΒΓ στο σημείο Γ και παίρνοντας πάνω σ' αυτήν τμήμα ΓΖ = ΒΓ.

Επομένως η προηγούμενη σχέση γράφεται Η = Ε + Ζ
Το 2^{o} μέλος της ισότητας αυτής είναι η τρίτη κορυφή του ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά την ΕΖ που προέκυψε με περιστροφή του Ζ γύρω από το Ε κατά 60^{o}.
Δημιουργήσαμε δηλ. και ταυτόχρονα αποδείξαμε την εξής πρόταση:

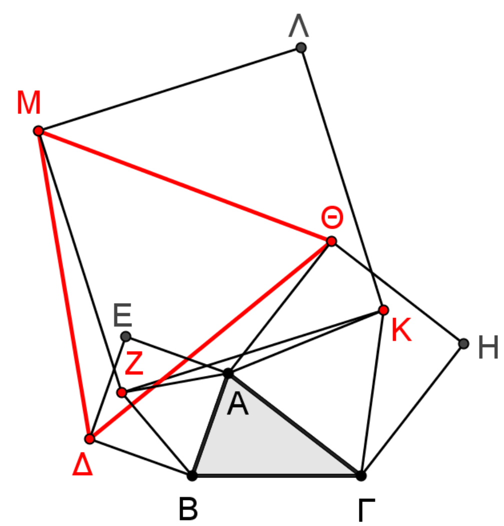
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Φέρνουμε τις κάθετες στην πλευρά ΒΓ στα σημεία Β και Γ όπως στο σχήμα και πάνω σ' αυτές παίρνουμε τμήματα ΒΕ = ΓΖ = ΒΓ. Φέρνουμε επίσης την κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε τμήμα ΑΗ = 2ΑΔ όπως στο σχήμα. Τότε το τρίγωνο ΕΖΗ είναι ισόπλευρο.

3) Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και οι Σ.Π + = (1, 90) και · = (1, 60)
(Τυχαία επιλογή των πράξεων)

Ισχύει: **(Β + Α)·(Α + Γ) = Β·Α + Α·Γ** **(1)**

Ερμηνεύουμε τώρα γεωμετρικά τη σχέση (1)

1ο μέλος
Το Β + Α είναι η κορυφή Δ του τετραγώνου ΒΑΕΔ
του σχήματος, και το Α + Γ είναι η κορυφή Θ του τετραγώνου ΑΓΗΘ του σχήματος.



2ο μέλος
Το Β·Α είναι η κορυφή Ζ του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΑΖ του σχήματος και το Α·Γ είναι η κορυφή Κ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΓΚ του σχήματος.
Το 2ο μέλος της (1) είναι τώρα το Ζ + Κ που είναι η κορυφή Μ του τετραγώνου ΖΚΛΜ του σχήματος.

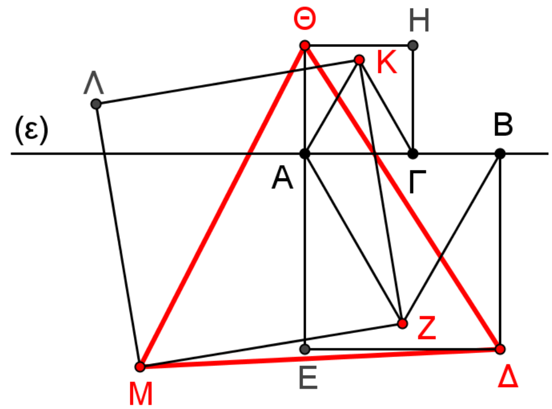
Επομένως η (1) γίνεται: Δ·Θ = Μ
Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι το Μ είναι η τρίτη κορυφή του ισοπλεύρου τριγώνου του σχήματος με πλευρά τη ΔΘ.

Δημιουργήσαμε δηλ. και ταυτόχρονα αποδείξαμε την εξής πρόταση:

Εξωτερικά τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΗΘ και τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΓΚ του σχήματος. Κατασκευάζουμε επίσης το τετράγωνο ΖΚΛΜ του σχήματος. Τότε το τρίγωνο ΔΘΜ είναι ισόπλευρο.

Και πάλι τα Α, Β, Γ δεν είναι απαραίτητο να είναι κορυφές τριγώνου. Μπορούν να είναι και συνευθειακά. Δεν έχει επίσης σημασία η διάταξή τους πάνω στην ευθεία. Αρκεί τα ισόπλευρα τρίγωνα και τα τετράγωνα να έχουν τον ίδιο προσανατολισμό όπως και στην περίπτωση που μόλις αποδείξαμε.
Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά αλλά η πρόταση συνεχίζει να ισχύει.

Επίσης δεν έχει σημασία η διάταξη των σημείων Α, Β, Γ πάνω στην ίδια ευθεία. Με διαφορετική διάταξη, π.χ το Α μεταξύ Β και Γ, το σχήμα αλλάζει, αλλά η πρόταση ισχύει και πάλι.
Με την κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία θα είμαστε υποχρεωμένοι να κάνουμε ξεχωριστή απόδειξη για κάθε μια από τις περιπτώσεις αυτές.

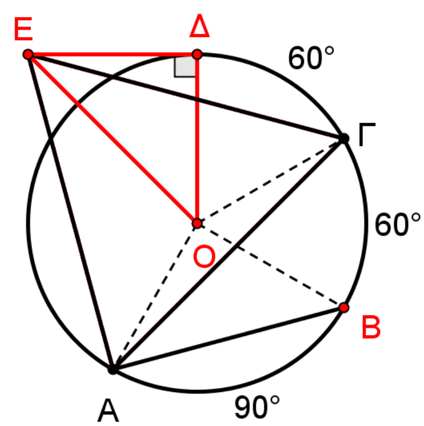


4) Σε κύκλο Ο παίρνουμε τα διαδοχικά τόξα $AB = 90^o$ και $B\Gamma = 60^o$
Ορίζουμε τις πράξεις: + = (1, 90) και · = (1, 60)
Με τις πράξεις αυτές είναι: Ο + Α = Β και Β·Γ = Ο
(Εδώ προσαρμόσαμε τις πράξεις στο σχήμα. Περιμένουμε να προκύψει μια πρόταση σχετική με το σχήμα).
Εφαρμόζουμε το Θ.Θ σχετικό με τα δεδομένα.

(Ο + Α)·Γ = Ο·Γ + Α·Γ **(1)**

Ερμηνεύουμε γεωμετρικά τα δύο μέλη της (1)

1^o μέλος
Το 1^o μέλος της σχέσης αυτής είναι το σημείο Β·Γ = Ο



2^o μέλος
Το Ο·Γ είναι το σημείο Δ του κύκλου, τέτοιο ώστε $\measuredangle \Gamma O\Delta = 60^o$
Το Α·Γ είναι η κορυφή Ε του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΓΕ του σχήματος.

Έτσι η σχέση (1) γράφεται Ο = Δ + Ε
Αυτό σημαίνει ότι $\Delta O \perp = \Delta E$, άρα η ΕΔ είναι εφαπτομένη του κύκλου και ίση με την ακτίνα του.

Δημιουργήσαμε δηλ. και ταυτόχρονα αποδείξαμε την εξής πρόταση:

Σε κύκλο Ο ακτίνας R δίνονται τα διαδοχικά τόξα $AB = 90^o$, $B\Gamma = 60^o$, $\Gamma\Delta = 60^o$. Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΕ του σχήματος. Τότε η ΕΔ είναι εφαπτομένη του κύκλου και ΕΔ = R.

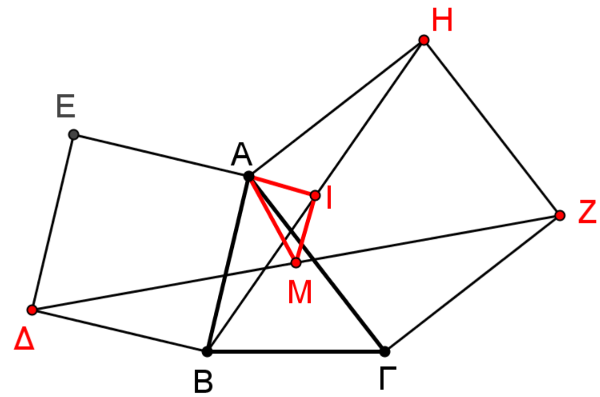
5) Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και οι Σ.Π + = (δ, 0) και · = (1, 90)
Για τυχαίο σημείο Χ ισχύει (Β + Χ)·Α=Β·Α + Χ·Α. Παίρνουμε ως Χ το Α·Γ. Έχουμε δηλαδή:

(Β + Α·Γ)·Α = Β·Α + (Α·Γ)·Α **(1)**

(Τυχαία επιλογή των πράξεων και του σημείου Χ. Δεν ξέρουμε ποια πρόταση θα προκύψει).

Ερμηνεύουμε τώρα γεωμετρικά τα δύο μέλη της (1)

1^{o} μέλος
Το Α·Γ είναι η κορυφή Η του τετραγώνου ΑΓΖΗ του σχήματος.
Το Β + Α·Γ = Β + Η είναι το μέσο Ι του τμήματος ΒΗ.
Το 1^{o} μέλος της (1) είναι ίσο με Ι·Α



2^{o} μέλος
Το Β·Α είναι η κορυφή Δ του τετραγώνου ΑΒΔΕ του σχήματος.
Το Α·Γ είναι η κορυφή Η του τετραγώνου ΑΓΖΗ του σχήματος.
Το (Α·Γ)·Α = Η·Α είναι το σημείο Ζ.
Το 2^{o} μέλος λοιπόν είναι το σημείο Δ + Ζ που είναι το μέσο Μ του τμήματος ΔΖ.

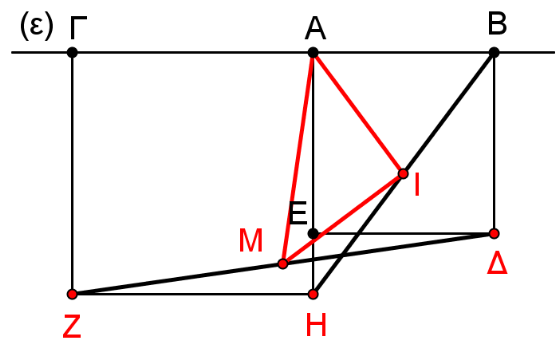
Έτσι η σχέση (1) γράφεται Ι·Α = Μ
Το Μ λοιπόν είναι η στροφή του Α γύρω από το Ι κατά γωνία 90^{o}, δηλ. ΙΜ ⊥= ΙΑ που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΙΑΜ είναι ορθογώνιο στο Ι και ισοσκελές.

Δημιουργήσαμε δηλ. και ταυτόχρονα αποδείξαμε την εξής πρόταση:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ εκτός αυτού. Αν Μ και Ι είναι τα μέσα των ΔΖ και ΒΗ αντίστοιχα, τότε το τρίγωνο ΙΑΜ είναι ορθογώνιο στο Ι και ισοσκελές.

Όπως εξηγήσαμε δεν είναι απαραίτητο τα Α, Β, Γ να είναι κορυφές τριγώνου. Μπορούν να είναι και συνευθειακά, αρκεί τα τετράγωνα και στις δύο περιπτώσεις να έχουν τον ίδιο προσανατολισμό.

Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, αλλά η πρόταση πάλι ισχύει.

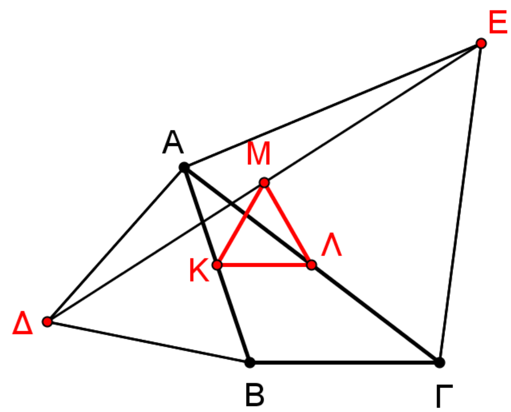


6) Έστω τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ. Θεωρούμε την πράξη $\cdot = (1, 60)$ σχετική με την κατασκευή.
Με την πράξη αυτή είναι Β·Α = Δ και Α·Γ = Ε
Θεωρούμε και την πράξη $+ = (\delta, 0)$ και εφαρμόζουμε τη σχέση:

(Β + Α)·(Α + Γ) = Β·Α + Α·Γ **(1)**

Ερμηνεύουμε τώρα γεωμετρικά τα δύο μέλη της (1)

1$^{\text{ο}}$ μέλος
Το Β + Α είναι το μέσο Κ του ΑΒ και το Α + Γ είναι το μέσο Λ του ΑΓ.
Έτσι το 1$^{\text{ο}}$ μέλος είναι ίσο με Κ·Λ

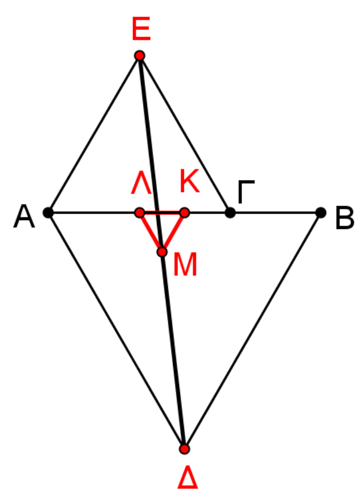


2$^{\text{ο}}$ μέλος
Είναι Β·Α = Δ και Α·Γ = Ε
Άρα το 2$^{\text{ο}}$ μέλος της (1) είναι ίσο με Δ + Ε το οποίο είναι το μέσο Μ του τμήματος ΔΕ.

Η σχέση (1) τώρα γράφεται Κ·Λ = Μ
Το Κ·Λ είναι η στροφή του Λ γύρω από το Κ κατά γωνία 60$^{\text{o}}$, δηλ. είναι η τρίτη κορυφή του ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά την ΚΛ.

Δημιουργήσαμε δηλ. και ταυτόχρονα αποδείξαμε την εξής πρόταση:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ. Αν Κ , Λ και Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΔΕ αντίστοιχα, τότε το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.



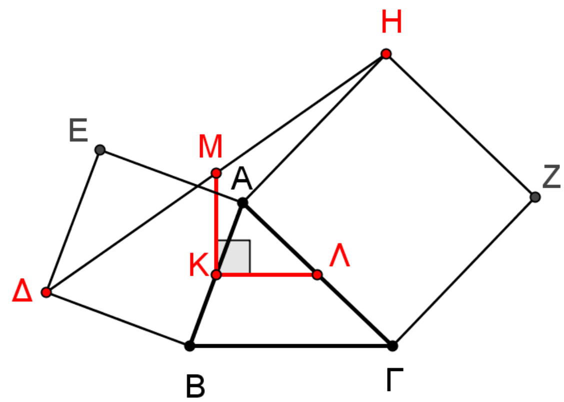
Η ίδια απόδειξη ισχύει και αν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά με οποιαδήποτε διάταξη, αρκεί τα ισόπλευρα τρίγωνα και στις δύο περιπτώσεις να έχουν τον ίδιο προσανατολισμό.
Στο διπλανό σχήμα, η ίδια πρόταση με τα σημεία Α, Β, Γ συνευθειακά.

7) Έστω τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ εκτός αυτού.
Θεωρούμε τη Σ.Π $\cdot = (1, 90)$ σχετική με το σχήμα.
Σύμφωνα με την πράξη αυτή είναι Β·Α = Δ και Α·Γ = Η
Θεωρούμε και την Σ.Π $+ = (\delta, 0)$.
Εφαρμόζουμε το Θ.Θ για τα σημεία Α, Β, Γ ως εξής:

$$\mathbf{(B + A)\cdot(A + \Gamma) = B\cdot A + A\cdot\Gamma} \qquad \mathbf{(1)}$$

Ερμηνεύουμε τώρα γεωμετρικά την (1).

1^o μέλος
Το Β + Α είναι το μέσο Κ του ΑΒ και το
Α + Γ είναι το μέσο Λ του ΑΓ.
Το 1^o μέλος της (1) είναι τώρα το Κ·Λ



2^o μέλος
Είναι Β·Α = Δ και Α·Γ = Η
Το 2^o μέλος της (1) είναι λοιπόν το Δ + Η
που είναι το μέσο Μ του τμήματος ΔΗ.

Η (1) τώρα γράφεται
Κ·Λ = Μ
Το Κ·Λ είναι η στροφή του Λ γύρω από το Κ κατά γωνία 90^o που σημαίνει ότι
$KM \perp = K\Lambda$

Επειδή $K\Lambda // = \frac{B\Gamma}{2}$, δημιουργήσαμε και ταυτόχρονα αποδείξαμε την εξής πρόταση:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Κ και Μ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΒ, και ΔΗ αντίστοιχα, τότε το ΜΚ είναι κάθετο στην πλευρά ΒΓ και ίσο με το μισό της.

Η ίδια απόδειξη ισχύει και αν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά με οποιαδήποτε διάταξη, αρκεί τα τετράγωνα και στις δύο περιπτώσεις να έχουν τον ίδιο προσανατολισμό.

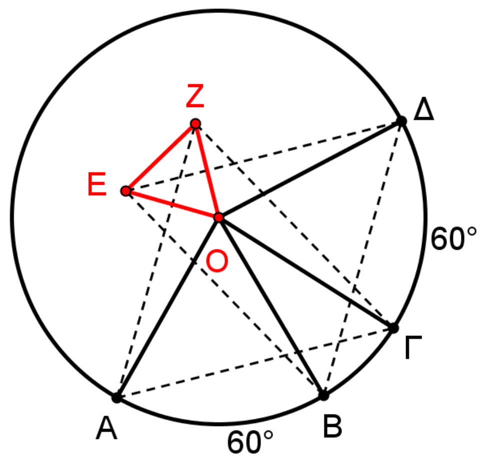
8α) Στον κύκλο Ο του σχήματος έχουμε δύο τόξα $AB = \Gamma\Delta = 60^o$. Ορίζουμε μια πράξη · = (1, 60) ώστε Α·Β = Ο και Γ·Δ = Ο (Η πράξη · σχετική με το σχήμα).
Εφαρμόζουμε το Θ.Θ ως εξής:

(Α·Β)·(Γ·Δ) = (Α·Γ)·(Β·Δ) (1)

Ερμηνεύουμε γεωμετρικά την (1)

1^o μέλος
Το 1^o μέλος της είναι το Ο·Ο = Ο

2^o μέλος
Το Α·Γ είναι η κορυφή Ζ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΓΖ του σχήματος.
Το Β·Δ είναι η κορυφή Ε του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΔΕ του σχήματος.



Έτσι η σχέση (1) γράφεται: Ο = Ζ·Ε.
Το Ζ·Ε είναι η στροφή του Ε γύρω από το Ζ και γωνία 60^o.
Αυτό σημαίνει ότι το τρίγωνο ΟΖΕ είναι ισόπλευρο.

Δημιουργήσαμε δηλ. και ταυτόχρονα αποδείξαμε την εξής πρόταση:

Σε κύκλο Ο παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ώστε $AB = \Gamma\Delta = 60^o$ και τα τόξα AB και $\Gamma\Delta$ να διαγράφονται κατά τη θετική φορά. Κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΓΖ και ΒΔΕ του σχήματος. Τότε το τρίγωνο ΟΕΖ είναι ισόπλευρο.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ
Από την απόδειξη προκύπτει ότι η σχετική θέση των σημείων Α, Β, Γ, Δ μπορεί να είναι οποιαδήποτε με μόνο κριτήριο ότι τα τόξα AB και $\Gamma\Delta$ πρέπει να διαγράφονται κατά την θετική φορά ώστε να ισχύει Α·Β = Ο και Γ·Δ = Ο

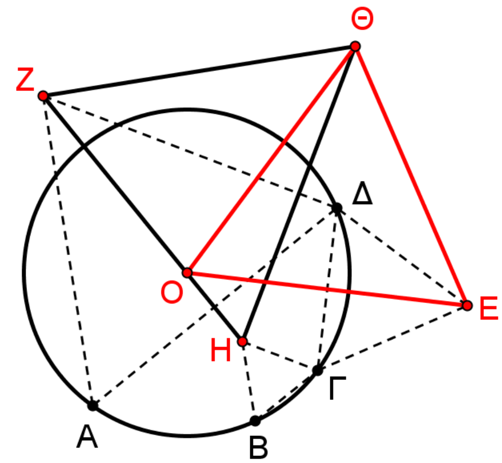
8β) Στο ίδιο σχήμα και με την ίδια πράξη · = (1, 60) χρησιμοποιούμε τώρα τη σχέση

(Α·Δ)·(Β·Γ) = (Α·Β)·(Δ·Γ) **(1)**

Ερμηνεύουμε γεωμετρικά τα δύο μέλη της (1)

1^{o} μέλος

Το Α·Δ είναι η κορυφή Ζ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΔΖ του σχήματος.
Το Β·Γ είναι η κορυφή Η του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΓΗ του σχήματος.
Το 1^{o} μέλος της (1) λοιπόν είναι το σημείο Ζ·Η που είναι η τρίτη κορυφή Θ του ισοπλεύρου τριγώνου ΖΗΘ.



2^{o} μέλος

Το Α·Β είναι το σημείο Ο
Το Δ·Γ είναι η τρίτη κορυφή Ε του ισοπλεύρου τριγώνου ΔΓΕ του σχήματος.

Έτσι η σχέση (1) γράφεται Θ = Ο·Ε
Η τελευταία ισότητα σημαίνει ότι και το τρίγωνο ΟΕΘ είναι ισόπλευρο.

Δημιουργήσαμε δηλ. και ταυτόχρονα αποδείξαμε την εξής πρόταση:

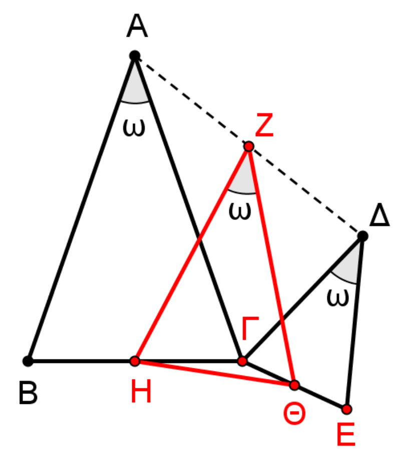
Σε κύκλο Ο δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ώστε τα τόξα ΑΒ και ΓΔ να διαγράφονται κατά τη θετική φορά και $AB = \Gamma\Delta = 60^{o}$.
Κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΖ, ΒΓΗ, ΔΓΕ και ΖΗΘ του σχήματος.
Τότε το τρίγωνο ΟΕΘ είναι ισόπλευρο.

9) Ας πάρουμε δύο όμοια και ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΔΓΕ (ΔΓ = ΔΕ) όπως στο σχήμα και έστω $\measuredangle A = \measuredangle \Delta = \omega$.

Ορίζουμε μια πράξη $\cdot = (1, \omega)$ ώστε $A\cdot B = \Gamma$ και $\Delta\cdot\Gamma = E$.
Ορίζουμε ακόμη μια πράξη $+ = (\delta, 0)$ και παίρνουμε τη σχέση

$$(A + \Delta)\cdot(B + \Gamma) = A\cdot B + \Delta\cdot\Gamma \qquad (1)$$

Ερμηνεύουμε γεωμετρικά την παραπάνω σχέση.



1ο μέλος
Το Α + Δ είναι το μέσο Ζ του τμήματος ΑΔ.
Το Β + Γ είναι το μέσο Η του τμήματος ΒΓ.

2ο μέλος
Είναι ίσο με Γ + Ε όπως εξηγήσαμε και είναι το μέσο Θ του ΓΕ.

Έτσι η σχέση (1) γράφεται: $Z\cdot H = \Theta$
Το $Z\cdot H$ είναι η στροφή του Η γύρω από το Ζ κατά γωνία ω, δηλ. ΖΗ = ΖΘ και $\measuredangle H Z \Theta = \omega$.
Επομένως το τρίγωνο ΖΗΘ είναι ισοσκελές και όμοιο με το ΑΒΓ.

Δημιουργήσαμε δηλ. και ταυτόχρονα αποδείξαμε την εξής πρόταση:

Στο παραπάνω σχήμα τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΔΓΕ (ΔΓ = ΔΕ) είναι όμοια. Αν Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ και ΓΕ αντίστοιχα, τότε το τρίγωνο ΖΗΘ είναι όμοιο με το ΑΒΓ.

Με τα παραδείγματα που προηγήθηκαν δείξαμε πως μπορεί κάποιος με ελάχιστες γνώσεις να δημιουργήσει και ταυτόχρονα να αποδείξει μια γεωμετρική πρόταση. Τα παραδείγματα που δώσαμε ήταν αρκετά απλά με σκοπό την εύκολη κατανόηση αυτής της διαδικασίας.
Μπορούμε όμως να κάνουμε πολύ πιο σύνθετες και δύσκολες γεωμετρικές προτάσεις χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες Ι και Ι Ι με συνθετότερη μορφή. Δίνουμε ένα τέτοιο παράδειγμα.

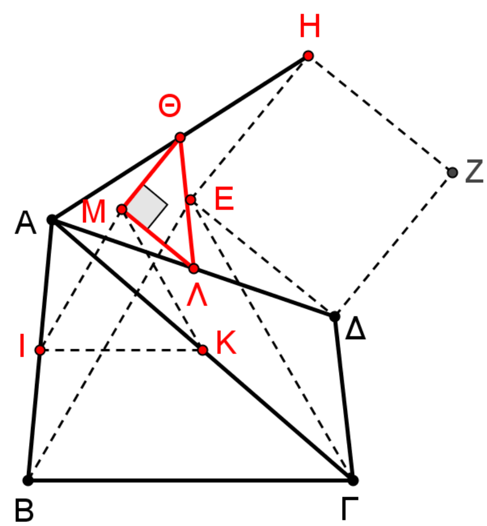
10) Χρήση περισσοτέρων των δύο Σ.Π

Θεωρούμε 4 τυχαία σημεία Α , Β , Γ, Δ και τις Σ.Π
ο = (δ, 0), * = (1, 60) και ● = (1, 90)
Σύμφωνα με την ιδιότητα Ι είναι:
Αο((Β*Γ)●Δ) = (Αο(Β*Γ))●(ΑοΔ) = ((ΑοΒ)*(ΑοΓ))●(ΑοΔ), δηλ.

Αο((Β*Γ)●Δ) = ((ΑοΒ)*(ΑοΓ))●(ΑοΔ) (1)

Ερμηνεύουμε γεωμετρικά τα δύο μέλη της (1)

$1^{ο}$ μέλος
Το Β*Γ είναι η κορυφή Ε του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΓΕ του σχήματος. Έτσι το μέλος της (1) είναι το Αο(Ε●Δ).
Το Ε●Δ είναι η κορυφή Η του τετραγώνου ΕΔΖΗ.
Το $1^{ο}$ μέλος της (1) τώρα είναι το ΑοΗ.
Το ΑοΗ είναι το μέσο Θ του τμήματος ΑΗ.
Τελικά, το $1^{ο}$ μέλος της (1) είναι το μέσο Θ του τμήματος ΑΗ.



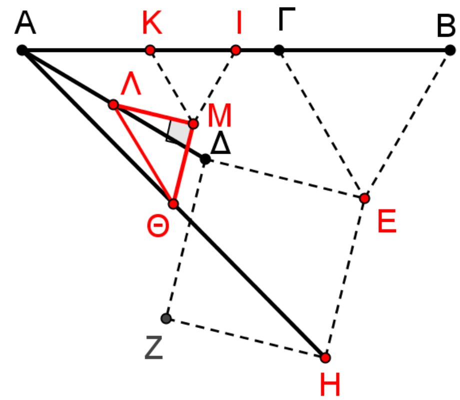
$2^{ο}$ μέλος
Το ΑοΒ είναι το μέσο Ι του τμήματος ΑΒ.
Το ΑοΓ είναι το μέσο Κ του τμήματος ΑΓ.
Το ΑοΔ είναι το μέσο Λ του τμήματος ΑΔ.
Το $2^{ο}$ μέλος της (1) είναι λοιπόν το σημείο (Ι*Κ)●Λ.
Το Ι*Κ είναι η κορυφή Μ του ισοπλεύρου τριγώνου ΙΚΜ.
Έτσι το $2^{ο}$ μέλος της (1) είναι τώρα το σημείο Μ●Λ.

Τώρα η σχέση (1) γίνεται Θ = Μ●Λ
Το σημείο Μ●Λ είναι η στροφή του Λ γύρω από το Μ κατά γωνία 90^{o}.
Αυτό σημαίνει ότι τα τμήματα ΜΛ και ΜΘ είναι ίσα και κάθετα ή, με άλλα λόγια, το τρίγωνο ΜΛΘ είναι ορθογώνιο στο Μ και ισοσκελές.

Δημιουργήσαμε λοιπόν και ταυτόχρονα αποδείξαμε την εξής πρόταση:

Δίνονται 4 τυχαία σημεία, Α, Β, Γ, Δ και Ι, Κ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα ΒΓΕ και ΙΚΜ και το τετράγωνο ΕΔΖΗ του σχήματος. Έστω Θ, Λ τα μέσα των ΑΗ, ΑΔ αντίστοιχα. Τότε το τρίγωνο ΜΘΛ είναι ορθογώνιο στο Μ και ισοσκελές.

Όπως έχουμε εξηγήσει, η πρόταση που δημιουργήσαμε ισχύει για οποιαδήποτε διάταξη των σημείων Α, Β, Γ, Δ. Ισχύει και στην περίπτωση που κάποια σημεία είναι συνευθειακά. Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, αλλά η πρόταση πάλι ισχύει.

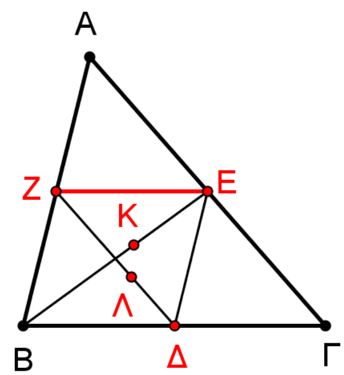


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}
ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Με τα παραδείγματα που ακολουθούν δείχνουμε πως μπορούμε να αποδείξουμε συγκεκριμένες γεωμετρικές προτάσεις.

11) Το ευθ. τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Απόδειξη



Έστω Ζ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ αντίστοιχα.

Θ.δ.ο $ΖΕ // = \frac{ΒΓ}{2}$

Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΒΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.
Αρκεί να δείξουμε ότι οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΒΔΕΖ διχοτομούνται, οπότε ΖΕ // = ΒΔ, δηλ. $ΖΕ // = \frac{ΒΓ}{2}$

Θεωρούμε τη Σ.Π + = (δ, 0)
Για τα μέσα Κ και Λ των ΒΕ και ΔΖ ισχύει:
Κ = Β + Ε και Λ = Δ + Ζ
Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι Β + Ε = Δ + Ζ (1)
Για τα μέσα Δ, Ε, Ζ των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ισχύει:
Δ = Β + Γ, Ε = Γ + Α , Ζ = Β + Α
Η (1) λοιπόν γράφεται
Β + (Γ+Α) = (Β + Γ) + (Β + Α) που ισχύει (ιδιότητα Ι).

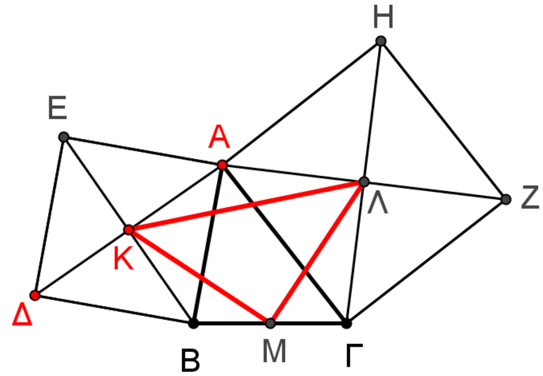
12) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα τετράγωνα του σχήματος ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Κ και Λ είναι τα κέντρα των τετραγώνων αυτών και Μ το μέσο της ΒΓ να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΜΛΚ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις πράξεις

+ = (δ, 0) και · = (1, 90)

Θα αποδείξουμε ότι Μ·Λ=Κ

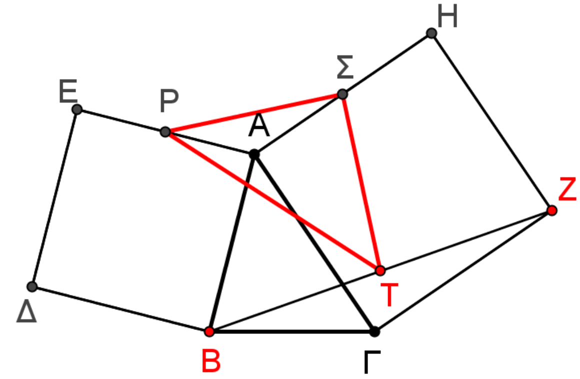


Είναι: Μ·Λ = (Β + Γ)·(Α + Ζ) = Β·Α + Γ·Ζ =
Δ + Α = Κ

13) Εξωτερικά τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Ρ, Σ, Τ τα μέσα των ΑΕ, ΑΗ και ΒΖ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΣΡΤ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις πράξεις
$+ = (\delta, 0)$ και $\cdot = (1, 90)$
Θα δείξουμε ότι $\Sigma \cdot P = T$
Είναι: $\Sigma \cdot P = (H + A) \cdot (A + E) =$
$H \cdot A + A \cdot E = Z + B = T$



14) Εξωτερικά τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ. Αν Ζ, Η, Μ είναι τα μέσα των ΑΔ, ΑΕ και ΒΓ αντίστοιχα, να δειχθεί ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισόπλευρο.

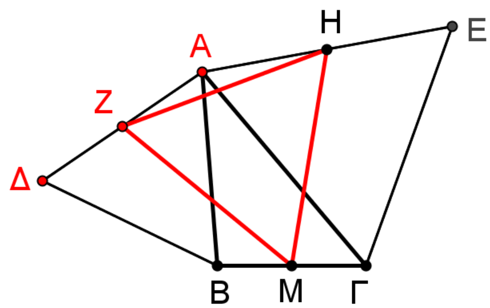
Απόδειξη

Θεωρούμε τις πράξεις:

+ = (δ, 0) και · = (1, 60)

Θα δείξουμε ότι Μ·Η = Ζ (Σχ. 1).

Είναι: Μ·Η = (Β + Γ)·(Α + Ε) = Β·Α + Γ·Ε = Δ + Α = Ζ



Σχ. 1

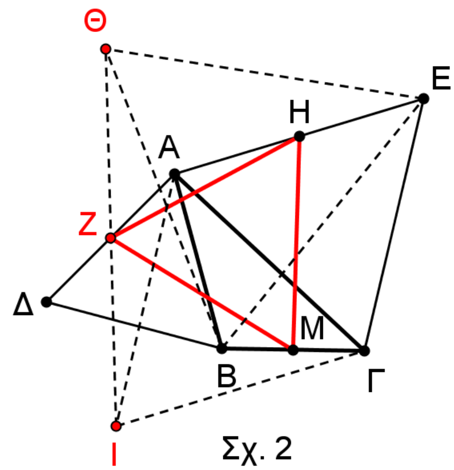
Δημιουργία νέας σχετικής πρότασης

Αν στη σχέση Μ·Η = Ζ γράψουμε Μ = Β + Γ και Η = Ε + Α τότε προκύπτει μια άλλη πρόταση (Σχ. 2).

Πράγματι, η σχέση Μ·Η = Ζ ⇒

(Β + Γ)·(Ε + Α) = Ζ ⇒ Β·Ε + Γ·Α = Ζ

Το Β·Ε είναι η κορυφή Θ του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΕΓ του σχήματος και το Γ·Α είναι η κορυφή Ι του ισοπλεύρου τριγώνου ΓΑΙ του σχήματος. Έτσι η προηγούμενη σχέση γράφεται: Θ + Ι = Ζ που σημαίνει ότι το Ζ είναι το μέσο του τμήματος ΘΙ.



Σχ. 2

15) Θεώρημα Μ. Ναπολέοντα

Εξωτερικά τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΔ, ΓΑΕ και ΑΒΖ. Αν Η, Θ, Ι είναι τα αντίστοιχα κέντρα τους, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΗΘΙ είναι ισόπλευρο.

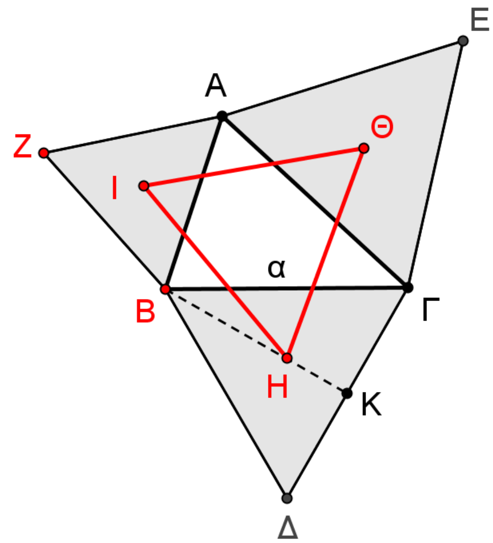
Απόδειξη

Αν ΒΓ = α, τότε είναι

$$\mathrm{BH} = \frac{2}{3}\mathrm{BK} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{B\Delta}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Θεωρούμε τις πράξεις + = (λ, 30) με

$\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και · = (1, 60)



Άρα

Β + Δ = Η , Α + Γ = Θ , Ζ + Β = Ι (1)

Θα δείξουμε ότι Η·Θ = Ι

Πράγματι, Η·Θ = (Β + Δ)·(Α + Γ) =

Β·Α + Δ·Γ = Ζ + Β = Ι

Γενίκευση του θεωρήματος

Από την απόδειξη προκύπτει ότι τα Η, Θ, Ι δεν είναι απαραίτητο να είναι τα κέντρα των ισοπλεύρων τριγώνων ΒΓΔ, ΓΑΕ, ΑΒΖ, αρκεί να ισχύουν οι σχέσεις (1) με οποιαδήποτε άλλη Σ.Π

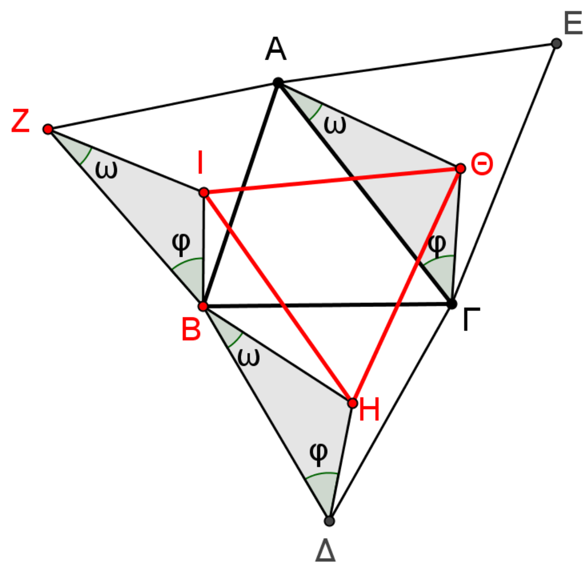
Αυτό μπορεί να γίνει με μια Σ.Π

+ = (λ, ω) ως εξής:

Σχηματίζουμε τα όμοια τρίγωνα ΒΔΗ, ΑΓΘ και ΖΒΙ του σχήματος με

$$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{B\Delta}} = \frac{\mathrm{A\Theta}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{ZI}}{\mathrm{ZB}} = \lambda \text{ και}$$

∡ΔΒΗ = ∡ΓΑΘ = ∡ΒΖΙ = ω, οπότε ισχύουν οι σχέσεις (1) και το τρίγωνο ΗΘΙ είναι ισόπλευρο.



16) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι όμοια με Α = Α′, Β = Β′, Γ = Γ′ με τον ίδιο προσανατολισμό. Αν Α″, Β″, Γ″ είναι τα μέσα των ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι και το τρίγωνο Α″Β″Γ″ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

Απόδειξη:

Έστω $\measuredangle B A \Gamma = \measuredangle B' A' \Gamma' = \omega$ και $\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A'B'} = \lambda$ δηλ. $A\Gamma = \lambda \cdot AB$ και $A'\Gamma' = \lambda \cdot A'B'$

Θεωρούμε τις πράξεις: $+ = (\delta, 0)$ και $\cdot = (\lambda, \omega)$

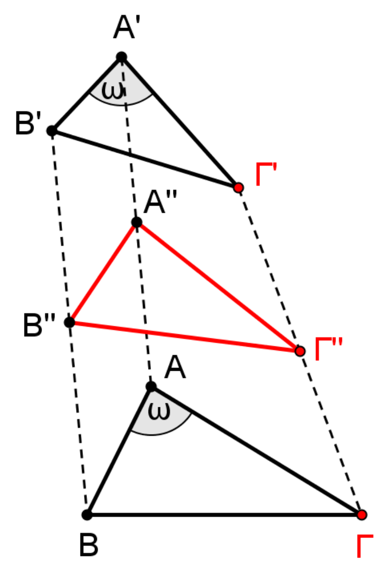
Θα δείξουμε ότι $A'' \cdot B'' = \Gamma''$

Είναι: $A'' \cdot B'' = (A + A') \cdot (B + B') = A \cdot B + A' \cdot B' = \Gamma + \Gamma' = \Gamma''$

και η πρόταση αποδείχθηκε.

Γενίκευση της πρότασης

Από την απόδειξη προκύπτει γενικότερα ότι τα σημεία A'', B'', Γ'' δεν είναι απαραίτητο να είναι τα μέσα των ΑΑ′, ΒΒ′ και ΓΓ′, αρκεί να διαιρούν τα τμήματα αυτά σε ίσους λόγους, δηλ. $\frac{\overrightarrow{A''A}}{\overrightarrow{A''A'}} = \frac{\overrightarrow{B''B}}{\overrightarrow{B''B'}} = \frac{\overrightarrow{\Gamma''\Gamma}}{\overrightarrow{\Gamma''\Gamma'}}$, οπότε θα ισχύει και $\frac{\overrightarrow{AA''}}{\overrightarrow{AA'}} = \frac{\overrightarrow{BB''}}{\overrightarrow{BB'}} = \frac{\overrightarrow{\Gamma\Gamma''}}{\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}} = \mu$. Ως πράξη $+$ θεωρούμε τότε την $+ = (\mu, 0)$.

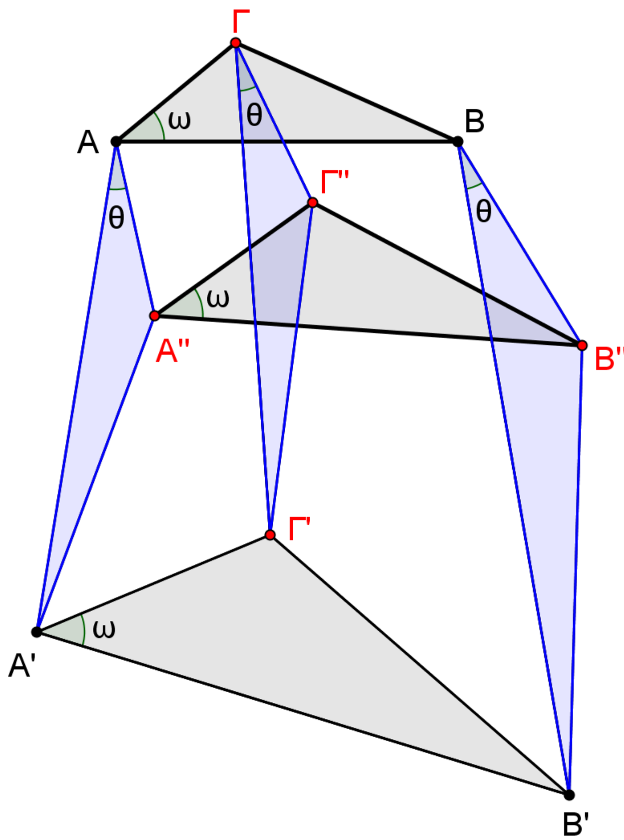


Η παραπάνω απόδειξη ισχύει φυσικά και αν κάποια σημεία συμπίπτουν.

Περαιτέρω γενίκευση (Θεώρημα των Petersen – Schoute)

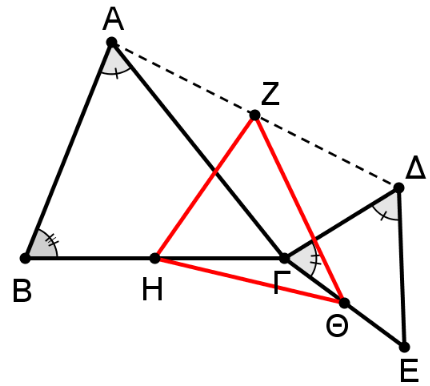
Αν σαν πράξη + πάρουμε την + = (μ, θ) όπου $\mu = \frac{AA''}{AA'}$ έχουμε την παρακάτω ακόμη γενικότερη πρόταση:

Έστω δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με ομόλογες κορυφές (Α, Α′), (Β, Β′), (Γ, Γ′) και τον ίδιο προσανατολισμό. Με πλευρές τις ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ κατασκευάζουμε τα όμοια τρίγωνα ΑΑ′Α″, ΒΒ′Β″, ΓΓ′Γ″ με ομόλογες κορυφές (Α, Β, Γ), (Α′, Β′, Γ΄), (Α″, Β″, Γ″) και τον ίδιο προσανατολισμό.
Τότε ότι το τρίγωνο Α″Β″Γ″ είναι όμοιο με το ΑΒΓ.



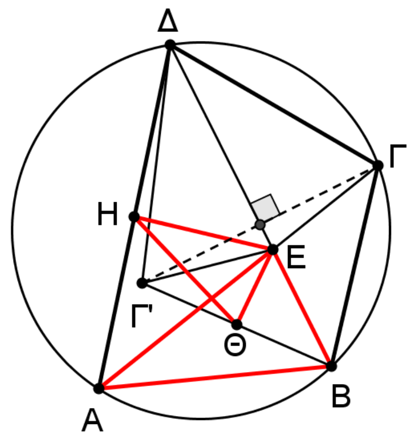
Δημιουργία ειδικών προτάσεων (πορίσματα)
Με τη βοήθεια της παραπάνω γενικής πρότασης μπορούμε να δημιουργήσουμε ειδικότερες προτάσεις όπως οι επόμενες (i) και (ii).

i) Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ είναι όμοια με ομόλογες κορυφές (Α, Δ) , (Β, Γ) και (Γ, Ε) .
Αν Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ, ΒΓ και ΓΕ αντίστοιχα, τότε το τρίγωνο ΖΗΘ είναι όμοιο με το ΑΒΓ.



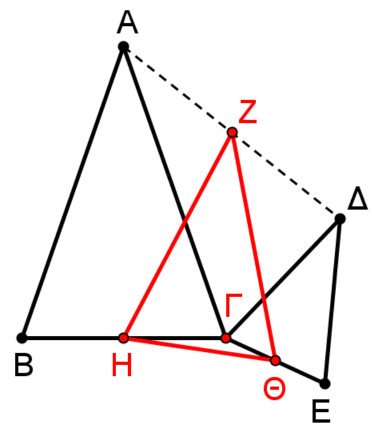
Είναι ειδική περίπτωση της προηγούμενης γενικότερης πρότασης, διότι για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ είναι όμοια με ομόλογες κορυφές (Α, Δ), (Β, Γ) και (Γ, Ε) και οι κορυφές Ζ, Η, Θ του τριγώνου ΖΗΘ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ, ΒΓ και ΓΕ αντίστοιχα.

ii) Σε κύκλο είναι εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο Ε. Έστω Γ′ το συμμετρικό του Γ ως προς τη διαγώνιο ΒΔ και Η και Θ τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ′ αντίστοιχα.
Τότε τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΕΘΗ είναι όμοια.



Πράγματι, τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΕΓΔ είναι όμοια. Το τρίγωνο ΕΓ′Δ είναι ίσο με το ΕΓΔ. Στα όμοια τρίγωνα ΕΑΒ και ΕΔΓ′ οι ομόλογες κορυφές είναι οι (Ε, Ε), (Α, Δ) και (Β, Γ′) και οι κορυφές Ε, Η, Θ του τριγώνου ΕΗΘ είναι τα μέσα των τμημάτων ΕΕ, ΑΔ και ΒΓ′ αντίστοιχα. Έτσι το τρίγωνο ΕΗΘ είναι όμοιο με το ΕΑΒ.

Ειδική περίπτωση της παραπάνω πρότασης είναι και η παράδειγμα 9 που δημιουργήσαμε στο $1^{ο}$ μέρος αυτής της εργασίας. Υπενθυμίζουμε το σχήμα.



17) ΧΡΗΣΙΜΗ ΠΡΟΤΑΣΗ (Γενίκευση του παραδείγματος 1)
Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε , Ζ , Η , Θ των πλευρών του ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, τέτοια ώστε:

$$\mathbf{\frac{AE}{AB}=\frac{\Delta H}{\Delta \Gamma}=\lambda \;\; και \;\; \frac{A\Theta}{A\Delta}=\frac{BZ}{B\Gamma}=\mu}$$

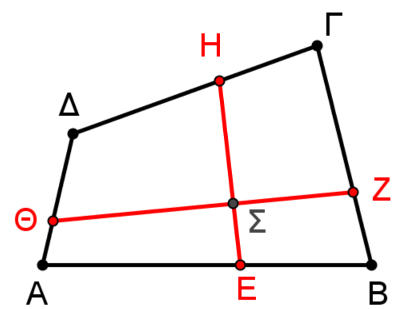
Αν Σ = ΕΗ ∩ ΘΖ, να αποδειχθεί ότι: $\mathbf{\dfrac{\Theta\Sigma}{\Theta Z}=\lambda \;\; και \;\; \dfrac{E\Sigma}{EH}=\mu}$

Επειδή $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\Delta H}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{AE}{AB-AE}=\dfrac{\Delta H}{\Delta\Gamma-\Delta H} \Leftrightarrow \dfrac{EA}{EB}=\dfrac{H\Delta}{H\Gamma}=\lambda_1$

Η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής:

Αν $\mathbf{\dfrac{EA}{EB}=\dfrac{H\Delta}{H\Gamma}=\lambda_1}$ **και** $\mathbf{\dfrac{\Theta A}{\Theta\Delta}=\dfrac{ZB}{Z\Gamma}=\mu_1}$ **τότε** $\mathbf{\dfrac{\Sigma\Theta}{\Sigma Z}=\lambda_1}$ **και** $\mathbf{\dfrac{\Sigma E}{\Sigma H}=\mu_1}$

Με την δεύτερη γραφή η πρόταση είναι πιο ευκολομνημόνευτη.



Απόδειξη
Έστω οι Σ.Π   + = (λ, 0) και · = (μ, 0).
Με τις πράξεις αυτές είναι:
Ε = Α + Β,   Η = Δ + Γ,   Ζ = Β·Γ,   Θ = Α·Δ   (1)
Θα αποδείξουμε ότι Σ = Θ + Ζ   και   Σ = Ε·Η   δηλ.
Ε·Η = Θ + Ζ ή, λόγω των σχέσεων (1) αρκεί να αποδείξουμε ότι: (Α + Β)·(Δ + Γ) = Α·Δ + Β·Γ που ισχύει (Θ.Θ)

Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης με την κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν είναι καθόλου εύκολη.

Γενίκευση
Από την απόδειξη προκύπτει ότι η πρόταση δεν ισχύει μόνο για σημεία των πλευρών ενός κυρτού τετραπλεύρου, αλλά η ίδια ακριβώς απόδειξη ισχύει γενικότερα ως εξής:

Δίνονται 4 σημεία Α, Β, Γ, Δ και τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ των ευθειών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, ώστε $\mathbf{\dfrac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AB}}=\dfrac{\overrightarrow{\Delta H}}{\overrightarrow{\Delta\Gamma}}=\lambda}$ **και** $\mathbf{\dfrac{\overrightarrow{A\Theta}}{\overrightarrow{A\Delta}}=\dfrac{\overrightarrow{BZ}}{\overrightarrow{B\Gamma}}=\mu}$**.**

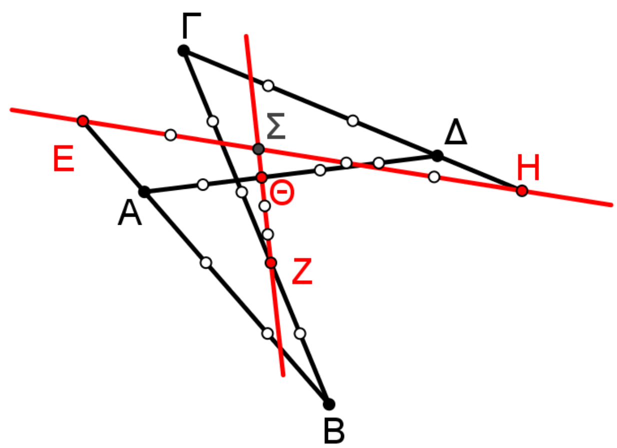
Αν οι ευθείες ΕΗ και ΘΖ τέμνονται στο Σ, τότε $\mathbf{\dfrac{\overrightarrow{\Theta\Sigma}}{\overrightarrow{\Theta Z}}=\lambda}$ **και** $\mathbf{\dfrac{\overrightarrow{E\Sigma}}{\overrightarrow{EH}}=\mu}$

Ισοδύναμα: Αν $\frac{\overrightarrow{\mathbf{EA}}}{\overrightarrow{\mathbf{EB}}}=\frac{\overrightarrow{\mathbf{H\Delta}}}{\overrightarrow{\mathbf{H\Gamma}}}=\boldsymbol{\lambda_1}$ και $\frac{\overrightarrow{\mathbf{\Theta A}}}{\overrightarrow{\mathbf{\Theta\Delta}}}=\frac{\overrightarrow{\mathbf{ZB}}}{\overrightarrow{\mathbf{Z\Gamma}}}=\boldsymbol{\mu_1}$ και οι ευθείες ΕΗ και ΘΖ τέμνονται στο Σ, τότε $\frac{\overrightarrow{\mathbf{\Sigma\Theta}}}{\overrightarrow{\mathbf{\Sigma Z}}}=\boldsymbol{\lambda_1}$ και $\frac{\overrightarrow{\mathbf{\Sigma E}}}{\overrightarrow{\mathbf{\Sigma H}}}=\boldsymbol{\mu_1}$

Π.χ στο παρακάτω σχήμα είναι $\frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{EB}}=\frac{\overrightarrow{H\Delta}}{\overrightarrow{H\Gamma}}=\frac{1}{4}$ και $\frac{\overrightarrow{\Theta A}}{\overrightarrow{\Theta\Delta}}=\frac{\overrightarrow{ZB}}{\overrightarrow{Z\Gamma}}=-\frac{2}{3}$. Οι ευθείες ΕΗ και ΘΖ τέμνονται στο Σ και ισχύει $\frac{\overrightarrow{\Sigma\Theta}}{\overrightarrow{\Sigma Z}}=\frac{1}{4}$ και $\frac{\overrightarrow{\Sigma E}}{\overrightarrow{\Sigma H}}=-\frac{2}{3}$

Σημείωση

Για την απομνημόνευση της πρότασης στη γενική περίπτωση, σχεδιάζουμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ως κορυφές κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, τα σημεία των διαιρέσεων τα κάνουμε εσωτερικά των πλευρών του ΑΒΓΔ και γράφουμε τη σχέση για το κυρτό τετράπλευρο όπως κάναμε πριν τη γενίκευση. Τότε η ίδια σχέση θα ισχύει για οποιαδήποτε διάταξη των σημείων Α, Β, Γ, Δ και των σημείων των διαιρέσεων.



Στο επόμενο σχήμα, τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και η πρόταση συνεχίζει να ισχύει.

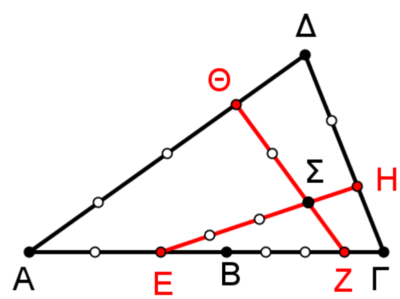
Στο σχήμα αυτό είναι:

$$\frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{EB}}=\frac{\overrightarrow{H\Delta}}{\overrightarrow{H\Gamma}}=-2=\lambda \text{ και}$$

$$\frac{\overrightarrow{\Theta A}}{\overrightarrow{\Theta\Delta}}=\frac{\overrightarrow{ZB}}{\overrightarrow{Z\Gamma}}=-3=\mu$$

Οι ευθείες ΕΗ και ΖΘ τέμνονται στο Σ και ισχύει

$$\frac{\overrightarrow{\Sigma\Theta}}{\overrightarrow{\Sigma Z}}=\lambda=-2 \text{ και } \frac{\overrightarrow{\Sigma E}}{\overrightarrow{\Sigma H}}=\mu=-3$$



18) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ , τα σημεία Δ , Ζ της πλευράς ΑΒ και τα σημεία Ε , Η της πλευράς ΑΓ τέτοια ώστε: $\mathbf{\frac{Β\Delta}{ΒΑ} = \frac{ΑΕ}{Α\Gamma} = \lambda}$ **και** $\mathbf{\frac{ΒΖ}{ΒΑ} = \frac{ΑΗ}{Α\Gamma} = \mu}$ **. Αν Σ είναι το σημείο τομής των ΔΕ και ΖΗ να αποδειχθεί ότι:** $\mathbf{\frac{\Delta\Sigma}{\Delta Ε} = \mu}$ **και** $\mathbf{\frac{Ζ\Sigma}{ΖΗ} = \lambda}$

Η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί ισοδύναμα ως εξής:

Αν $\mathbf{\frac{\Delta Β}{\Delta Α} = \frac{ΕΑ}{Ε\Gamma} = \lambda_1}$ **και** $\mathbf{\frac{ΖΒ}{ΖΑ} = \frac{ΗΑ}{Η\Gamma} = \mu_1}$ **τότε** $\mathbf{\frac{\Sigma\Delta}{\Sigma Ε} = \mu_1}$ **και** $\mathbf{\frac{\Sigma Ζ}{\Sigma Η} = \lambda_1}$

Με την δεύτερη γραφή η πρόταση είναι πιο ευκολομνημόνευτη.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω οι Σ.Π   + = (λ, 0)   και   · = (μ, 0).

Θα αποδείξουμε ότι

Σ = Δ·Ε και Σ = Ζ + Η

Αρκεί να δείξουμε ότι Δ·Ε = Ζ + Η   (1)

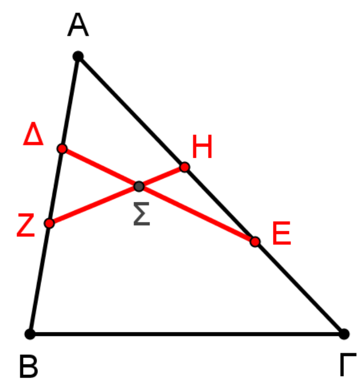
Σύμφωνα με τις παραπάνω πράξεις είναι:

Είναι:

Δ = Β + Α,   Ε = Α + Γ,   Ζ = Β·Α και   Η = Α·Γ

Η (1) λοιπόν γράφεται:

(Β + Α)·(Α + Γ) = Β·Α + Α·Γ που ισχύει (Θ.Θ)



Τονίζουμε ότι η πρόταση ισχύει και αν τα σημεία Δ, Ε, Ζ, Η δεν είναι σημεία των πλευρών του τριγώνου, αλλά σημεία των ευθειών των πλευρών του, διότι στη σημειακή πράξη (λ, θ) μπορεί να είναι και λ>1 ή λ<0. Η ιδιότητα Ι και το Θ.Θ ισχύουν για κάθε Σ.Π.

Στη γενική περίπτωση η πρόταση ισχύει ως εξής:

Αν $\mathbf{\frac{\overrightarrow{Β\Delta}}{\overrightarrow{ΒΑ}} = \frac{\overrightarrow{ΑΕ}}{\overrightarrow{Α\Gamma}} = \lambda}$ **και** $\mathbf{\frac{\overrightarrow{ΒΖ}}{\overrightarrow{ΒΑ}} = \frac{\overrightarrow{ΑΗ}}{\overrightarrow{Α\Gamma}} = \mu}$ **τότε** $\mathbf{\frac{\overrightarrow{\Delta\Sigma}}{\overrightarrow{\Delta Ε}} = \mu}$ **και** $\mathbf{\frac{\overrightarrow{Ζ\Sigma}}{\overrightarrow{ΖΗ}} = \lambda}$

Ισοδύναμα, αν $\mathbf{\frac{\overrightarrow{\Delta Β}}{\overrightarrow{\Delta Α}} = \frac{\overrightarrow{ΕΑ}}{\overrightarrow{Ε\Gamma}} = \lambda_1}$ **και** $\mathbf{\frac{\overrightarrow{ΖΒ}}{\overrightarrow{ΖΑ}} = \frac{\overrightarrow{ΗΑ}}{\overrightarrow{Η\Gamma}} = \mu_1}$ **, τότε** $\mathbf{\frac{\overrightarrow{\Sigma\Delta}}{\overrightarrow{\Sigma Ε}} = \mu_1}$ **και** $\mathbf{\frac{\overrightarrow{\Sigma Ζ}}{\overrightarrow{\Sigma Η}} = \lambda_1}$

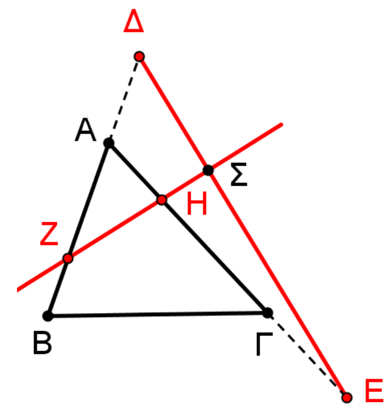
Η προηγούμενη απόδειξη ισχύει και για την γενική περίπτωση.

Π.χ στο διπλανό σχήμα είναι:

$$\frac{\overrightarrow{\Delta B}}{\overrightarrow{\Delta A}} = \frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{E\Gamma}} = 3 = \lambda \text{ και } \frac{\overrightarrow{ZB}}{\overrightarrow{ZA}} = \frac{\overrightarrow{HA}}{\overrightarrow{H\Gamma}} = -\frac{1}{2} = \mu$$

Οι ευθείες ΔΕ και ΖΗ τέμνονται στο Σ και ισχύει πάλι

$$\frac{\overrightarrow{\Sigma\Delta}}{\overrightarrow{\Sigma E}} = -\frac{1}{2} = \mu \text{ και } \frac{\overrightarrow{\Sigma Z}}{\overrightarrow{\Sigma H}} = 3 = \lambda$$



Η παραπάνω πρόταση είναι χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις.

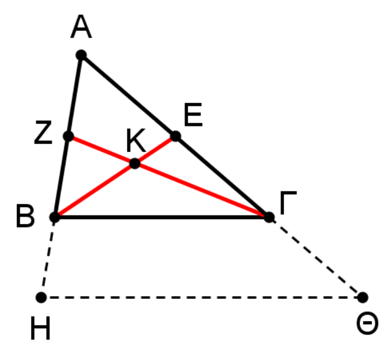
Σαν εφαρμογή της πρότασης αυτής αποδεικνύουμε ότι:

Οι διάμεσοι κάθε τριγώνου τέμνονται στο ίδιο σημείο που απέχει από κάθε κορυφή τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

Απόδειξη

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΒΕ και ΓΖ που τέμνονται στο σημείο Κ.
Στις προεκτάσεις των ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Η και Θ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΒΗ = ΒΖ και ΓΘ = ΓΕ.
Τότε στο τρίγωνο ΑΗΘ με τα σημεία διαιρέσεων Ζ και Β στην πλευρά ΑΗ και τα αντίστοιχα σημεία Γ και Ε στην πλευρά ΑΘ, έχουμε:

$$\frac{ZH}{ZA} = \frac{\Gamma A}{\Gamma\Theta} = 2 = \lambda \quad \text{και} \quad \frac{BH}{BA} = \frac{EA}{E\Theta} = \frac{1}{2} = \mu$$



Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, είναι

$$\frac{KZ}{K\Gamma} = \mu = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \frac{KB}{KE} = \lambda = 2$$

Άρα $BK = \frac{2}{3}BE$ και $\Gamma K = \frac{2}{3}\Gamma Z$

19) Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ (κυρτό ή μη κυρτό) και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

Κατασκευάζουμε τα όμοια τρίγωνα ΕΖΗ, ΑΓΘ, ΒΔΙ με ∡Ε = ∡Α = ∡Β,

∡Ζ = ∡Γ = ∡Δ με τον ίδιο προσανατολισμό.

Να αποδειχθεί ότι ο Η είναι το μέσο του ΘΙ.

(Η πρόταση αυτή είναι το αντίστροφο της πρότασης 16)

Απόδειξη

Έστω $\frac{ΕΗ}{ΕΖ} = \frac{ΑΘ}{ΑΓ} = \frac{ΒΙ}{ΒΔ} = λ$ και

∡ΖΕΗ = ∡ΓΑΘ = ∡ΔΒΙ = α

Θεωρούμε τις Σ.Π + = (δ, 0) και · = (λ, α)

Τότε είναι: Ε = Α + Β , Ζ = Γ + Δ , Η = Ε·Ζ ,

Θ = Α·Γ , Ι = Β·Δ

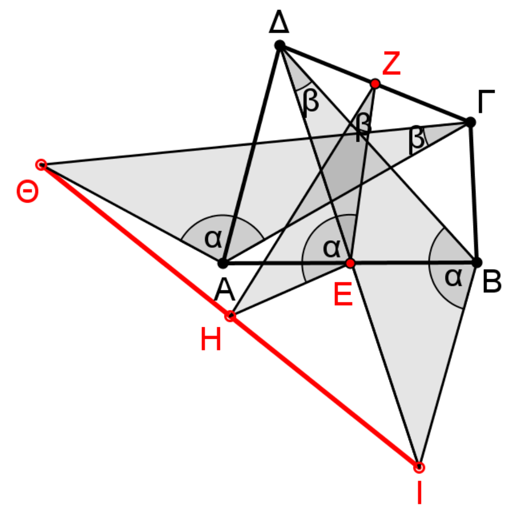
Για να αποδείξουμε ότι το Η είναι μέσο του ΘΙ, αρκεί να δείξουμε ότι Θ + Ι = Η.

Πράγματι, είναι:

Θ + Ι = Α·Γ + Β·Δ = (Α + Β)·(Γ + Δ) =

Ε.Ζ = Η

Άρα το Η είναι το μέσο του ΘΙ.



20) Τα σημεία Α, Β, Γ με τη σειρά αυτή ανήκουν σε μια ευθεία (ε) και τα σημεία Α′ , Β′ , Γ′ με τη σειρά αυτή ανήκουν σε μια άλλη ευθεία (ε′) . Ισχύει $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{A'\Gamma'}} = \lambda$

Στρέφουμε τα σημεία Α′, Β′ , Γ′ γύρω από τα Α, Β , Γ αντίστοιχα κατά γωνία θ κατά την ίδια φορά. Έστω Α′′ , Β′′ , Γ′′ οι αντίστοιχες εικόνες.

Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α′′ , Β′′ , Γ′′ είναι συνευθειακά και $\frac{\mathrm{A''B''}}{\mathrm{A''\Gamma''}} = \lambda$

Απόδειξη

Θεωρούμε τις Σ.Π + = (λ, 0) και · = (1, θ)

Είναι τότε Α + Γ = Β , Α′ + Γ′ = Β′, Α·Α′ = Α′′, Β·Β′ = Β′′, Γ·Γ′ = Γ′′

Πρέπει να αποδείξουμε ότι Β′′ = Α′′ + Γ′′

Είναι: Β′′ = Β·Β′ = (Α + Γ)·(Α′ + Γ′) = Α·Α′ + Γ·Γ′ = Α′′ + Γ′′

Η τελευταία σχέση αποδεικνύει το ζητούμενο.

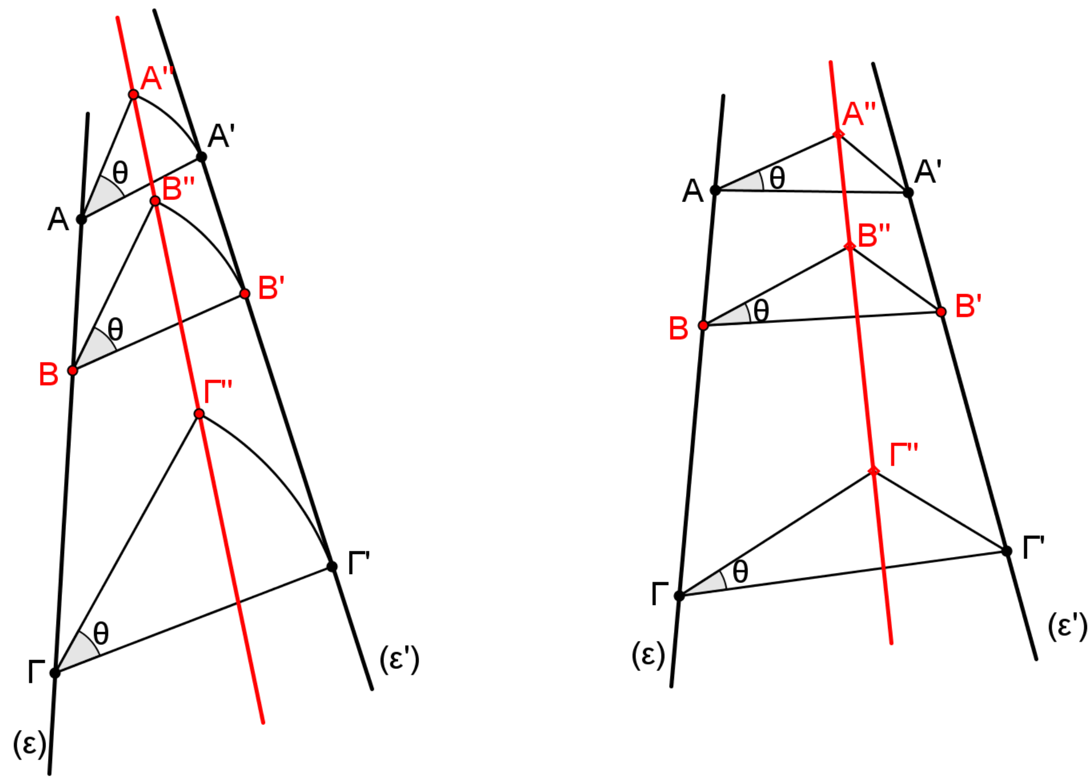
Γενίκευση

Αν τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, καθώς επίσης και τα Α′ , Β′, Γ′ και ισχύει $\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}}{\overrightarrow{\mathrm{A'\Gamma'}}} = \lambda$ και τα τρίγωνα ΑΑ′Α′′, ΒΒ′Β′′, ΓΓ′Γ′′ είναι όμοια με ομόλογες κορυφές (Α, Α′, Α′′), (Β, Β′, Β′′) και (Γ, Γ′, Γ′′) και τον ίδιο προσανατολισμό, τότε τα Α′′, Β′′, Γ′′ είναι συνευθειακά και $\frac{\overrightarrow{\mathrm{A''B''}}}{\overrightarrow{\mathrm{A''\Gamma''}}} = \lambda$

Απόδειξη

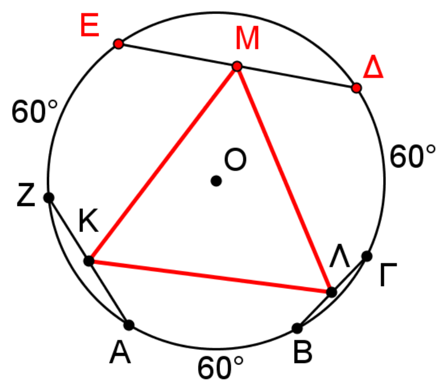
Έστω $\frac{\mathrm{AA''}}{\mathrm{AA'}} = \frac{\mathrm{BB''}}{\mathrm{BB'}} = \frac{\mathrm{\Gamma\Gamma''}}{\mathrm{\Gamma\Gamma'}} = \mu$ και $\measuredangle \mathrm{A} = \measuredangle \mathrm{B} = \measuredangle \Gamma = \theta$

Αρκεί να θεωρήσουμε τώρα ως πράξη · την · = (μ, θ) και να αντιγράψουμε την προηγούμενη απόδειξη.

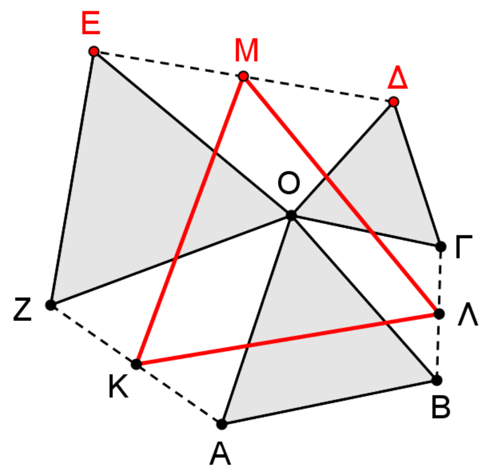

A''
A'
θ
A
B''
B'
θ
B
Γ''
Γ'
θ
Γ
(ε')
(ε)
A''
A
θ
A'
B''
B
θ
B'
Γ''
Γ'
Γ
θ
(ε')
(ε)

21) Σε κύκλο Ο θεωρούμε τα τόξα $AB = \Gamma\Delta = EZ = 60^o$ του σχήματος. Έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των χορδών ΖΑ, ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα.
Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

Απόδειξη



Σχ. 1



Σχ. 2

Θεωρούμε τις πράξεις $+ = (\delta, 0)$ και $\cdot = (1, 60)$
Θα δείξουμε ότι $K{\cdot}\Lambda = M$ (Σχ. 1)

Πράγματι: $K{\cdot}\Lambda = (Z + A){\cdot}(\Gamma + B) = \underline{Z{\cdot}\Gamma + A{\cdot}B} = Z{\cdot}\Gamma + O = Z{\cdot}\Gamma + O{\cdot}O =$
$(Z + O){\cdot}(\Gamma + O) = \underline{\underline{(Z + O){\cdot}(O + \Gamma)}} = Z{\cdot}O + O{\cdot}\Gamma = E + \Delta = M$

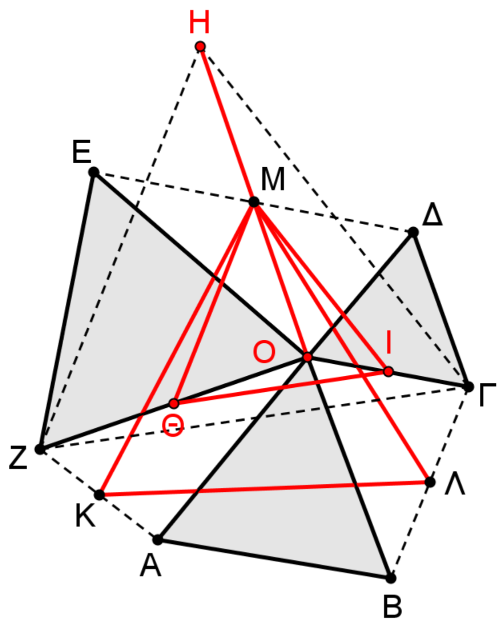
Γενίκευση της πρότασης
Χωρίς καμία αλλαγή γίνεται και η απόδειξη της γενικότερης πρότασης κατά την οποία τα ισόπλευρα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ και ΟΕΖ είναι άνισα, αρκεί οι γωνίες ∡ΑΟΒ, ∡ΓΟΔ και ∡ΕΟΖ να διαγράφονται κατά την ίδια φορά (Σχ. 2).

Από την απόδειξη προκύπτει ότι τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ δεν είναι απαραίτητο να είναι διαδοχικά, αρκεί τα τόξα ΑΒ, ΓΔ και ΕΖ να διαγράφονται κατά την ίδια φορά.

Επίσης από την απόδειξη προκύπτουν και τα εξής ενδιαφέροντα:

Δημιουργία νέων σχετικών προτάσεων
Από την 1η υπογράμμιση, δηλ. από τη σχέση $\underline{Z{\cdot}\Gamma + A{\cdot}B} = M$ προκύπτουν τα εξής:

Το Ζ·Γ είναι η κορυφή Η του ισοπλεύρου τριγώνου ΖΓΗ και το Α·Β είναι το σημείο Ο. Η σχέση λοιπόν γίνεται: Η + Ο = Μ που σημαίνει ότι το Μ είναι το μέσο του ΟΗ.



Από την $2^{η}$ υπογράμμιση, δηλ. από τη σχέση (Ζ + Ο)·(Ο + Γ) = Μ προκύπτουν (χωρίς τη χρήση της προηγούμενης παρατήρησης) τα εξής:
Το Ζ + Ο είναι το μέσο Θ του τμήματος ΟΖ και το Ο + Γ είναι το μέσο Ι του τμήματος ΟΓ.
Η σχέση λοιπόν γίνεται Θ·Ι = Μ που σημαίνει ότι και το τρίγωνο ΘΙΜ είναι ισόπλευρο.

Από τη σχέση Κ·Λ = Μ που αποδείξαμε, αν την γράψουμε ως
(Ζ + Α)·(Β + Γ) = Μ ή Ζ·Β + Α·Γ = Μ προκύπτει ότι το Μ είναι το μέσο του ευθ. τμήματος που ενώνει τις άλλες κορυφές των ισοπλεύρων τριγώνων με πλευρές τις ΖΒ και ΑΓ.
Και γενικότερα, αν στη σχέση Κ·Λ = Μ αντικαταστήσουμε τα σημεία Κ και Λ με διάφορους συνδυασμούς πράξεων αποδεικνύουμε και άλλες προτάσεις σχετικές με το σχήμα.

22) Γενίκευση της πρότασης του ισοπλεύρου τριγώνου

Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ και ΟΕΖ του σχήματος είναι όμοια με ομόλογες κορυφές όπως στο σχήμα και με τον ίδιο προσανατολισμό.

Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των τμημάτων ΔΕ, ΖΑ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι όμοιο με το ΟΑΒ.

Απόδειξη

Έστω $\frac{OB}{OA} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta O} = \frac{EO}{EZ} = \lambda$

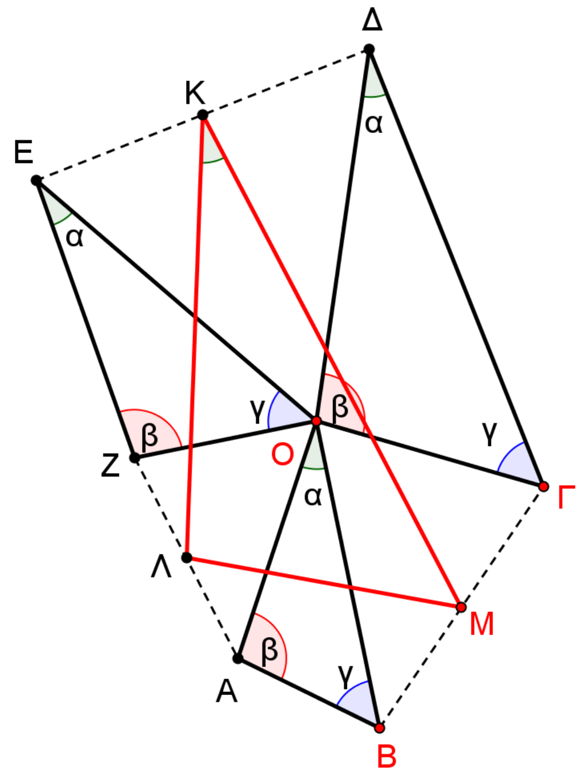
Θεωρούμε τις Σ.Π

$+ = (\delta, 0)$ και $\cdot = (\lambda, \alpha)$.

Τότε $O \cdot A = B$, $\Delta \cdot O = \Gamma$, $E \cdot Z = O$

Θα αποδείξουμε ότι $K \cdot \Lambda = M$

Πράγματι: $K \cdot \Lambda = (\Delta + E) \cdot (A + Z) =$
$\Delta \cdot A + E \cdot Z = \Delta \cdot A + O = \Delta \cdot A + O \cdot O =$
$(\Delta + O) \cdot (A + O) = (\Delta + O) \cdot (O + A) =$
$\Delta \cdot O + O \cdot A = \Gamma + B = M$ η οποία σημαίνει
ότι $\frac{KM}{K\Lambda} = \lambda$ και $\measuredangle \Lambda K M = \alpha$, άρα το
τρίγωνο ΚΛΜ είναι όμοιο με το ΟΑΒ



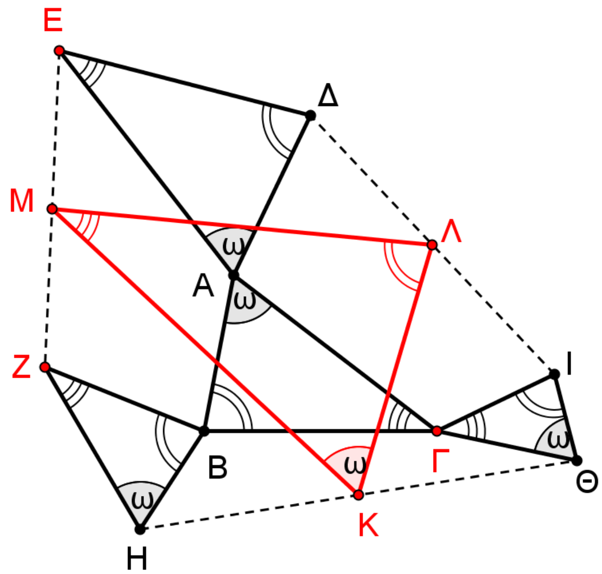
23) Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ, ΗΒΖ, ΘΙΓ είναι όμοια με ομόλογες κορυφές όπως δείχνει το σχήμα και τον ίδιο προσανατολισμό.
Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των ΗΘ, ΙΔ και ΕΖ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι όμοιο με το ΑΒΓ.

Απόδειξη

Έστω $\measuredangle ΒΑΓ = \measuredangle ΔΑΕ = \measuredangle ΒΗΖ = \measuredangle ΙΘΓ = ω$ και

$$\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΔ} = \frac{ΗΖ}{ΗΒ} = \frac{ΘΓ}{ΘΙ} = λ$$

Θεωρούμε τις Σ.Π $+ = (δ, 0)$ και $\cdot = (λ, ω)$



Τότε είναι: $Η + Θ = Κ$, $Ι + Δ = Λ$, $Ε + Ζ = Μ$ και
$Α \cdot Β = Γ$, $Α \cdot Δ = Ε$, $Η \cdot Β = Ζ$, $Θ \cdot Ι = Γ$

Θα αποδείξουμε ότι $Κ.Λ = Μ$ που σημαίνει $\frac{ΚΜ}{ΚΛ} = λ$ και $\measuredangle ΛΚΜ = ω$
άρα το τρίγωνο ΚΛΜ είναι όμοιο με το ΑΒΓ.

Πράγματι, έχουμε:

$Κ \cdot Λ = (Η + Θ) \cdot (Δ + Ι) = Η \cdot Δ + Θ \cdot Ι = Η \cdot Δ + Γ = Η \cdot Δ + Α \cdot Β =$
$(Η + Α) \cdot (Δ + Β) = (Η + Α) \cdot (Β + Δ) = Η \cdot Β + Α \cdot Δ = Ζ + Ε = Μ$

24) ΜΙΑ ΧΡΗΣΙΜΗ ΠΡΟΤΑΣΗ:

Αν Α, Β, Γ, Δ είναι τυχαία σημεία και μια ευθεία (ε) τέμνει τις ευθείες ΑΒ , ΓΔ , ΑΓ και ΒΔ στα σημεία Ε , Ζ , Η και Θ αντίστοιχα ώστε $\dfrac{\overrightarrow{ΕΑ}}{\overrightarrow{ΕΒ}}=\dfrac{\overrightarrow{ΖΓ}}{\overrightarrow{ΖΔ}}$ τότε $\dfrac{\overrightarrow{ΗΑ}}{\overrightarrow{ΗΓ}}=\dfrac{\overrightarrow{ΘΒ}}{\overrightarrow{ΘΔ}}$

Απόδειξη

$$\frac{\overrightarrow{ΕΑ}}{\overrightarrow{ΕΒ}}=\frac{\overrightarrow{ΖΓ}}{\overrightarrow{ΖΔ}}\Rightarrow\frac{\overrightarrow{ΑΕ}}{\overrightarrow{ΕΒ}}=\frac{\overrightarrow{ΓΖ}}{\overrightarrow{ΖΔ}}\Rightarrow\frac{\overrightarrow{ΑΕ}}{\overrightarrow{ΑΕ}+\overrightarrow{ΕΒ}}=\frac{\overrightarrow{ΓΖ}}{\overrightarrow{ΓΖ}+\overrightarrow{ΖΔ}}\Rightarrow\frac{\overrightarrow{ΑΕ}}{\overrightarrow{ΑΒ}}=\frac{\overrightarrow{ΓΖ}}{\overrightarrow{ΓΔ}}=\lambda$$

Θεωρούμε το σημείο Θ′ της ευθείας ΒΔ τέτοιο ώστε $\dfrac{\overrightarrow{Θ'Β}}{\overrightarrow{Θ'Δ}}=\dfrac{\overrightarrow{ΗΑ}}{\overrightarrow{ΗΓ}}$

Θα αποδείξουμε ότι Θ′ = Θ

$$\frac{\overrightarrow{Θ'Β}}{\overrightarrow{Θ'Δ}}=\frac{\overrightarrow{ΗΑ}}{\overrightarrow{ΗΓ}}\Rightarrow\frac{\overrightarrow{ΑΗ}}{\overrightarrow{ΗΓ}}=\frac{\overrightarrow{ΒΘ'}}{\overrightarrow{Θ'Δ}}\Rightarrow\frac{\overrightarrow{ΑΗ}}{\overrightarrow{ΑΗ}+\overrightarrow{ΗΓ}}=\frac{\overrightarrow{ΒΘ'}}{\overrightarrow{ΒΘ'}+\overrightarrow{Θ'Δ}}\Rightarrow\frac{\overrightarrow{ΑΗ}}{\overrightarrow{ΑΓ}}=\frac{\overrightarrow{ΒΘ'}}{\overrightarrow{ΒΔ}}=\mu$$

Θεωρούμε τις Σ.Π $+ = (\lambda, 0)$ και $\cdot = (\mu, 0)$

Ισχύει: Α + Β = Ε , Γ + Δ = Ζ , Α·Γ = Η , Β·Δ = Θ′

Όμως: (Α + Β)·(Γ + Δ) = Α·Γ + Β.Δ ⇒ Ε·Ζ = Η + Θ′

Επειδή Ε·Ζ ∈ ΕΖ δηλ. Ε·Ζ ∈ ε ⇒ Η + Θ′ ∈ ε και επειδή Η ∈ ε ⇒ Θ′ ∈ ε

Άρα Θ′ ∈ ε ∩ ΒΔ = Θ και η πρόταση αποδείχθηκε.

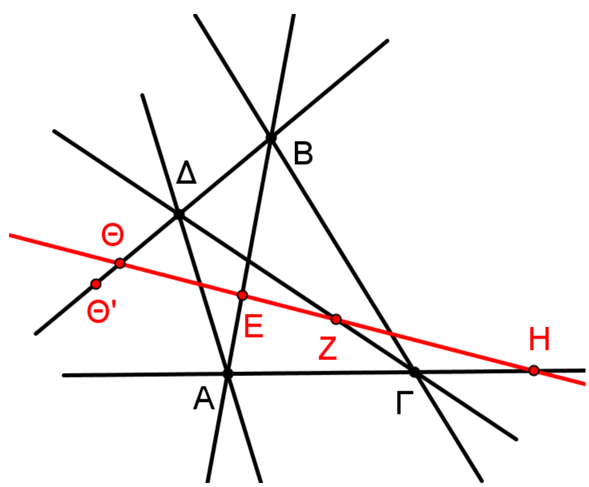
ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η παραπάνω πρόταση είναι χρήσιμη για την λύση πολλών ασκήσεων και είναι εύκολο να απομνημονευθεί ως εξής:

$\dfrac{\square Α}{\square Β}=\dfrac{\square Γ}{\square Δ}\Rightarrow\dfrac{\square Α}{\square Γ}=\dfrac{\square Β}{\square Δ}$ όπου τα τετράγωνα είναι τα σημεία των διαιρέσεων των τμημάτων ΑΒ, ΓΔ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

Η παραπάνω συνεπαγωγή θυμίζει την ιδιότητα των αναλογιών

$\dfrac{Α}{Β}=\dfrac{Γ}{Δ}\Rightarrow\dfrac{Α}{Γ}=\dfrac{Β}{Δ}$ δηλ. την αλλαγή των μέσων όρων μιας αναλογίας.



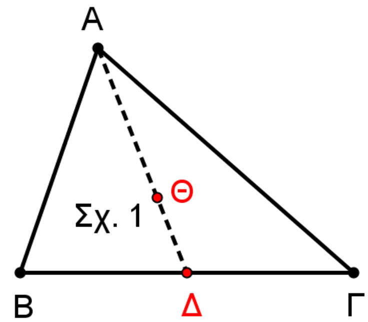
25) Λήμμα

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Θ το κέντρο βάρους του.

Έστω επίσης οι Σ.Π + = (δ, 0) και · = $(\frac{2}{3}, 0)$.

Τότε Θ = Α·(Β + Γ) (Σχ. 1)

Πράγματι, αν Δ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε:
Δ = Β + Γ, άρα Θ = Α·Δ = Α·(Β + Γ)



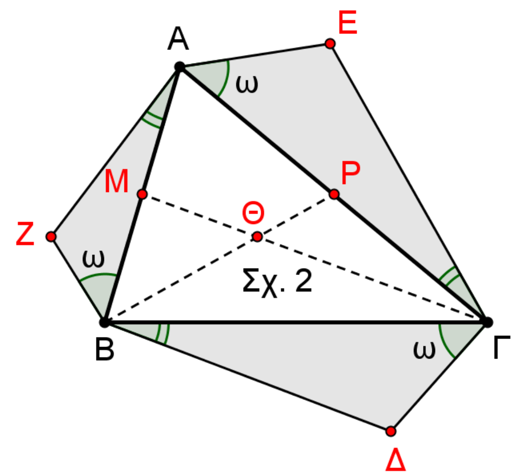
Θα στηριχτούμε στο παραπάνω λήμμα για να αποδείξουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση

Εξωτερικά τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα όμοια τρίγωνα ΓΒΔ, ΑΓΕ, ΒΑΖ με τον ίδιο προσανατολισμό. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν το ίδιο κέντρο βάρους (Σχ. 2).

Απόδειξη

Επειδή τα τρίγωνα ΓΒΔ, ΑΓΕ και ΒΑΖ είναι όμοια, υπάρχει Σ.Π ο τέτοια ώστε
ΓοΒ = Δ ,   ΑοΓ = Ε ,   ΒοΑ = Ζ
(Η Σ.Π αυτή είναι η ο = (λ, ω) όπου
$$\lambda = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma B} = \frac{AE}{A\Gamma} = \frac{BZ}{BA} \text{ και } \omega = \measuredangle B\Gamma\Delta \text{)}$$
Έστω Μ το μέσο της ΑΒ και Ρ το μέσο της ΓΑ.
Έστω επίσης Θ το κ.β του ΑΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι το Θ είναι κ.β και του τριγώνου ΔΕΖ.



Θεωρούμε τις Σ.Π + = (δ, 0) και · = $(\frac{2}{3}, 0)$

Τότε Θ = Α·(Β + Γ) . Πρέπει και αρκεί να αποδείξουμε ότι Θ = Δ·(Ε + Ζ)
Πράγματι, Δ·(Ε + Ζ) = (ΓοΒ)·[(ΑοΓ) + (ΒοΑ)] = (ΓοΒ)·[(Α + Β)ο(Γ + Α)] = (ΓοΒ)·(ΜοΡ) = (Γ·Μ)ο(Β·Ρ) = ΘοΘ = Θ

Πόρισμα

Αν Δ_1, E_1, Z_1 είναι ομόλογα σημεία των τριγώνων ΓΒΔ, ΑΓΕ, ΒΑΖ, τότε το τρίγωνο $\Delta_1 E_1 Z_1$ έχει το ίδιο κ.β με το ΑΒΓ.